Le défaut d'approximation forte pour les groupes algébriques commutatifs

David Harari

Résumé. On établit une suite exacte décrivant l'adhérence des points rationnels d'un 1-motif dans ses points adéliques. On en déduit ensuite que le défaut d'approximation forte pour un groupe algébrique commutatif G est essentiellement mesuré par son groupe de Brauer algébrique via l'obstruction de Brauer-Manin entière.

Abstract. We give an exact sequence describing the closure of the set of rational points of a 1-motive in its adelic points. From this we deduce that for a commutative algebraic group, the defect of strong approximation is essentially controlled by its algebraic Brauer group, by means of the integral Brauer-Manin obstruction.

Mots-clés. Approximation forte, Groupe de Brauer, 1-motif.

Keywords. Strong approximation, Brauer group, 1-motive.

MSC : 14L15, 12G05, 11G09.

1. Introduction

1.1. Rappels et notations

Soit $M = [Y \to G]$ un 1-motif sur un corps de nombres k, dont on note M^* le 1-motif dual. Rappelons (cf. [3], section 1) qu'ici Y est un k-schéma en groupes (placé en degré -1) localement isomorphe pour la topologie étale à $\mathbf{Z}^r$ (avec $r \geq 0$) et G est une k-variété semi-abélienne (extension d'une k-variété abélienne A par un k-tore T) que l'on place en degré zéro. Le cas particulier le plus significatif pour cet article est celui où $M = T \simeq [0 \to T]$: alors $M^* = \widehat{T}[1] = [\widehat{T} \to 0]$, où $\widehat{T}$ est le module des caractères du tore T. Pour simplifier les notations, on note simplement $H^i(k,M)$ les groupes d'hypercohomologie $\mathbf{H}^i(k,M)$ du 1-motif M ; si par exemple $M = T$, on a donc $H^i(k,M) = H^i(k,T)$ et $H^i(k,M^*) = H^i(k,\widehat{T}[1]) = H^{i+1}(k,\widehat{T})$.

Soit Ω l'ensemble de toutes les places de k. On note $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de k et si v est une place non archimédienne de k, on note $\mathcal{O}_v$ l'anneau des entiers du complété k_v de k en v. Si S est un ensemble fini de places de k (contenant les places archimédiennes), on note $\mathcal{O}_S$ le sous-anneau de k constitué des entiers en dehors de S. On note aussi $\mathbf{A}_k$ le groupe des adèles de k et

$$\mathbf{A}_{\mathcal{O}} := \prod_{v \in \Omega} \mathcal{O}_v$$

le groupe des adèles entiers de k puis

$$\mathbf{A}_S = \prod_{v \in S} k_v \times \prod_{v \notin S} \mathcal{O}_v$$

le groupe des adèles entiers en dehors de S, avec la convention que $\mathcal{O}_v = k_v$ si v est une place archimédienne.

On choisit un ouvert non vide $U = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_S)$ de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}$ tel que M s'étende en un 1-motif $\mathcal{M} = [\mathcal{Y} \to \mathcal{G}]$ au-dessus de U. On note A et T (resp. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{T}$) la k-variété abélienne et le k-tore correspondant à G (resp. le U-schéma abélien et le U-tore correspondant à $\mathcal{G}$).

On note $\mathbf{P}^0(M)$ (resp. $\mathbf{P}^0_S(M)$) le produit restreint des $H^0(k_v, M)$ (resp. des $H^0(k_v, M)$ pour v non dans S), relativement aux $H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M})$, avec la convention que *pour v archimédienne, $H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M}) = H^0(k_v, M)$ désigne le groupe modifié $\widehat{H}^0(k_v, M)$ de Tate* défini dans [3], p. 103, et aussi que pour $v \in S$ finie, $H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M})$ signifie $H^0(k_v, M)$. On pose aussi $\mathcal{P}^0_S(M) := \prod_{v \in S} H^0(k_v, M) \times \prod_{v \notin S} H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M})$. Ainsi $\mathcal{P}^0_S(M)$ est un sous-groupe de $\mathbf{P}^0(M)$, dont la projection sur le produit restreint "tronqué" $\mathbf{P}^0_S(M)$ n'est autre que $\prod_{v \notin S} H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M})$.

