Université Paris-Sud
Mathématiques générales (algèbre).
D4M4U9, 2008/2009

Corrigé de la feuille de TD numéro 4.

1. a) Soit (M_p) une suite de matrices de $\mathcal{S}(M)$ qui converge vers une matrice N. Alors $\chi_{M_p} = \chi_M$ pour tout p donc $\chi_N = \chi_M$ (les coefficients du polynôme caractéristique d'une matrice sont des fonctions continues, car polynomiales en les coefficients de la matrice). D'autre part chaque M_p est annulée par le polynôme π_M, donc à la limite on a aussi $\pi_M(N) = 0$. Comme M est diagonalisable, π_M est scindé à racines simples, donc N est diagonalisable. Comme $\chi_M = \chi_N$ avec M et N diagonalisables, M et N sont semblables.

b) Comme on l'a déjà vu, J_r est semblable à $1/nJ_r$ pour tout entier $n > 0$. Pourtant, la limite des $1/nJ_r$ est 0, qui n'est pas semblable à J_r.

c) Oui ! Si M n'est pas diagonalisable, on peut supposer (via le théorème de décomposition en sous-espaces caractéristique) que M s'écrit par blocs sous la forme $\mathrm{Diag}(\lambda_1 I + N_1, ..., \lambda_r I + N_r)$ avec N_1 nilpotente *non nulle*. Il suffit alors de trouver une suite de matrices semblables à $\lambda_1 I + N_1$ qui converge vers une matrice R non semblable à $\lambda_1 I + N_1$. La réduction de Jordan dit alors que N_1 est semblable à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc étant une matrice de Jordan, avec au moins l'un des blocs de taille $r \geq 2$ puisque $N_1 \neq 0$. On conclut avec b) ($\lambda_1 I_r + J_r/n$ est semblable à $\lambda_1 I_r + J_r$, ce qui n'est pas le cas de $\lambda_1 I_r$).

2. a) Si F est un sous-espace stable de E, alors la restriction de u à F est diagonalisable, donc admet une base de vecteurs propres. En la complétant en une base de vecteurs propres de E (ce qui est possible car E est somme directe des sous-espaces propres), on obtient un supplémentaire de E stable par u.

b) On va construire par récurrence une base de E constituée de vecteurs propres de u. Comme χ_u est scindé, u admet un vecteur propre e_1. Comme u est semi-simple, Ke_1 admet un supplémentaire stable F. Alors la restriction de u à F a un polynôme caractéristique scindé, donc admet un vecteur propre e_2. Comme (e_1, e_2) est stable, il admet un supplémentaire stable et on peut itérer le procéder jusqu'à obtenir une base de vecteurs propres.

Sans l'hypothèse χ_u scindé, le résultat est faux : il suffit de prendre un endomorphisme sans vecteur propre en dimension 2, par exemple $E = \mathbf{R}^2$ et $u(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$.

c) Soit F un sous-espace stable de E et soit G un sous-espace stable de F. Si u est semi-simple, alors G admet un sous-espace supplémentaire stable G_1 dans E. Posons $H = G_1 \cap F$. Alors H est stable par u, et $H \cap G = \{0\}$ vu qu'on a déjà $G_1 \cap G = \{0\}$. D'autre part si $x \in F$, on peut écrire $x = g + g_1$ avec $g \in G$ et $g_1 \in G_1$, mais alors comme g et x sont dans F, on a aussi $g_1 \in F$ soit $g_1 \in H$. Finalement H est bien un supplémentaire de G dans F.

3. a) Notons $\lambda_1, ..., \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de u. Comme u est diagonalisable, son polynôme minimal, qui est son premier invariant de similitude P_1, est

$$P_1 = (X - \lambda_1)...(X - \lambda_r)$$

Ensuite, tous les invariants de similitude sont de la forme $(X-\lambda_1)^{j_1}...(X-\lambda_r)^{j_r}$ avec $j_i = 0$ ou $j_i = 1$. A cause de la relation de divisibilité entre eux, et vu que leur produit doit être le polynôme caractéristique de u, on trouve que pour tout entier s, le s-ième invariant P_s est

$$P_s = (X-\lambda_1)^{j_{1,s}}...(X-\lambda_r)^{j_{r,s}}$$

avec $j_{k,s} = 1$ si la multiplicité de λ_k est au moins s et $j_{k,s} = 0$ sinon. En particulier le nombre d'invariants de similitude est la plus grande multiplicité.

b) Si on écrit la réduite de Jordan sous la forme $\mathrm{Diag}(J_{m_1}, ...J_{m_r})$ avec $m_1 \geq ... \geq m_r$, on voit que cette matrice est semblable à $\mathrm{Diag}(C(X^{m_1})), ...C(X^{m_r}))$ car J_{m_k} est semblable à sa transposée $C(X^{m_k})$. Ainsi les invariants de similitude sont $X^{m_1}, ..., X^{m_r}$.

4. a) Soit x un vecteur non nul de $\mathbf{C}^n$ associé à une valeur propre λ. Alors $M^k x = \lambda^k x$ donc si (M^k) tend vers zéro, alors la suite de complexes (λ^k) aussi (en prenant par exemple pour norme sur $M_n(\mathbf{C})$ la norme associée à une norme de $\mathbf{C}^n$). Ceci implique que λ est de module < 1.

b) On applique la formule du binôme de Newton. Comme $N^k = 0$ si $k \geq n$, on obtient, pour $k \geq n$,

$$M^k = \sum_{j=0}^{n-1} C_k^j \lambda^{k-j} N^j$$

Comme n est un entier fixe (indépendant de k), il suffit de montrer que chaque terme de la somme tend vers zéro. Or le terme d'indice j est majoré en norme par

$$\alpha C_k^j \lambda^k$$

avec α constante positive, qu'on peut lui-même majorer par $\alpha k^n \lambda^k$ qui tend vers zéro quand k tend vers l'infini.

c) En effectuant la décomposition de l'endomorphisme associé à A en sous-espaces caractéristiques, on est ramené à une matrice qui est diagonale par blocs, chaque bloc étant de la forme $\lambda I + N$ avec N nilpotente et λ de module < 1 car les λ qui apparaissent sont les valeurs propres complexes de M. Il suffit alors d'appliquer b).

d) Il suffit de considérer une matrice M de $M_n(\mathbf{R})$ comme une matrice complexe. On obtient alors : (M^k) tend vers zéro si et seulement si toutes les valeurs propres *complexes* de M sont de module < 1.