Université Paris-Sud
Mathématiques générales (algèbre).
D4M4U9, 2008/2009

Corrigé de la feuille de TD numéro 5.

1. a) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de K^2 et u l'endomorphisme dont la matrice dans cette base est

$$M_\lambda := \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dire que M_λ et M_μ sont conjuguées dans $\mathrm{SL}_2(K)$ signifie qu'il existe une nouvelle base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ telle que la matrice de u dans $\mathcal{B}'$ soit M_μ et la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ soit de déterminant 1. En particulier, ceci implique que e'_1 soit un multiple de e_1 (c'est un vecteur propre de u pour la valeur propre 1 vu la forme de M_μ), donc qu'on ait (avec la condition sur le détrminant)

$$e'_1 = ae_1 \quad e'_2 = be_1 + \frac{1}{a}e_2$$

avec $a \in K^*$ et $b \in K$. On a alors que la matrice de u dans $\mathcal{B}'$ est M_μ si et seulement si

$$u(e'_2) = \mu e'_1 + e'_2 = (\mu a + b)e_1 + \frac{1}{a}e_2$$

Or $u(e'_2) = be_1 + \frac{1}{a}(\lambda e_1 + e_2) = (b + \lambda/a)e_1 + \frac{1}{a}e_2$, ce qui donne pour seule condition

$$\mu a = \lambda/a$$

qui a une solution $a \in K^*$ si et seulement si λ/μ est un carré dans K^* (c'est équivalent à μ/λ carré dans K^*).

b) On sait qu'il existe une base (f_1, f_2) de K^2 dans laquelle la matrice de τ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \in K^*$. Soit a le déterminant de la matrice de passage de la base canonique à (f_1, f_2), alors la matrice de passage P de la base canonique à $(f_1, \frac{1}{a}f_2)$ est 1 par multilinéarité du déterminant. La matrice de τ dans $(f_1, \frac{1}{a}f_2)$ est alors

$$N = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car $\tau(f_1) = f_1$ et $\tau(\frac{1}{a}f_2) = \frac{\alpha}{a}e_1 + \frac{1}{a}f_2$. D'après la formule de changement de base, on a donc $\tau = PNP^{-1}$ avec $\det P = 1$, et il suffit de prendre $\lambda = \frac{\alpha}{a}$.

c) On envoie $K^*/{K^*}^2$ dans E en associant à la classe d'un élément λ de K^* la matrice $M_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'après a), cette application est bien définie et injective; d'après b) elle est surjective.

d) D'après c), le cardinal de E est celui de $K^*/{K^*}^2$. Pour $K = \mathbf{C}$, on trouve 1, pour $K = \mathbf{R}$ on obtient 2 (le morphisme "signe" de $\mathbf{R}^*$ dans ± 1 est surjectif de noyau ${\mathbf{R}^*}^2 = \mathbf{R}_+^*$). Pour $K = \mathbf{Q}$ on obtient un cardinal infini (par exemple les classes des nombres premiers sont deux à deux distinctes dans $\mathbf{Q}^*/{\mathbf{Q}^*}^2$). Enfin pour un corps fini on trouve 1 ou 2 suivant que K est de caractéristique 2 ou au moins 3, d'après l'exercice 2)b) de la feuille 1.

2. 1.a) Notons déjà que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = G$ car sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, il est équivalent de dire que le déterminant d'une matrice est 1 ou qu'il est non nul. Le cardinal de G est 6. En effet, plus généralement, rappelons que le cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)$ est

$$(q^n - 1)(q^n - q)...(q^n - q^{n-1})$$

On remarque alors que tout élément de G induit une permutation des trois vecteurs non nuls de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$, d'où un morphisme de G dans $\mathcal{S}_3$. Ce morphisme est injectif (si les vecteurs d'une base sont fixes par un endomorphisme, cet endomorphisme est l'identité, donc c'est le cas a fortiori si tous les vecteurs non nuls sont fixes), et il est bijectif par cardinalité.

1.b) Il suffit de montrer l'énoncé pour le groupe $\mathcal{S}_3$. Son sous-groupe dérivé D est inclus dans le sous-groupe $\mathcal{A}_3$ des permutations de signature 1, car tout commutateur est de signature 1. Or $\mathcal{A}_3$ est de cardinal 3, donc D est de cardinal 3 ou 1. Mais D ne peut pas être de cardinal 1 sinon $\mathcal{S}_3$ serait commutatif.

Remarque : On a ainsi montré que le sous-groupe dérivé de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ n'était pas $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$: c'est le cas d'exception.

2.a) En utilisant la formule générale, on obtient que le cardinal de G est 48. Comme le déterminant induit un morphisme surjectif de G vers $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^*$ de noyau H, on obtient que le cardinal de H est 24 puisque le cardinal de $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^*$ est 2.

b) Comme le centre de G (qui est composé des homothéties) est isomorphe à $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^*$, le cardinal de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ est 24. Le centre de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ est composé des homothéties de déterminant 1, i.e. des aI_2 avec $a^2 = 1$. Mais dans $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, l'équation $a^2 = 1$ a deux solutions (1 et -1) donc le centre de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ est de cardinal 2 , et $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ est de cardinal 12 d'après a).

c) On envoie $\mathrm{GL}_2(K)$ dans le groupe des permutations de $\mathcal{P}$ en associant à $g \in \mathrm{GL}_2(K)$ la permutation $D \mapsto g.D$ des droites vectorielles de K^2. Le noyau est constitué des éléments de $\mathrm{GL}_2(K)$ qui laissent fixes toutes les droites, donc des homothéties. Le théorème de factorisation donne alors le résultat.

d) D'après c), on a un morphisme injectif de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ dans le groupe des permutations de $\mathcal{P}$; or ici $\mathcal{P}$ est de cardinal 4 car il y a 4 droites dans $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2$. On a donc un morphisme injectif de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ dans $\mathcal{S}_4$. Ce morphisme est bijectif car $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ et $\mathcal{S}_4$ ont tous deux pour cardinal 24.