Université de Paris-Sud, année 2008/2009
Filière Math/Info-L2
Maths 209

Questions de contrôle continu (2-3 décembre 2008)

1) Donner l'ensemble des sous-groupes de $(\mathbf{Z}, +)$.

2) Si a et b sont deux entiers premiers entre eux, calculer le pgcd de $a+b$ et de ab.

3) Soit $(G, +)$ un groupe abélien noté additivement. Soit x un élément de G tel qu'il existe des entiers m, n premiers entre eux avec $mx = nx = 0$. Montrer que $x = 0$.

4) Trouver tous les couples d'entiers (x,y) tels que 7x+35y=7.

5) Trouver un entier x tel que x soit congru à 2 modulo 7 et x soit congru à 3 modulo 19.

6) Déterminer le nombre de générateurs du groupe additif $\mathbf{Z}/15\mathbf{Z}$.

7) Déterminer les solutions de $x^2 = 1$ dans $\mathbf{Z}/17\mathbf{Z}$.

8) Définir un groupe cyclique.

9) Est-ce que (S_3, o) est un groupe cyclique ?

10) Est-il vrai que si G est un groupe (noté multiplicativement)i, alors :
- pour tous x, y de G et tout entier m, on a $(xy)^m = x^m y^m$?
- pour tout x de G et tous entiers m, n, on a $x^{mn} = (x^m)^n$?

(Justifier les réponses).

11) Définir un morphisme de groupes.

12) Montrer que si $f : G \to G$ est un morphisme de groupes, alors l'application $g := f \circ f$ est un morphisme de groupes de G dans G.

13) Montrer qu'un morphisme de groupes $f : G \to H$ est injectif si et seulement si $\ker f$ est égal à $\{e\}$, où e est le neutre de G.

14) A-t-on un isomorphisme de groupes entre $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$?

15) Calculer l'ordre de $\bar{6}$ dans le groupe additif $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$.