Université de Paris-Sud, année 2008/2009
Filière Math/Info-L2
Maths 209

Questions de contrôle continu (14 octobre 2008)

1. Soit E un ensemble. Donner la définition d'une relation d'équivalence sur E.

2. Montrer que la relation définie par : "a est en relation avec b si et seulement si a divise b" est une relation d'ordre sur l'ensemble $\mathbf{N}^*$.

3. Énoncer le théorème d'existence et d'unicité de la décomposition en facteurs premiers d'un entier $n \geq 2$.

4. Donner la décomposition en facteurs premiers de 1970.

5. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence.

6. Donner le reste de la division euclidienne de 58473625 par 37.

7. Quel est le reste de la division euclidienne de 2176362 par 11 ?

8. Parmi les sous-ensembles de $\mathbf{R}$ suivants, dire (en justifiant) ceux qui sont des groupes pour l'addition : $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}^*$, $[-1, 1]$, l'ensemble des éléments pairs de $\mathbf{Z}$.

9. Montrer que $\mathbf{R}^*$ est un groupe pour la multiplication.

10. Donner (en justifiant) un exemple de groupe non abélien.

11. Montrer que si G est un groupe et H, K sont deux sous-groupes de G, alors l'intersection $H \cap K$ est aussi un sous-groupe de G.

12. Soit $(G, +)$ un groupe abélien. On note H le sous-ensemble de G constitué des éléments x tels qu'il existe $y \in G$ avec $x = 2y$. Montrer que H est un sous-groupe de G.