Université de Paris-Sud, année 2008/2009
Maths 209

Devoir à la maison

Problème 1

On rappelle que si E un ensemble, l'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des bijections de E dans E est un groupe pour la composition $\circ$ des applications.

Dans toute la suite, G désigne un groupe, dont on note la loi multiplicativement.

1. On note $\operatorname{Aut} G$ l'ensemble des automorphismes de groupe de G (c'est-à-dire des morphismes de groupes bijectifs de G dans G). Montrer que $(\operatorname{Aut} G, \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}(G), \circ)$. Quel est son élément neutre ?

2. Soit $a \in G$. Montrer que l'application $\sigma_a : G \to G$, $x \mapsto axa^{-1}$ est un élément de $\operatorname{Aut} G$. Que vaut σ_a si G est commutatif ?

3. a) Montrer que l'application $\Phi : G \to (\operatorname{Aut} G, \circ)$, $a \mapsto \sigma_a$ est un morphisme de groupes.

b) On appelle *centre* de G et on note $Z(G)$ le noyau du morphisme Φ. Montrer que $Z(G)$ est l'ensemble des éléments x de G qui vérifient $ax = xa$ pour tout a de G.

4. On dit qu'un sous-groupe H de G est *distingué* si pour tout x de H et pour tout a de G, on a $axa^{-1} \in H$.

a) Montrer que si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupes, alors $\ker f$ est un sous-groupe distingué de G.

b) En déduire que $Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G.

c) Montrer que si H est un sous-groupe distingué de G, alors pour tout a de G, l'application $x \mapsto \sigma_a(x)$ est un automorphisme du groupe H.

5. On note $\mathcal{S}_3$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Quel est le centre de $\mathcal{S}_3$?

Problème 2

Soient G un groupe fini (noté multiplicativement) et H un sous-groupe de G. On se propose de démontrer le *théorème de Lagrange* (admis en cours), à savoir que le cardinal (noté m) de H divise celui de G (noté n).

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie par : $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x^{-1}y \in H$ est une relation d'équivalence sur G. Quelle est la classe d'équivalence du neutre e ?

2. Montrer que si $a \in G$, la classe d'équivalence de a est exactement l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent ah avec $h \in H$ (on notera cet ensemble aH).

3. Montrer que l'application $x \mapsto ax$ est une bijection de l'ensemble H sur l'ensemble aH. En déduire que le cardinal de aH est m.

4. En utilisant le fait que les classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$ forment une partition de G, démontrer le théorème de Lagrange.