Université de Paris-Sud, année 2007/2008
Filière Math/Info-L2
Maths 209

Partiel du 6 novembre 2007. Durée : 2h. Aucun document autorisé.

Exercice 1 (7 points).

a) Trouver un couple (a, b) d'éléments de $\mathbf{Z}$ tels que $7a + 9b = 1$ (on ne demande pas de les trouver tous).

b) En déduire un exemple d'entier x tel que x vérifie les deux congruences

$$x \equiv 3 \quad [7] \quad ; \quad x \equiv 4 \quad [9]$$

c) Soient x et x' deux entiers vérifiant les deux congruences de la question b). Montrer que $x - x'$ est divisible par 63. A-t-on toujours $x - x'$ divisible par 49 ?

Exercice 2 (7 points).

a) Déterminer tous les éléments x de $\mathbf{Z}$ tels que la classe $\bar{x}$ de x dans $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ engendre le groupe $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}, +)$.

b) Quel est le cardinal du groupe $((\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^*, \times)$ constitué des éléments inversibles de $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$?

c) Montrer que pour tout élément a de $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^*$, on a $a^2 = \bar{1}$.

d) En déduire que si φ est un morphisme du groupe $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}, +)$ dans le groupe $((\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^*, \times)$, alors φ ne peut pas être injectif.

Exercice 3 (6 points).

Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont vraies et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses (on dira d'abord si l'assertion est vraie ou fausse).

a) L'application $x \mapsto x^2$ est un morphisme de groupes de $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}, +)$ dans $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}, +)$.

b) Si G est un groupe (noté multiplicativement) et si x est un élément de G, alors l'ensemble des éléments y de G tels que $xy = yx$ est un sous-groupe de G.

c) Si G est un groupe et f et g sont deux morphismes de G dans G, alors on a $\ker g \subset \ker(f \circ g)$.

d) Soit G un groupe (noté multiplicativement) de neutre e. Alors si tout élement x de G vérifie $x^2 = e$, le groupe G est commutatif.