Université Paris-Sud
Mathématiques générales (algèbre).
D4MA1U9, 2008/2009

Corrigé de la feuille de TD numéro 7

1. a) On utilise le théorème de réduction des isométries, qui permet d'écrire $A = PMP^{-1}$ avec P orthogonale et M diagonale par blocs, chaque bloc étant le scalaire 1, le scalaire -1, ou une matrice de taille 2 de la forme

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Comme $\det A = 1$ par hypothèse, un nombre pair de -1 apparaissent; en remarquant que $-I_2 = R_\pi$, on peut donc écrire $M = \mathrm{Diag}(1, ..., 1, R_{\theta_1}, ..., R_{\theta_r})$, où les θ_i sont des réels. Il suffit alors de poser $M_t = \mathrm{Diag}(1, ..., 1, R_{\theta_1 t}, ..., R_{\theta_r t})$ et $\gamma(t) = PM_tP^{-1}$ pour obtenir un chemin continu $\gamma : [0,1] \to SO_n(\mathbf{R})$ tel que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = A$.

b) Si A et B sont dans $SO_n(\mathbf{R})$, on peut d'après a) relier I_n à A (resp. I_n à B) par un chemin continu γ_1 (resp. γ_2). Il suffit alors de "concaténer" γ_1 et γ_2 (en posant par exemple $\gamma(t) = \gamma_1(-2t+1)$ si $0 \leq t \leq 1/2$ et $\gamma(t) = \gamma_2(2t-1)$ si $1/2 \leq t \leq 1$) pour obtenir un chemin continu reliant A à B.

c) Par contre $O_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe car son image par le déterminant est $\{-1, 1\}$, qui n'est pas un connexe de $\mathbf{R}$ (le b) montre que ses deux composantes connexes sont $SO_n(\mathbf{R})$ et son complémentaire).

d) Cela résulte de ce que $S_n^+(\mathbf{R})$ est convexe (immédiat avec la définition).

e) D'après l'exercice sur la décomposition polaire (feuille 6, exercice 1), toute matrice M de $GL_n(\mathbf{R})$ s'écrit sous la forme $M = OS$ avec O orthogonale et S symétrique définie positive. La condition $\det M > 0$ signifie que $O \in SO_n(\mathbf{R})$. Ainsi $GL_n^+(\mathbf{R})$ est l'image de $SO_n(\mathbf{R}) \times S_n^+(\mathbf{R})$ par l'application continue $(O, S) \mapsto OS$. Le résultat découle alors de ce que le produit de deux connexes par arcs (resp. l'image par une application continue d'un connexe par arcs) est connexe par arc.

2. a) Il est clair que $G := G(x_1, ..., x_p)$ est symétrique. Si maintenant $Y = (y_1, ..., y_p)$ est un vecteur-colonne de $\mathbf{R}^p$, alors ${}^tYGY = \sum_{1 \leq i,j \leq n} y_i y_j \langle x_i, x_j \rangle$ est positif ou nul car c'est la norme au carré du vecteur $\sum_{i=1}^n y_i x_i$ de E.

b) La même méthode que dans le cours montre que si φ est une forme bilinéaire positive sur un espace vectoriel réel (pas forcément définie), alors

$| \varphi(x,y) | \leq \varphi(x,x)\varphi(y,y)$, en particulier si $\varphi(x,x) = 0$, alors $\varphi(x,y) = 0$ pour tout y. Ici $\varphi : (X,Y) \mapsto^t XAY$ est une forme bilinéaire positive sur $\mathbf{R}^p$, donc ${}^tXAX = 0$ implique ${}^tXAY = 0$ pour tout Y, soit ${}^tXA = 0$ (en prenant pour Y les vecteurs de la base canonique), ou encore en transposant $AX = 0$.

c) Le rang r de G est $p - \dim \ker G$. D'après a) G est positive, et b) implique alors que $\ker G$ est constitué des vecteurs X tels que ${}^tXGX = 0$ ou encore (cf. a)) tels que $\sum_{i=1}^n y_i x_i = 0$, qui est exactement $p - r'$, où r' est le rang de la famille $(x_1, ..., x_p)$ (appliquer le théorème du rang à l'application linéaire de $\mathbf{R}^p$ dans E qui envoie $(y_1, ..., y_p)$ sur $\sum_{i=1}^n y_i x_i$). Finalement $r = r'$.

d) (question difficile). On peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec P orthogonale et D diagonale à coefficients ≥ 0, et il suffit de montrer le résultat pour D car si $D =^t BB$, alors $A =^t (BP^{-1})(BP^{-1})$. On se ramène donc à A diagonale.

Dans le cas $n = p$, on peut prendre B symétrique en prenant la matrice diagonale dont les coefficients sont les racines carrées de ceux de A. (cf. exercice 1 de la feuille 6).

Supposons $p < n$; on cherche alors B sous une forme par blocs

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

où B_1 est une matrice (p,p). Alors la condition cherchée est ${}^tB_1B_1 = A$, qu'on peut réaliser d'après le cas $n = p$.

Supposons enfin $p > n$. Comme A est de rang au plus n, on peut supposer $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n, 0, ...0)$. On cherche alors B sous une forme par blocs

$$\begin{pmatrix} B_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où B_2 est une matrice (n,n); la condition voulue est alors ici ${}^tB_2B_2 = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, qu'on réalise encore via le cas $n = p$.

e) Si $A = G(x_1, ...x_p)$, alors A est symétrique positive d'après a), et de rang $\leq n$ d'après c). On obtient la réciproque en appliquant d) : si $A =^t BB$, alors $A = G(x_1, ...x_p)$ où $x_1, ...x_p$ sont les vecteurs dont les coordonnées dans une b.o.n. de E sont les colonnes de B.