On appelle $Ш^1(M)$ le noyau de l'application diagonale $H^1(k, M) \to \prod_{v \in \Omega} H^1(k_v, M)$. En particulier $Ш(A) := Ш^1(A)$ est le *groupe de Tate-Shafarevitch* de la variété abélienne A. Il est fortement conjecturé que ce groupe est toujours fini. On note aussi $Ш^1_\omega(M)$ le sous-groupe de $H^1(k, M)$ constitué des éléments dont la restriction à $H^1(k_v, M)$ est nulle pour presque toute place v.

Pour tout groupe topologique B, on note $B^\wedge$ le complété de B pour la topologie induite par les sous-groupes ouverts d'indice fini. En particulier si B est discret, alors $B^\wedge$ est simplement la complétion profinie de B (et c'est également le cas pour $B = H^0(k_v, M)$ avec $v \in \Omega$ via [3], remarque 2.4). On note également $B^D := \operatorname{Hom}_{\text{cont}}(B, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ le dual de B. Si B est compact et complètement discontinu (i.e. profini), on a $B^\wedge = B$.

Si X est une k-variété algébrique gémétriquement intègre, on note $\mathrm{Br}\, X$ son groupe de Brauer cohomologique, et on pose $\mathrm{Br}_1 X = \ker[\mathrm{Br}\, X \to \mathrm{Br}\, \overline{X}]$, où $\overline{X} = X \times_k \bar{k}$ ($\bar{k}$ désignant une clôture algébrique de k).

1.2. Enoncé des résultats principaux

Notre premier objectif est d'établir une suite exacte dans l'esprit du théorème 1.2. de [4] (lequel, dans le cas des tores, remonte à [10]), mais qui fait intervenir une obstruction à l'approximation forte au lieu de l'approximation faible. Plus précisément, on a (voir théorème 2) :

Theorème. *Soit M un 1-motif sur k, de variété abélienne associée A. On suppose que $Ш(A)$ est fini et on note $\overline{H^0(k,M)}$ l'adhérence de $H^0(k,M)$ dans le produit restreint $\mathbf{P}^0(M)$. Alors on a une suite exacte*

$$0 \to \overline{H^0(k,M)} \to \mathbf{P}^0(M) \to H^1(k,M^*)^D \to Ш^1(M) \to 0$$

La flèche $\mathbf{P}^0(M) \to H^1(k,M^*)^D$ vient de la dualité locale ([3], section 2) et la flèche $H^1(k,M^*)^D \to Ш^1(M)$ de la dualité entre les groupes finis $Ш^1(M)$ et $Ш^1(M^*)$ ([3], corollaire 4.9). Ainsi l'obstruction à la propriété d'approximation forte pour le 1-motif M est mesurée par le groupe $\ker[H^1(k,M^*)^D \to Ш^1(M)]$ (qui est d'indice fini dans $H^1(k,M^*)^D$). Le cas $M = \mathbf{G}_m$ est très proche d'un énoncé classique de théorie du corps de classes (voir [8], corollaire 8.3.21. page 464) mais dans le cas d'un tore quelconque, l'énoncé semble déjà nouveau. Nous en établirons également une variante permettant d'obtenir un énoncé d'approximation pour les tores (théorème 3) un peu similaire aux résultats de la section 4 de [7].

Dans la dernière section de ce texte, nous démontrerons le résultat suivant (voir théorème 4), qui fait le lien entre l'obstruction de Manin entière (introduite dans [1], voir la section 4. pour plus de détails) et l'approximation forte pour une variété semi-abélienne.

