Corrigé de la feuille de TD numéro 6.

1. a) La matrice symétrique A s'écrit $A = PDP^{-1}$ avec P orthogonale et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ diagonale. De plus les λ_i sont ≥ 0 car A est supposée positive. Posons $D' = \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$, alors $S := PD'P^{-1}$ est symétrique (bien noter que cela marche parce que P est orthogonale) et positive avec $S^2 = A$.

b) Quitte à faire le changement de base par P comme dans a), on peut supposer A diagonale. Alors S doit laisser stable les sous-espaces propres de A, et la restriction S_i de S à chacun de ces sous-espaces propres $\ker(A - \lambda_i I)$ est symétrique positive. Comme $S_i^2 = \lambda_i I$, la seule valeur propre possible de S_i est $\sqrt{\lambda_i}$ donc $S_i = \lambda_i I$ vu que S_i est diagonalisable. Finalement S est unique.

c) On observe que si on a une telle écriture, alors ${}^tMM = S^2$. Or, ${}^tMM$ est symétrique (évident) positive (car $\langle {}^tMMX, X\rangle = \langle MX, MX\rangle$, où X est un vecteur colonne quelconque et $\langle , \rangle$ le produit scalaire canonique). D'après b), on a une et une seule matrice symétrique positive S telle que ${}^tMM = S^2$ (et comme S est inversible, elle est définie positive). Alors nécessairement $O = MS^{-1}$ d'où déjà l'unicité. Maintenant MS^{-1} est bien orthogonale vu que sa transposée $S^{-1}.{}^tM$ est son inverse via l'égalité ${}^tMM = S^2$.

2. a) Déjà $O_n(\mathbf{R})$ est borné car une matrice de $O_n(\mathbf{R})$ a tous ses termes de valeur absolue au plus 1. C'est aussi un fermé de l'e.v.n. de dimension finie $M_n(\mathbf{R})$, comme image réciproque du singleton $\{I\}$ par l'application continue $M \mapsto^t MM$, donc c'est finalement un compact.

b) On commence par écrire M comme limite d'une suite (M_p) de matrices inversibles (c'est possible en observant par exemple que $(M - 1/pI)$ est inversible pour p assez grand vu que le spectre de M est fini). D'après 1.c), chaque M_p s'écrit $M_p = O_pS_p$ avec O_p orthogonale et S_p symétrique positive. Quitte à extraire, on peut supposer via le a) que (O_p) converge vers une matrice orthogonale O. Alors comme $S_p = O_p^{-1}M_p$, la suite (S_p) converge vers une matrice S qui est encore symétrique positive (clair avec les définitions) et en passant à la limite on obtient $M = OS$. Noter que S est encore unique (même argument que dans l'exercice 1.) mais pas O.

3. a) On sait que u est trigonalisable dans une base $\mathcal{B}$. Par Gram-Schmidt il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'$ telle que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ soit triangulaire supérieure. Alors u trigonalise dans $\mathcal{B}'$.

b) Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble en question. Soit (M_p) une suite de matrices de $\mathcal{T}$ convergeant vers une matrice M. D'après a) on peut écrire $M_p = Q_pT_pQ_p^{-1}$ avec Q_p orthogonale et T_p triangulaire supérieure. D'après 2.a), on peut supposer (quitte à extraire) que (Q_p) converge vers une matrice orthogonale Q. Alors la suite (T_p) converge (car $T_p = Q_p^{-1} M_p Q_p$) et sa limite T reste triangulaire supérieure; alors $M = QTQ^{-1}$ est trigonalisable, i.e. elle reste dans $\mathcal{T}$.

4. a) Un calcul immédiat donne

$$\mathrm{Tr}\,(AJ) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}$$

b) Comme J est symétrique, elle est diagonalisable en base orthonormée et il s'agit juste de voir que son spectre est celui de D (avec les mêmes multiplicités). Or J est de rang 1 donc la valeur propre 0 est de multiplicité au moins $n-1$; mais comme $\mathrm{tr}\, J = n$, la dernière valeur propre est n.

c) On observe que $B := O^{-1}AO$ reste orthogonale. Or si on pose $B = (b_{ij})$, alors $\mathrm{tr}\,(BD) = nb_{11}$ est compris entre $-n$ et n vu que B est orthogonale.

d) D'après a), on a $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} = \mathrm{tr}\,(AJ)$, qui est aussi (par b)) :

$$\mathrm{tr}\,((AOD)O^{-1}) = \mathrm{tr}\,(O^{-1}AOD)$$

d'où le résultat avec c).