Université de Paris-Sud, année 2007/2008
Filière Math/Info-L2
Maths 209

Examen du 20 décembre 2007. Durée : 2h. Aucun document autorisé.

Exercice 1 (6 points).

Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont vraies et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses (on dira d'abord si l'assertion est vraie ou fausse).

a) Soient p_1 et p_2 des nombres premiers. Alors p_1 et p_2 sont premiers entre eux.

b) Soient a et m des éléments de $\mathbf{Z}$. Si a est divisible par m, alors a^2 est divisible par m^2.

c) Soient p un nombre premier et a un entier strictement positif. Si x et x' sont deux entiers vérifiant $ax \equiv ax' \quad [p]$, alors $x \equiv x' \quad [p]$.

d) Soit n un entier non premier au moins égal à 2. Alors il existe des entiers a et b, avec $a \geq 2$, $b \geq 2$, et a et b premiers entre eux, tels que $n = ab$.

Exercice 2 (5 points).

On considère le groupe $G = (\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}, +)$.

a) Quels sont les générateurs de G ?

b) Quel est l'ordre de $\bar{3}$ dans le groupe G ?

c) Soit H le sous-groupe de G engendré par $\bar{3}$. H est-il isomorphe au groupe additif $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$? Justifier la réponse.

Exercice 3 (6 points).

Soient G et G' deux groupes finis (notés multiplicativement). On considère un morphisme de groupes $f : G \to G'$.

1. Soit y un élément de G'. On suppose qu'il existe x_0 dans G tel que $f(x_0) = y$ (c'est-à dire que y est dans l'image $\operatorname{Im} f$ de f). Soit $x \in G$. Montrer que $f(x) = y$ si et seulement si $x_0^{-1}x \in \ker f$.

2. En déduire que si un élément y de G' est dans $\operatorname{Im} f$, alors y possède exactement d antécédents par f, où d désigne le cardinal de $\ker f$.

3. On note n le cardinal de G et m le cardinal de $\operatorname{Im} f$. En utilisant **2.**, montrer que $n = md$.

Exercice 4 (3 points).

Si n est un entier strictement positif, on note $\varphi(n)$ l'indicatrice d'Euler de n.

a) Calculer $\varphi(105)$ et $\varphi(24)$.

b) Soient m et n deux entiers strictement positifs avec $m > n$. Est-il possible que le cardinal de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ soit strictement plus grand que celui de $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$?