Theorème. *Soit $\mathcal{X}$ un $\mathcal{O}$-schéma plat dont la fibre générique X est un espace principal homogène sous une variété semi-abélienne G. On suppose que le groupe de Tate-Shafarevitch $Ш(A)$ du quotient abélien A de G est fini.*
Soit S un ensemble fini de places de k, contenant les places archimédiennes. On suppose qu'il existe un point adélique $(P_v) \in \mathcal{X}(\mathbf{A}_S)$ qui est orthogonal à $\mathrm{Br}_1 X$ pour l'accouplement de Brauer-Manin. Alors il existe un point de $\mathcal{X}(\mathcal{O}_S)$ qui est arbitrairement proche de P_v pour $v \in S$ non archimédienne, et dans la même composante connexe de $X(k_v)$ que P_v pour v réelle. En particulier, si on suppose de plus $(P_v) \in \mathcal{X}(\mathbf{A}_{\mathcal{O}})$, alors $\mathcal{X}(\mathcal{O}) \neq \emptyset$.

Notons que l'énoncé analogue pour l'approximation faible est démontré dans [2] (voir aussi [4], théorème 6.1.).

2. Une suite exacte de type Cassels-Tate associée à un 1-motif

Dans toute cette section, les notations sont celles du début de 1.1.

Lemme 1 *Soit $v \notin S$. On a $H^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{G}) = 0$. Pour $i = 0$ ou $i = 1$, les applications $H^i(\mathcal{O}_v, \mathcal{Y}) \to H^i(k_v, Y)$ (induites par l'inclusion $\mathcal{O}_v \to k_v$) sont des isomorphismes.*

Démonstration : Soit $\mathbf{F}_v$ le corps résiduel de $\mathcal{O}_v$ et $\widetilde{G}$ la réduction de $\mathcal{G}$ modulo v. On a $H^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{G}) = H^1(\mathbf{F}_v, \widetilde{G})$ ([5], remarque 3.11.a). D'autre part, comme $\widetilde{G}$ est connexe, on a $H^1(\mathbf{F}_v, \widetilde{G}) = 0$ par le théorème de Lang, d'où la première assertion. La seconde assertion pour $i = 0$ résulte de ce que $\mathcal{Y}$ est localement constant pour la topologie étale. Pour $i = 1$, elle vient de [3], p 105.

$\square$

Soit $v \notin S$. Alors $H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{G}) = \mathcal{G}(\mathcal{O}_v)$ s'injecte dans $G(k_v)$ et d'autre part le lemme précédent dit que $H^i(\mathcal{O}_v, \mathcal{Y})$ est isomorphe à $H^i(k_v, Y)$ pour $i = 0, 1$; on voit donc par dévissage que l'application naturelle $H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M}) \to H^0(k_v, M)$ est injective, ce qui permet de noter encore $H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M})$ l'image de $H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M})$ dans $H^0(k_v, M)$. Notons que le groupe $H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M})$ est quasi-compact (il possède un sous-groupe ouvert d'indice fini qui est un quotient de $\mathcal{G}(\mathcal{O}_v)$), mais pas séparé en général.

On pose[1] $H^0_r(k_v, M) = H^0(k_v, M)/H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M})$ (avec une notation similaire si M est remplacé par T) et on équipe ce groupe de la topologie quotient (pour la définition de la topologie sur $H^0(k_v, M)$, voir [3], section 2).

Lemme 2 *Soit $v \notin S$. Alors le groupe $H^0_r(k_v, M)$ est isomorphe à $H^0_r(k_v, T)$. C'est un groupe discret (autrement dit : $H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M})$ est un sous-groupe ouvert de $H^0(k_v, M)$).*

Notons qu'en particulier le groupe $H^0_r(k_v, M)$ est nul si $M = Y[1]$ ou $M = A$. Rappelons aussi qu'un sous-groupe d'un groupe topologique est ouvert si et seulement si le quotient topologique correspondant est un groupe discret.

[1] L'indice $_r$ signifie ici "ramifié" ; je remercie le rapporteur pour cette suggestion de notation.

