Université de Paris-Sud, année 2008/2009
Filière Math/Info-L2
Maths 209

Feuille d'exercices numéro 1

Théorie des ensembles. Nombres premiers, congruences.

0. Ceci n'est pas à proprement parler un exercice, mais plutôt un petit sondage destiné à voir où vous en êtes (pas d'affolement donc si vous ne savez pas répondre du premier coup !).

a) Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles.

-Donner la définition de : f est injective; f est surjective; f est bijective.

-Traduire avec des quantificateurs les assertions : f n'est pas injective; f n'est pas surjective.

b) Soit E un ensemble. Dire ce qu'est :

-une relation d'ordre sur E.

-une relation d'ordre total (resp. partiel) sur E.

-une relation d'équivalence sur E.

-l'ensemble quotient associé à une relation d'équivalence sur E.

Donner des exemples de ces notions.

1. Parmi les assertions suivantes, dire lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses (en justifiant).

a) Soit n un entier au moins égal à 2. Alors le plus petit diviseur au moins égal à 2 de n est un nombre premier.

b) La somme de deux nombres premiers n'est jamais un nombre premier.

c) Le produit de deux nombres premiers n'est jamais un nombre premier.

d) Soient a, b, c trois entiers naturels. Si a est premier avec b et b est premier avec c, alors a est premier avec c.

2. Écrire une preuve détaillée par récurrence sur n de l'assertion vue en cours : tout entier $n \geq 2$ admet une décomposition en facteurs premiers (cet exercice est surtout l'occasion de revoir le mécanisme d'un raisonnement par récurrence).

3. Déterminer les restes des divisions euclidiennes suivantes :

a) 2^{17} divisé par 3.

b) 5^5 divisé par 7.

c) 111970 divisé par 9.

4. Soit n un entier naturel strictement positif.

a) Montrer que $10^{n+1} - 9n - 10$ est divisible par 9.

b) On appelle u_n le nombre dont l'écriture décimale est 1...1 (avec n fois le chiffre 1). Exprimer u_n en fonction de n.

c) Calculer $u_1 + u_2 + ... + u_n$ en fonction de n.

d) En déduire que $10^{n+1} - 9n - 10$ est divisible par 81.

5. On se propose de montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k - 1$ avec $k \in \mathbf{N}^*$. Supposons donc qu'il n'en existe qu'un nombre fini $u_1, ..., u_n$. On pose $N = 4u_1u_2...u_n - 1$.

a) N peut-il être divisible par l'un des nombres $2, u_1, ..., u_n$?

b) Montrer que tous les diviseurs premiers de N sont de la forme $4k + 1$ avec $k \in \mathbf{N}^*$.

c) Déduire de b) que N est congru à 1 modulo 4.

d) Aboutir à une contradiction et conclure.