Université Paris-Sud
Mathématiques générales (algèbre).
D4MA1U9, 2008/2009

Corrigé du devoir à la maison.

Exercice 1.

1. On sait que PQ est scindé sur M, donc Q est également scindé sur M. D'autre part si $x_1, ..., x_r$ sont les racines de P dans M et $y_1, ..., y_s$ celles de Q dans M, on a $M = K(x_1, ..., x_r, y_1, ..., y_r)$, mais le corps $K(x_1, ..., x_r)$ est isomorphe à L par unicité du corps de décomposition. Comme on dispose de l'inclusion $K(x_1, ..., x_r) \to M$, on a bien un morphisme de corps $L \to M$.

Remarque : Dans cette question, il fallait faire attention à bien dire à chaque fois dans quel corps on considèrait les racines (sous peine d'admettre sans s'en rendre compte le résultat qu'on veut démontrer !). Il est en particulier essentiel d'utiliser l'unicité du corps de décomposition.

2. Déjà P est scindé sur $L(\alpha)$ (il l'est déjà sur L). D'autre part un sous-corps de $L(\alpha)$ qui contient $K(\alpha)$ et les racines $x_1, ...x_r$ de P contient L (vu que $L = K(x_1, ...x_r)$) et α, donc il est égal à $L(\alpha)$. Par définition du corps de décomposition, on a bien le résultat.

3. Les corps $K(\alpha)$ et $K(\beta)$ sont K-isomorphes par unicité du corps de rupture de Q. Maintenant, 2. dit que les degrés $[L(\alpha) : K(\alpha)]$ et $[L(\beta) : K(\beta)]$ sont les mêmes par unicité "forte" du corps de décomposition (cf. lemme compliqué du cours). Par la multiplicativité des degrés, on en déduit $[L(\alpha) : K] = [L(\beta) : K]$. Ensuite on obtient $[L(\alpha) : L] = [L(\beta) : L]$ en utilisant la multiplicativité des degrés et en simplifiant par $[L : K]$.

4. Si $\alpha \in L$, cela signifie que $[L(\alpha) : L] = 1$. D'après 3., on a $[L(\beta) : L] = 1$ pour toute racine β de Q dans M, soit $\beta \in L$. Finalement Q est bien scindé sur L dès lors qu'une racine α de Q est dans L.

Exercice 2.

a) C'est faux. Par exemple la matrice nulle a le même polynôme caractéristique que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et elle ne lui est pas semblable.

b) C'est vrai. En effet la relation $w \circ u \circ w^{-1} = u$ dit que les matrices de u, v dans une base fixée de E sont semblables. L'une de ces matrices est donc diagonalisable si et seulement si l'autre l'est; et d'autre part un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si sa matrice (dans une base quelconque) est diagonalisable.

c) C'est vrai. En effet toutes les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

avec $a \in K$ ont deux valeurs propres distinctes, donc sont diagonalisables , i.e. sont semblables à $\mathrm{Diag}(\lambda, \mu)$ puisque leurs valeurs propres sont λ et μ.

d) C'est vrai. En effet E est la somme (directe) des sous-espaces propres E_i de u. Soit λ_i la valeur propre associée à E_i, on a alors, pour $x_i \in E_i$:

$$(u \circ v)(x_i) = (v \circ u)(x_i) = \lambda_i x_i$$

vu que $v(x_i)$ est encore dans E_i par hypothèse. On conclut en écrivant tout x de E comme $x = \sum_i x_i$ avec $x_i \in E_i$.

e) On observe que u annule le polynôme scindé $(X-1)(X+1)$. Si K est de caractéristique différente de 2, il est à racines simples donc u est diagonalisable. Si K est de caractéristique 2, le résultat est faux, par exemple la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ et elle n'est pas diagonalisable (sinon ce serait l'identité puisque sa seule valeur propre est 1).

Exercice 3.

1. Comme on l'a déjà vu, le polynôme caractéristique $\chi_{u_{|F}}$ divise χ_u. Comme u est trigonalisable, χ_u est scindé, donc $\chi_{u_{|F}}$ est scindé, donc $u_{|F}$ est trigonalisable (noter qu'on ne conclut pas si facilement si on utilise le polynôme minimal).

2. a) Comme u est trigonalisable, il possède au moins un sous-espace propre F de dimension ≥ 1. Comme v commute avec u, il laisse stable F et d'après 1., sa restriction à F est trigonalisable. Il suffit alors de choisir un vecteur propre x de la restriction de v à F.

b) Comme p est à valeurs dans G, on sait déjà que u_1 et v_1 laissent G stable. On choisit une base $(e_1, ..., e_r)$ de F et une base $(e_{r+1}, ..., e_n)$ de G, alors $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base de E. Comme F est stable par u et v, on peut écrire les matrices de u et v dans $\mathcal{B}$ par blocs sous la forme

$$M_u = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad M_v = \begin{pmatrix} D & E \\ 0 & F \end{pmatrix}$$

tandis que la matrice de p est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

La relation $u \circ v = v \circ u$ implique $CF = FC$. D'autre part les matrices respectives de u_1 et v_1 sont

$$M_{u_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad M_{v_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$$

donc ces matrices commutent, ce qui montre que $u_1 v_1 = v_1 u_1$.

c) D'après b), les matrices respectives de u_2, v_2 dans la base $(e_{r+1}, ..., e_n)$ sont C et F Leurs polynômes caractéristiques divisent donc respectivement ceux de

M_u, M_v, ce qui montre qu'ils sont scindés puisque u et v sont trigonalisables. Ainsi u_2 et v_2 sont trigonalisables.

d) Pour $n = 1$ le résultat est clair. Supposons le résultat vrai en dimension $< n$. D'après a), on peut trouver un vecteur propre commun f_1 pour u et v. Posons $F = Kf_1$ dans b) (en prenant pour G un supplémentaire de Kf_1). Alors d'après b) et c), les restrictions u_2, v_2 de $p \circ u$ et $p \circ v$ à G commutent et sont trigonalisables. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $(f_2, ..., f_n)$ de G de trigonalisation commune pour u_2 et v_2. Il est alors immédiat que $(f_1, ..., f_n)$ est une base de trigonalisation commune pour u et v.

3. Non, car deux matrices triangulaires supérieures ne commutent pas forcément. Prendre par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Il est immédiat que u et v sont trigonalisables (écrire leurs matrices dans la base canonique). Par contre ils ne sont pas cotrigonalisables car ils n'ont pas de vecteur propre commun.