Démonstration : D'après le lemme 1, on a $H^1(\mathcal{O}_v,\mathcal{G})=0$. On a alors un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} H^0(\mathcal{O}_v,\mathcal{Y}) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{O}_v,\mathcal{G}) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{O}_v,\mathcal{M}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}_v,\mathcal{Y}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ H^0(k_v,Y) & \longrightarrow & H^0(k_v,G) & \longrightarrow & H^0(k_v,M) & \longrightarrow & H^1(k_v,Y) & & \end{array}$$

La première et la quatrième flèche verticale sont des isomorphismes via le lemme 1. Par chasse au diagramme on est ramené au cas $M=G$. Comme $H^1(\mathcal{O}_v,\mathcal{T})=0$ (lemme 1), on a un autre diagramme commutatif exact :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(\mathcal{O}_v,\mathcal{T}) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{O}_v,\mathcal{G}) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{O}_v,\mathcal{A}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^0(k_v,T) & \longrightarrow & H^0(k_v,G) & \longrightarrow & H^0(k_v,A) & & \end{array}$$

La flèche verticale de droite est un isomorphisme par propreté de A. Une nouvelle chasse au diagramme nous donne alors l'isomorphisme voulu.

Enfin, $H^0(\mathcal{O}_v,\mathcal{T})$ est un sous-groupe ouvert de $H^0(k_v,T)$ parce que $\mathcal{O}_v$ est un sous-groupe ouvert de k_v (prendre par exemple des équations affines de $\mathcal{T}$; cf aussi [9] p. 134), ce qui achève la démonstration du lemme.

□

Lemme 3 *L'image de $H^0(k,M)$ dans $\mathbf{P}^0_S(M)/\prod_{v\notin S}H^0(\mathcal{O}_v,\mathcal{M})$ est d'indice fini.*

Noter que le groupe $\mathbf{P}^0_S(M)/\prod_{v\notin S}H^0(\mathcal{O}_v,\mathcal{M})$ est isomorphe au groupe $\bigoplus_{v\notin S}H^0_r(k_v,M)$, qui est discret d'après le lemme 2. D'autre part, pour $M=\mathbf{G}_m$, le lemme 3 résulte juste de la finitude du groupe des classes d'idéaux de $\mathcal{O}$.

Démonstration : On a $H^1(\mathcal{O}_v,\mathcal{G})=0$ via le lemme 1, ce qui donne un diagramme commutatif exact :

$$\begin{array}{ccccccc} \prod_{v\notin S}H^0(\mathcal{O}_v,\mathcal{G}) & \longrightarrow & \prod_{v\notin S}H^0(\mathcal{O}_v,\mathcal{M}) & \longrightarrow & \prod_{v\notin S}H^1(\mathcal{O}_v,\mathcal{Y}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbf{P}^0_S(G) & \longrightarrow & \mathbf{P}^0_S(M) & \longrightarrow & \prod_{v\notin S}H^1(k_v,Y) & & \end{array}$$

Comme on l'a déjà vu, la flèche verticale de droite est un isomorphisme ; de ce fait $\mathbf{P}^0_S(G)/\prod_{v\notin S}H^0(\mathcal{O}_v,\mathcal{G})$ se surjecte sur $\mathbf{P}^0_S(M)/\prod_{v\notin S}H^0(\mathcal{O}_v,\mathcal{M})$, ce qui permet de se ramener au cas $M=G$.

On écrit alors (en utilisant $H^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{T}) = 0$) le diagramme commutatif exact

$$\begin{array}{ccccccc}
\prod_{v \notin S} H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{T}) & \longrightarrow & \prod_{v \notin S} H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \prod_{v \notin S} H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{A}) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathbf{P}^0_S(T) & \longrightarrow & \mathbf{P}^0_S(G) & \longrightarrow & \prod_{v \notin S} H^0(k_v, A) & &
\end{array}$$

et la flèche verticale de droite est encore un isomorphisme. On est ainsi ramené au cas $M = T$, auquel cas le résultat vient de la finitude du groupe des classes d'idéaux d'un tore ([9], Th. 5.1).

□

Proposition 1 *On suppose que les cardinaux des groupes finis $H^1(k, Y)$ et* $\ker[H^1(U, \mathcal{T}) \to H^1(k, T)]$ *sont premiers entre eux (ex. $Y = 0$). Alors la suite de groupes discrets*

$$0 \to H^0(U, \mathcal{M}) \to H^0(k, M) \to \bigoplus_{v \notin S} H^0_r(k_v, M)$$

est exacte.

