Université Paris-Sud
Mathématiques générales (algèbre).
D4MA1U9, 2008/2009

Corrigé de l'examen du 12 juin 2009.

Exercice 1.

a) C'est vrai : en effet ou bien P est de degré 1, auquel cas $K = \mathbf{R}$, ou bien il est de degré 2 et possède deux racines complexes conjuguées a et $\bar{a}$; dans ce dernier cas K est isomorphe à $\mathbf{R}(a)$, mais alors en écrivant $a = \alpha + i\beta$ avec α, β réels et $\beta \neq 0$, on voit que $i = (a - \alpha)/\beta$ est dans $\mathbf{R}(a)$, donc $\mathbf{R}(a)$ contient $\mathbf{R}(i) = \mathbf{C}$, donc il lui est isomorphe (ils sont tous deux de dimension 2 sur $\mathbf{R}$).

b) C'est faux : si un tel morphisme existait, on pourrait voir $\mathbf{F}_8$ comme un espace vectoriel de dimension finie (car fini) d sur $\mathbf{F}_4$, donc il aurait même cardinal que $\mathbf{F}_4^d$, soit 4^d. Or 8 n'est pas une puissance de 4.

c) C'est vrai. En effet P est irréductible (car de degré 3 sans racine), un corps de rupture de P sur $\mathbf{Q}$ est $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{7})$ et un corps de décomposition est $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{7}, j)$. Ils ne sont pas isomorphes car par exemple l'équation $x^2 + x + 1$ a une racine dans le second et pas dans le premier. On conclut par unicité du corps de rupture et du corps de décomposition.

d) C'est faux : dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(X)$, le morphisme de Frobenius $x \mapsto x^p$ n'est pas surjectif.

Exercice 2.

a) On écrit $M = QDQ^{-1}$ avec Q inversible et $D = \mathrm{Diag}(a_1, ..., a_n)$. Comme $\mathbf{C}$ est algébriquement clos, il existe des complexes $b_i, ..., b_n$ avec $P(b_i) = a_i$ pour tout i. Alors en posant $D' = \mathrm{Diag}(b_1, ..., b_n)$ et $A = PD'P^{-1}$, on obtient $P(A) = M$.

b) Si $A^n = N$, alors A est nilpotente car $(A^n)^n = 0$. On sait alors que $A^n = 0$ donc $N = 0$, contradiction.

c) Si M n'est pas semblable à J_n, sa réduite de Jordan comporte au moins deux blocs de Jordan de taille $< n$. Alors la matrice M possède deux colonnes nulles, ce qui implique que son rang est au plus $n - 2$.

Exercice 3.

a) Si $M = I$ le résultat est clair en prenant l'application constante égale à I. Sinon on sait qu'on peut écrire $M = PAP^{-1}$ avec P inversible et

$$A = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

où $S = I_2 + J_2$ (J_2 est le bloc de Jordan de taille 2). Posons alors

$$\gamma(t) = P \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & I_2 + tJ_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Alors $\gamma(0) = I$, $\gamma(1) = M$ et pour $t \in]0, 1]$, $\gamma(t)$ est une transvection, donc reste dans $\mathcal{T}$.

b) D'après a), on peut relier toute matrice de $\mathcal{T}$ à I par un chemin continu restant dans $\mathcal{T}$. En passant par I, on peut donc relier deux matrices quelconques de $\mathcal{T}$ par un chemin continu restant dans $\mathcal{T}$.

c) La preuve du cours montre que toute matrice de $SL_n(\mathbf{C})$ est produit d'au plus $3n$ transvections. De ce fait $Sl_n(\mathbf{C})$ est l'image de $\mathcal{T}^{3n}$ par l'application continue $(\tau_i) \mapsto \prod \tau_i$. Comme $\mathcal{T}^{3n}$ est connexe par arcs d'après b), il en va de même de $SL_n(\mathbf{C})$. On peut bien sûr aussi prouver directement en utilisant a) qu'un produit de transvections peut être relié à I par une application continue.

Exercice 4.

a) Le procédé de Schmidt dit qu'il existe une base orthonormée $(g_1, ..., g_n)$ telle que la matrice de passage P de $(x_1, ...x_n)$ à $(g_1, ..., g_n)$ soit triangulaire supérieure. On peut donc trouver des réels $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tels que la matrice de passage de $(x_1, ...x_n)$ à $(\alpha_1 g_1, ..., \alpha_n g_n)$ soit triangulaire supérieure à diagonale de 1 (en prenant pour α_i les coefficients diagonaux de P). En posant $f_i = \alpha_i g_i$, on obtient les conditions demandées.

b) D'après la première propriété de a), on peut écrire

$$x_i = f_i + \sum_{j<i} \lambda_j f_j$$

avec les λ_j dans $\mathbf{R}$. La deuxième propriété de la question a) donne (théorème de Pythagore) :

$$||x_i||^2 = ||f_i||^2 + \sum_{j \neq i} \lambda_j^2 ||f_j||^2$$

d'où l'inégalité.

c) Le déterminant de M n'est autre que le déterminant de la matrice N dont les vecteurs colonnes sont $(f_1, ..., f_n)$ car la matrice de passage de $(x_1, ...x_n)$ à $(f_1, ..., f_n)$ a pour déterminant 1 (elle est triangulaire supérieure à diagonale de 1). D'autre part, la deuxième propriété de a) dit que la matrice O obtenue en divisant chaque vecteur-colonne f_i de N par $||f_i||$ est une matrice orthogonale, dont le déterminant est donc 1 ou -1. Finalement on a

$$|\det N| = \prod_{i=1}^{n} ||f_i||$$

d'où le résultat avec b).

d) Le c) dit que le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $x_1, ..., x_n$) est au plus égal au produit de leurs normes (résultat familier en dimension 2).

Il y a égalité si et seulement si tous les λ_j du b) sont nuls, i.e. si $x_i = f_i$ pour tout i, autrement dit si les vecteurs x_i sont deux à deux orthogonaux.