Université de Paris-Sud, année 2008/2009
Filière Math/Info-L2
Maths 209

Feuille de TD numéro 5

1. Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont vraies et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses (on dira d'abord si l'assertion est vraie ou fausse).

a) L'application $x \mapsto x^2$ est un morphisme de groupes de $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}, +)$ dans $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}, +)$.

b) Si G est un groupe (noté multiplicativement) et si x est un élément de G, alors l'ensemble des éléments y de G tels que $xy = yx$ est un sous-groupe de G.

c) Si G est un groupe et f et g sont deux morphismes de G dans G, alors on a $\ker g \subset \ker(f \circ g)$.

d) Soit G un groupe (noté multiplicativement) de neutre e. Alors si tout élement x de G vérifie $x^2 = e$, le groupe G est commutatif.

2. Soient G et G' deux groupes finis (notés multiplicativement). On considère un morphisme de groupes $f : G \to G'$.

a) Soit y un élément de G'. On suppose qu'il existe x_0 dans G tel que $f(x_0) = y$ (c'est-à dire que y est dans l'image $\operatorname{Im} f$ de f). Soit $x \in G$. Montrer que $f(x) = y$ si et seulement si $x_0^{-1}x \in \ker f$.

b) En déduire que si un élément y de G' est dans $\operatorname{Im} f$, alors y possède exactement d antécédents par f, où d désigne le cardinal de $\ker f$.

c) On note n le cardinal de G et m le cardinal de $\operatorname{Im} f$. Montrer que $n = md$.

d) Soit p un nombre premier. On considère l'application f de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ dans lui-même définie par $f(x) = x^2$. Montrer que f est un morphisme de groupes multiplicatifs et déterminer son noyau (on distinguera les cas $p = 2$ et $p \neq 2$).

e) En déduire le nombre d'éléments de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ qui s'écrivent sous la forme y^2 avec $y \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.