Notons que pour U assez petit l'application $H^1(U, \mathcal{T}) \to H^1(k, T)$ est injective (voir [3], Corrigenda) et l'hypothèse sur les cardinaux est alors vérifiée.

Démonstration : L'injectivité de $H^0(U, \mathcal{M}) \to H^0(k, M)$ est démontrée dans [3], Prop. 4.1., (3). Le fait qu'on ait un complexe est clair car pour $v \notin S$, la flèche $H^0(U, \mathcal{M}) \to H^0(k, M)$ se factorise par $H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M})$. Il reste donc à démontrer l'exactitude au milieu.

Montrons d'abord que le cardinal de $H^1(U, \mathcal{Y})$ est premier avec celui de $\ker[H^1(U, \mathcal{G}) \to H^1(k, G)]$. Comme $H^1(U, \mathcal{A})$ s'injecte dans $H^1(k, A)$ ([6], Lemme II.5.5) et $H^0(U, \mathcal{A}) \simeq H^0(k, A)$, le noyau de $H^1(U, \mathcal{T}) \to H^1(k, T)$ se surjecte sur celui de $H^1(U, \mathcal{G}) \to H^1(k, G)$. Mais la flèche $H^1(U, \mathcal{Y}) \to H^1(k, Y)$ est un isomorphisme (via [3], diagramme p. 112) donc l'hypothèse faite sur le cardinal de $H^1(k, Y)$ donne le résultat voulu. Il en résulte que $\mathrm{Im}\,[H^1(U, \mathcal{Y}) \to H^1(U, \mathcal{G})]$ s'injecte dans $H^1(k, G)$.

Maintenant, en utilisant le lemme 2, on obtient un diagramme commutatif, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
H^0(U,\mathcal{G}) & \longrightarrow & H^0(U,\mathcal{M}) & \longrightarrow & H^1(U,\mathcal{Y}) & \longrightarrow & H^1(U,\mathcal{G}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^0(k,G) & \longrightarrow & H^0(k,M) & \longrightarrow & H^1(k,Y) & \longrightarrow & H^1(k,G) \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
\bigoplus_{v\notin S} H^0_r(k_v,G) & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{v\notin S} H^0_r(k_v,M) & & & &
\end{array}$$

Une chasse au diagramme permet alors de se ramener au cas $M = G$. Or, dans ce cas le résultat est clair car un k-point de G qui s'annule dans $\bigoplus_{v\notin S} H^0_r(k_v,G)$ correspond à un morphisme $\operatorname{Spec} k \to \mathcal{G}$ qui s'étend en tout point de codimension 1 du schéma de Dedekind U, donc sur U.

□

Corollaire 1 *On suppose que les cardinaux de $H^1(k,Y)$ et $\ker[H^1(U,\mathcal{T}) \to H^1(k,T)]$ sont premiers entre eux. Alors la suite*

$$H^0(U,\mathcal{M})^\wedge \to H^0(k,M)^\wedge \to [\bigoplus_{v\notin S} H^0_r(k_v,M)\,]^\wedge$$

est exacte.

Démonstration : D'après le lemme 3, l'image I de $H^0(k,M)$ dans le groupe discret $\bigoplus_{v\notin S} H^0_r(k_v,M)$ est d'indice fini, ce qui implique que l'application induite $I^\wedge \to [\bigoplus_{v\notin S} H^0_r(k_v,M)]^\wedge$ est injective. D'autre part la suite

$$H^0(U,\mathcal{M})^\wedge \to H^0(k,M)^\wedge \to I^\wedge \to 0$$

est exacte d'après la proposition 1 et [3], appendice, (2). Le corollaire en résulte.

