Université de Paris-Sud, année 2008/2009
Filière Math/Info-L2
Maths 209

Partiel du 30 octobre 2008. Durée : 2h. Aucun document autorisé.

Exercice 1 (8 points).

a) Soit $x \in \mathbf{Z}$. Montrer que si x n'est pas divisible par 3, alors $x^2 \equiv 1$ mod. 3.

b) En déduire qu'il n'existe pas de couple (x, y) dans $\mathbf{Z}^2$ tels que $x^2 - 3y^2 = 1970$.

c) Soit $x \in \mathbf{Z}$. Montrer que si x est pair, alors $x^2 \equiv 0$ mod. 4.

d) Soit x un entier impair. Montrer que $x^2 \equiv 1$ mod. 4.

e) Déduire de c) et d) que l'équation $x^2 + y^2 = 2007$ n'a pas de solutions avec x, y tous deux dans $\mathbf{Z}$.

Exercice 2 (7 points).

a) Montrer que 91 et 11 sont premiers entre eux.

b) Trouver deux éléments u et v de $\mathbf{Z}$ tels que $91u + 11v = 1$ (on ne demande pas de les trouver tous).

c) Soit z un nombre complexe. On suppose que $z^{11} = 1$ et $z^{91} = 1$. Montrer que $z = 1$.

d) Soit z un nombre complexe tel que $z^6 = z^{10} = z^{15} = 1$. Montrer que $z = 1$.

Exercice 3 (5 points).

Soient $(G, +)$ un groupe abélien (dont on note 0 l'élément neutre) et $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Soit H_n l'ensemble des éléments x de G qui vérifient $nx = 0$. Montrer que H_n est un sous-groupe de G.

b) Soient m et n deux éléments de $\mathbf{N}^*$. On suppose que m divise n. Montrer que H_m est un sous-groupe de H_n.

c) Montrer que le sous-ensemble $\bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} H_n$ (c'est-à-dire la réunion des H_n quand n décrit $\mathbf{N}^*$) est un sous-groupe de G.

Question bonus (2 points supplémentaires possibles).

Donner un exemple (en justifiant) de groupe non commutatif E tel que (si l'on note sa loi multiplicativement et son neutre e) l'ensemble des x de E qui vérifient $x^2 = e$ ne soit pas un sous-groupe de E.