Université de Paris-Sud, année 2008/2009
Filière Math/Info-L2
Maths 209

Feuille d'exercices numéro 3

Exemples de groupes; pgcd.

1. On considère le groupe $\mathcal{S}_3$ des permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ (on rappelle que c'est un groupe pour la loi $\circ$).

a) Montrer que $\mathcal{S}_3$ contient exactement trois sous-groupes de cardinal 2, notés T_1, T_2 et T_3.

b) Montrer que $\mathcal{S}_3$ contient un et un seul sous-groupe de cardinal 3, qu'on note C.

c) Que peut-on dire de $C \cap T_i$ quand $i = 1, 2, 3$?

2. Soit G un groupe dont on note la loi multiplicativement et le neutre e. On suppose que pour tout x de G, on a $x^2 = e$.

a) Montrer que pour tout x de e, on a $x^{-1} = x$ (on rappelle que x^{-1} désigne le symétrique de x).

b) Montrer que si x et y sont dans G, alors le symétrique $(xy)^{-1}$ de xy est égal à yx.

c) En déduire que $xy = yx$ pour tous x, y de G (autrement dit G est commutatif).

3. Calculer le pgcd de 123456 et 654321, puis le pgcd de 1970 et 2176362.

4. Soient a et b deux éléments de $\mathbf{Z}$. On suppose que a et b sont premiers entre eux. Calculer le pgcd de $a + b$ et de ab.

5. On se propose de montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Pour cela on raisonne par l'absurde en supposant que $\sqrt{2} = p/q$ avec p et q entiers.

a) Montrer qu'il existe une telle écriture avec p et q premiers entre eux.

b) Montrer que 2 divise p^2, puis que 2 divise p.

c) Montrer que 2 divise q et aboutir à une contradiction.

6. Soit $(G, +)$ un groupe abélien noté additivement.

a) Soit x un élément de G tel que $mx = 0$ et $nx = 0$, où m et n sont deux entiers premiers entre eux. Montrer que $x = 0$.

b) On suppose maintenant que $(ab)x = 0$, où a et b sont deux entiers premiers entre eux. Montrer qu'il existe deux éléments y et z de G vérifiant : $ay = 0$, $bz = 0$, et $x = y + z$.

7. Soient a et b deux entiers.

a) Calculer le ppcm de a et b quand a et b sont premiers entre eux.

b) On ne suppose plus a et b premiers entre eux. Calculer

$$pgcd(a, b).ppcm(a, b)$$