□

Rappelons ([3], théorème 2.3) qu'on a un accouplement

$$(.,.)_v : H^0(k_v,M) \times H^1(k_v,M^*) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

qui met en dualité parfaite le groupe discret $H^1(k_v,M^*)$ et le groupe profini $H^0(k_v,M)^\wedge$. Pour $v \notin S$, on sait aussi ([3], début de la preuve du théorème 2.10) que cet accouplement s'annule sur $H^0(\mathcal{O}_v,\mathcal{M}) \times H^1(\mathcal{O}_v,\mathcal{M}^*)$. Ceci permet de définir une flèche θ de $\mathbf{P}^0(M)$ dans le dual $H^1(k,M^*)^D$ de $H^1(k,M^*)$ par la formule

$$\theta(x).a = \sum_{v\in\Omega} (x_v,a_v)_v \quad , \ x \in \mathbf{P}^0(M) \quad , \ a \in H^1(k,M^*)$$

où x_v est la composante de x en v et a_v la restriction de a à $H^1(k_v, M^*)$ (qui est dans $H^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{M}^*)$ pour presque toute place v). On a de même une flèche (notée $\theta^\wedge$) de $\mathbf{P}^0(M)^\wedge$ dans $H^1(k, M^*)^D$.

Proposition 2 *Supposons que les cardinaux de $H^1(k, Y)$ et $\ker[H^1(U, \mathcal{T}) \to H^1(k, T)]$ soient premiers entre eux et que le groupe de Tate-Shafarevitch $Ш(A)$ de A soit fini. Alors on a une suite exacte de groupes profinis*

$$H^0(U, \mathcal{M})^\wedge \to \mathcal{P}^0_S(M)^\wedge \xrightarrow{\theta} H^1(k, M^*)^D$$

Démonstration : On écrit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
H^0(U, \mathcal{M})^\wedge & \longrightarrow & \mathcal{P}^0_S(M)^\wedge & \xrightarrow{\theta^\wedge} & H^1(k, M^*)^D \\
\downarrow & & \downarrow i & & \downarrow \| \\
H^0(k, M)^\wedge & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(M)^\wedge & \xrightarrow{\theta^\wedge} & H^1(k, M^*)^D \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
[\bigoplus_{v \notin S} H^0_r(k_v, M)]^\wedge & \xrightarrow{=} & [\bigoplus_{v \notin S} H^0_r(k_v, M)]^\wedge & &
\end{array}$$

La première colonne est exacte d'après le corollaire 1, la deuxième ligne est exacte d'après le théorème 5.6 de [3] (ce qui implique déjà que la première ligne est un complexe), et la colonne du milieu est un complexe car c'est la complétion d'une suite exacte. Par chasse au diagramme, il suffit, pour montrer l'exactitude au milieu de la première ligne, de montrer que la flèche $i : \mathcal{P}^0_S(M)^\wedge \to \mathbf{P}^0(M)^\wedge$ est injective.

La preuve du lemme 5.3. de [3] donne que pour tout $n > 0$, la flèche

$$\mathcal{P}^0_S(M)/n \to \prod_{v \in \Omega} H^0(k_v, M)/n$$

est injective. A fortiori la flèche

$$\mathcal{P}^0_S(M)/n \to \mathbf{P}^0(M)/n$$

est injective. Or $\mathcal{P}^0_S(M)^\wedge$ est la limite projective des $\mathcal{P}^0_S(M)/n$ car d'une part la complétion commute avec le produit, d'autre part on a

$$H^0(k_v, M)^\wedge = \varprojlim_n H^0(k_v, M)/n$$

pour $v \in S$ et

$$H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M})^\wedge = \varprojlim_n H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M})/n$$

pour $v \notin S$ comme on le voit par dévissage en utilisant le fait que $H^0(k_v, T)/n$ et $H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{T})/n$ sont finis, $H^0(k_v, A) = H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{A})$ est profini, et $H^1(k_v, Y) = H^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{Y})$ est fini ([6], corollaire I.2.3). En passant à la limite projective, on obtient alors que $\mathcal{P}^0_S(M)^\wedge$ s'injecte dans la limite projective $\mathbf{P}^0(M)_\wedge$ des $\mathbf{P}^0(M)/n$. On conclut avec l'injectivité de la flèche $\mathbf{P}^0(M)_\wedge \to \mathbf{P}^0(M)^\wedge$ ([3], proposition 5.4 et diagramme (13)).

