Université Paris-Sud
Mathématiques générales (algèbre).
D4MA1U9, 2008/2009

**Corrigé du partiel du 27 mars 2009.**

**Exercice 1.**

**1.** a) La factorisation de $P$ dans $\mathbf{R}[X]$ est $P = (X - {}^4\sqrt{2})(X + {}^4\sqrt{2})(X^2 + 2)$. Par unicité de la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$, $P$ ne s'écrit pas sous la forme $P = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$ avec $a, b, c, d$ dans $\mathbf{Q}$. On peut aussi bien sûr écrire simplement les équations que devraient satisfaire $a, b, c, d$ sans passer par $\mathbf{R}[X]$.

b) D'après a), $P$ n'est pas produit de deux facteurs de degré 2 dans $\mathbf{Q}[X]$. D'autre part il n'a pas non plus de facteur de degré 1 car il n'a pas de racines dans $\mathbf{Q}$, d'où le résultat.

**2.** D'après 1)b), le degré cherché est celui d'un corps de rupture de $P$ sur $\mathbf{Q}$. C'est donc $\deg P = 4$.

**3.** Les racines de $P$ dans $\mathbf{C}$ sont $\pm{}^4\sqrt{2}$ et $\pm i{}^4\sqrt{2}$. Comme $L$ contient $i$ et ${}^4\sqrt{2}$, on obtient que $P$ est scindé sur $L$. D'autre part un corps qui contient $\mathbf{Q}$ et ces racines contient ${}^4\sqrt{2}$ (donc contient $L$) et $i$ (qu'on obtient comme quotient de deux racines), donc il contient aussi $L$. Finalement $L$ est bien engendré comme corps par $\mathbf{Q}$ et les racines de $P$, c'est donc un corps de décomposition de $P$ sur $\mathbf{Q}$. Il est de degré 2 sur $K$ (vu que $i \notin K$ car $K \subset \mathbf{R}$, et $i$ annule le polynôme $X^2 + 1$), donc de degré 8 sur $\mathbf{Q}$.

**Exercice 2.**

**1.** Comme $x$ n'annule pas de polynôme non nul de $\mathbf{Q}[X]$, il n'a aucun $\mathbf{Q}$-conjugué.

**2.** Les polynômes annulateurs de $x$ dans $\mathbf{Q}[X]$ sont les multiples de son polynôme minimal $\pi_x$, donc le seul polynôme annulateur de $x$ et irréductible unitaire est précisément $\pi_x$. Le nombre de $\mathbf{Q}$-conjugués de $x$ est donc le nombre de racines de $\pi_x$ dans $\mathbf{C}$, qui est son degré, lequel est $d = [\mathbf{Q}[x] : \mathbf{Q}]$ (un bonus de 0.5 pour ceux qui ont pensé à dire qu'en caractéristique zéro, $\pi_x$ ne peut pas avoir de racine multiple dans $\mathbf{C}$).

**3.** Non d'après 2., car ${}^3\sqrt{2}$ a déjà comme conjugués les racines complexes de $X^3 - 2$, ce qui en fait trois (on peut aussi reprendre l'argument de polynôme minimal).

**Exercice 3.**

**1.** a) Le point est que $p_i$ est un polynôme en $u$ : c'est l'additif au théorème des noyaux, appliqué au polynôme $\chi_u$ qui est le produit des $(X-\lambda_i)^{m_i}$. On a bien $\chi_u(u)=0$ via Cayley-Hamilton.

b) La somme est clairement directe est incluse dans $F$. Si maintenant $x \in F$, il est la somme des $x_i = p_i(x)$, et on a bien $x_i \in (F \cap F_i)$ d'après a).

**2.** Dans ce cas on a $E_i = F_i$ pour tout $i$. Clairement un sous-espace du type $\bigoplus_{1\le i\le r} G_i$ avec $G_i$ comme dans l'énoncé est stable par $u$. En sens inverse si $F$ est stable, on l'écrit $\bigoplus_{1\le i\le r}(F\cap F_i)$ d'après 2.b), et alors $(F\cap F_i)$ est bien un sous-espace de $E_i$.

**Exercice 4.**

**1.** a) Il suffit de vérifier la propriété pour une matrice diagonale. Alors, le résultat vient de ce que tout élément $x$ de $\mathbf{F}_q$ vérifie $x^q = x$.

b) Le polynôme $X^q - X$ est comme on l'a vu en cours scindé sur $\mathbf{F}_q$, et à racines simples (sa dérivée est $-1$), d'où le résultat.

**2.** Il suffit de trouver une matrice de polynôme minimal $P$ non scindé sur $\mathbf{R}$ et divisant $X^7 - X$ (par exemple $P = X^7 - X$ ou $P = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$ si on veut la plus petite dimension possible). On prend alors $A = C(P)$.