Université Paris-Sud
Mathématiques générales (algèbre).
D4MA1U9, 2008/2009

Corrigé du TD3.

1. a) Un calcul immédiat montre que deux matrices diagonales commutent. Réciproquement, si M commute avec D, alors M laisse stable les sous-espaces propres de l'endomorphisme associé à D dans la base canonique. Comme les valeurs propres de D sont distinctes, cela signifie exactement que M est diagonale. Finalement, $C(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales.

b) D'après a), les matrices de $S(D)$ sont toutes diagonales. Or une matrice diagonale est semblable à D si et seulement si elle a le même spectre que D (en effet si l'endomorphisme v associé à M dans la base canonique a pour valeurs propres $\lambda_1, ...\lambda_n$, on obtient une base $(f_1, ..., f_n)$ dans laquelle sa matrice est D en prenant pour f_i un vecteur propre associé à λ_i). On a donc $n!$ matrices dans $S(D)$ (obtenues en permutant les valeurs $\lambda_1, ...\lambda_n$ sur la diagonale).

c) On peut écrire D par blocs sous la forme $D = \mathrm{Diag}(\mu_1 I_{m_1}, ..., \mu_n I_{m_n})$. Si M commute avec D, elle laisse stable les sous-espaces propres de D, donc s'écrit par blocs $M = \mathrm{Diag}(M_1, ..., M_r)$, chaque M_i étant de taille m_i. Réciproquement une telle M commute bien avec D (quand on fait le produit par blocs, chaque M_i commute avec $\mu_i I_{m_i}$). La dimension de $C(D)$ est donc $\sum m_i^2$.

d) D'après c), les matrices-bloc de la forme $M = \mathrm{Diag}(M_1, \lambda)$ (où M_1 est une matrice $(2,2)$ et λ un scalaire) commutent avec D. Pour avoir de plus M semblable à D, il suffit que M soit diagonalisable de polynôme caractéristique $(X - \lambda_1)^2(X - \lambda_2)$. Prenons $\lambda = \lambda_1$; alors il suffit que M_1 soit diagonalisable de valeurs propres λ_1 et λ_2. Il existe une infinité de telles matrices, par exemple toutes celles de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \in K$. Elles sont bien diagonalisables car elles ont deux valeurs propres distinctes.

Noter que prendre $\lambda = \lambda_2$ n'aurait pas marché, car on aurait alors dû prendre M_1 diagonalisable de polynôme caractéristique $(X - \lambda_1)^2$, donc $M_1 = \lambda_1 I_2$. Noter que le fait que $S(D)$ soit infini vient aussi de ce que $C(D)$ est "plus gros" qu'en a) à cause de la présence d'une valeur propre multiple.

e) S'il n'y a qu'une valeur propre, D est une homothétie et $S(D)$ se réduit à D, donc est fini. On a vu en b) que $S(D)$ était fini quand D avait n valeurs propres distinctes. Il reste à montrer que $S(D)$ est infini quand D a au moins deux valeurs propres ditinctes (disons λ_1 et λ_2) et une valeur propre multiple (disons λ_1); on peut supposer que D s'écrit

$$D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n)$$

les λ_i pour $i \geq 3$ étant quelconques. La question d) correspond à la dimension 3. Si M_1 est une matrice $(3,3)$ qui est dans $S(D_1)$, où $D_1 := \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2)$, alors il est immédiat que la matrice-bloc $M = \mathrm{Diag}(M_1, \lambda_3, ..., \lambda_n)$ est dans $S(D)$. Comme $S(D_1)$ est infini d'après d), $S(D)$ l'est aussi.

f) Soient $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de K^n. Notons u l'endomorphisme associé à J dans cette base. Alors dans la nouvelle base $(e_1, \alpha e_2, \alpha^2 e_3, ...\alpha^{n-1} e_n)$, la matrice de u devient αJ. Ainsi αJ est semblable à J.

g) Il est immédiat que αJ commute avec J. Comme K est infini, $S(J)$ est infini d'après f).