□

Soit $\overline{H^0(U, \mathcal{M})}$ l'adhérence (pour la topologie produit) de $H^0(U, \mathcal{M}) = H^0(\mathcal{O}_S, \mathcal{M})$ dans $\mathcal{P}^0_S(M) = \prod_{v \in S} H^0(k_v, M) \times \prod_{v \notin S} H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M})$.

Théorème 1 *Sous les hypothèses de la proposition 2, on a une suite exacte*

$$0 \to \overline{H^0(U, \mathcal{M})} \to \prod_{v \in S} H^0(k_v, M) \times \prod_{v \notin S} H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M}) \xrightarrow{\theta} H^1(k, M^*)^D$$

Démonstration : La méthode est très similaire à celle de [4], proposition 5.3. Le fait que la suite soit un complexe est clair par fonctorialité via le théorème 5.6 de [3]. Soit C le quotient topologique de $\mathcal{P}^0_S(M)$ par $\overline{H^0(U, \mathcal{M})}$. Le groupe C est séparé car $\overline{H^0(U, \mathcal{M})}$ est fermé dans $\mathcal{P}^0_S(M)$. Montrons que C s'injecte dans sa complétion profinie $C^\wedge$. D'après [3], Appendice, il suffit de vérifier que C est engendré par une partie compacte. Or pour v dans S, le groupe $H^0(k_v, M)$ a un sous-groupe d'indice fini qui est un quotient topologique de $G(k_v)$, lui-même engendré par une partie compacte via [3], lemme 2.2 ; d'autre part pour $v \notin S$, le groupe $H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M})$ est déjà quasi-compact. Ainsi C est bien engendré par une partie compacte.

On écrit alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \overline{H^0(U, \mathcal{M})} & \longrightarrow & \mathcal{P}^0_S(M) & \longrightarrow & C \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & (\overline{H^0(U, \mathcal{M})})^\wedge & \longrightarrow & \mathcal{P}^0_S(M)^\wedge & \longrightarrow & C^\wedge \end{array}$$

La première ligne est exacte par définition de C et la deuxième ligne est un complexe par fonctorialité. Soit alors x un élément de $\mathcal{P}^0_S(M)$ dont l'image dans $H^1(k, M^*)^D$ est nulle. D'après la proposition 2, l'image y de x dans $\mathcal{P}^0_S(M)^\wedge$ provient de $H^0(U, \mathcal{M})^\wedge$, donc a fortiori de $(\overline{H^0(U, \mathcal{M})})^\wedge$ vu que la flèche $H^0(U, \mathcal{M})^\wedge \to \mathcal{P}^0_S(M)^\wedge$ se factorise par une flèche $H^0(U, \mathcal{M})^\wedge \to (\overline{H^0(U, \mathcal{M})})^\wedge$. Ainsi, l'image de y dans $C^\wedge$ est nulle et on conclut avec l'injectivité de $C \to C^\wedge$ et l'exactitude de la première ligne.

□

Remarque : Il est facile de voir directement à partir de la proposition 1 que le corollaire 1 reste valable en remplaçant la complétion $^\wedge$ par la "complétion partielle" $_\wedge = \varprojlim_n ./n$. On obtient alors l'analogue (d'ailleurs plus simple à démontrer) de la proposition 2 avec cette complétion partielle grâce à la suite exacte (17) de [3]. Cela suffit pour prouver le théorème 1 par la même méthode, tout en évitant les complications topologiques.

Lemme 4 *Les groupes* $\mathbf{P}^0(M)$ *et* $\mathbf{P}^0(M)^\wedge$ *ont même image dans* $H^1(k, M^*)^D$ *par les applications respectives* θ, $\theta^\wedge$.