En combinant g) et e), on obtient facilement (via la décomposition en sous-espaces caractéristiques et la réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent) que sur un corps K algébriquement clos, $S(M)$ est fini si et seulement si M est scalaire ou bien diagonalisable à valeurs propres distinctes.

2. a) Il s'agit de montrer que toute matrice complexe M est limite d'une suite de matrices diagonalisables. Comme M est trigonalisable, on peut la supposer triangulaire supérieure (quitte à faire un changement de base, i.e. à raisonner avec PMP^{-1}, où P est inversible). Soit alors $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les éléments de la diagonale de M. Soit, pour tout i de $1, ..., n$, une suite $\lambda_{i,p}$ de complexes qui tend vers λ_i; appelons M_p la matrice obtenue à partir de M en remplaçant λ_i par $\lambda_{i,p}$ sur la diagonale de M. Alors la suite (M_p) tend vers M. Pour avoir M_p diagonalisable, il suffit que les $\lambda_{i,p}$ soient deux à deux distincts. Pour cela on choisit $\lambda_{i,p} = \lambda_i + i\frac{\alpha}{p}$, où α est le minimum des $\mid \mu - \mu' \mid$ pour μ, μ' valeurs propres distinctes de M.

b) La matrice nulle est diagonalisable. Pourtant si $\varepsilon > 0$, la matrice M dont le seul terme non nul est $m_{n,n+1} = \varepsilon$ n'est pas diagonalisable (sinon elle serait nulle) alors qu'elle tend vers la matrice nulle quand ε tend vers zéro. Ainsi si $n \geq 2$, l'ensemble des matrices diagonalisables n'est pas ouvert.

Remarque : Le résultat de a) ne vaut plus sur $\mathbf{R}$. En effet si (M_p) est une suite de matrices diagonalisables de $M_2(\mathbf{R})$ qui converge vers M, le discriminant du polynôme χ_{M_p} (qui est de degré 2) reste ≥ 0, donc celui de χ_M aussi (les coefficients du polynôme caractéristique d'une matrice sont des fonctions continues de ses termes). Ainsi M a son polynôme caractéristique scindé sur $\mathbf{R}$. En particulier une matrice $(2, 2)$ réelle dont le polynôme caractéristique n'est pas scindé ne peut pas être limite de matrices diagonalisables.

3. a) Si A est inversible, alors $AB = A(BA)A^{-1}$, donc AB et BA sont semblables. En général ce n'est pas vrai. On peut par exemple avoir $AB = 0$ et $BA \neq 0$ en prenant

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Si $A + \lambda I$ est inversible, les matrices $(A + \lambda I)B$ et $B(A + \lambda I)$ sont semblables, donc ont même polynôme caractéristique. On a envie de "faire tendre λ vers zéro". Si $K = \mathbf{R}$ ou $K = \mathbf{C}$, on peut prendre une suite (λ_p) d'éléments de K qui tend vers zéro, et telle que $(A + \lambda_p I)$ soit inversible (c'est possible car le spectre de A est fini). En passant à la limite l'égalité $\chi_{(A+\lambda_p I)B} = \chi_{B(A+\lambda_p I)}$, on obtient le résultat.

Si K est quelconque, il faut raisonner par "densité algébrique". Pour toute matrice M, appelons $c_k(M)$ le k-ième coefficient du polynôme caractéristique de M. On a donc, pour tout λ qui est dans K et pas dans le spectre de A :

$$c_k((A-\lambda I)B) = c_k(B(A-\lambda I))$$

On remarque que les deux termes sont des fonctions polynomiales de λ. Si K est infini, elles coïncident en un nombre infini de valeurs, donc partout, et en particulier en $\lambda = 0$, ce qui donne le résultat.

c) Si K est fini, on peut regarder A et B comme des matrices à coefficient dans le corps infini $K(X)$, donc le résultat vaut encore !