Démonstration : On procède par dévissage. Notons $\mathbf{P}^1(G)$ le produit restreint (pour $v \in \Omega$) des $H^1(k_v, G)$ relativement aux $H^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{G})$ (on emploiera de même les notations $\mathbf{P}^1(Y)$ et $\mathbf{P}^1(T)$). On a un diagramme commutatif exact

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{P}^0(G) & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(M) & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(Y) & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(G) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \| & & \downarrow \| \\
\mathbf{P}^0(G)^\wedge & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(M)^\wedge & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(Y) & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(G)
\end{array}$$

En effet, $\mathbf{P}^1(Y) = \prod_{v\in\Omega} H^1(k_v, Y)$ est déjà compact et la complétion de la première ligne reste donc exacte en vertu de [3], appendice. Ainsi $\mathbf{P}^0(M)$ se surjecte sur le conoyau de $\mathbf{P}^0(G)^\wedge \to \mathbf{P}^0(M)^\wedge$ et on est ramené à $M = G$. On se ramène ensuite par le même argument au cas $M = T$ et $M^* = Y^*[1]$ en utilisant le diagramme commutatif exact

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{P}^0(T) & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(G) & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(A) & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(T) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \| & & \downarrow \| \\
\mathbf{P}^0(T)^\wedge & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(G)^\wedge & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(A) & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(T)
\end{array}$$

vu que $\mathbf{P}^0(A) = \prod_{v\in\Omega} H^0(k_v, A)$ est compact. Maintenant on observe que $\mathbf{P}^0(T)/\overline{H^0(k,T)}$ est compact en vertu de la finitude du groupe des classes d'idéaux d'un tore (noter ici l'importance d'avoir considéré les H^0 modifiés à la Tate aux places archimédiennes). De ce fait l'image de $\mathbf{P}^0(T)$ dans le groupe profini $H^1(k, M^*)^D = H^2(k, Y^*)^D$ est fermée ; elle coïncide donc (par densité) avec l'image de $\mathbf{P}^0(T)^\wedge$.

□

Théorème 2 *Soit* M *un* 1*-motif sur* k*. On suppose que* $Ш(A)$ *est fini et on note* $\overline{H^0(k,M)}$ *l'adhérence de* $H^0(k,M)$ *dans le produit restreint* $\mathbf{P}^0(M)$*. Alors on a une suite exacte*

$$0 \to \overline{H^0(k,M)} \to \mathbf{P}^0(M) \to H^1(k, M^*)^D \to Ш^1(M) \to 0$$

Ici la flèche $H^1(k, M^*)^D \to Ш^1(M)$ est induite par la dualité parfaite entre les groupes finis $Ш^1(M)$ et $Ш^1(M^*)$ ([3], Cor. 4.9).

Démonstration : On commence par fixer un ensemble fini S de places tel que les hypothèses du théorème 1 soient satisfaites pour tout ouvert U de $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_S)$ (cf. commentaire après la proposition 1). Les trois premiers termes de la suite exacte s'obtiennent alors en appliquant le théorème 1 aux ensembles finis de places $T \supset S$, et en faisant la limite inductive sur T. D'après le théorème 5.6 de [3], la suite

$$\mathbf{P}^0(M)^\wedge \to H^1(k, M^*)^D \to Ш^1(M) \to 0$$

est exacte. Comme $\mathbf{P}^0(M)$ et $\mathbf{P}^0(M)^\wedge$ ont même image dans $H^1(k, M^*)^D$ d'après le lemme précédent, le résultat est démontré.

□

Remarques : –On comparera avec le théorème 1.2 de [4] : ici on considère l'adhérence de $H^0(k, M)$ pour une topologie de *produit restreint* (et non plus de produit direct), c'est-à-dire que le groupe $H^1(k, M^*)^D$ mesure le défaut d'approximation forte (tandis que le défaut d'approximation faible était mesuré par le groupe plus petit $Ш^1_\omega(M^*)^D$). Bien entendu, si $M = A$ est une variété abélienne, il n'y a pas lieu de distinguer entre les deux résultats et on retrouve la classique suite exacte duale de Cassels-Tate ([6], théorème I.6.26).

–Le fait d'avoir considéré les $\widehat{H}^0$ aux places archimédiennes entraîne que même si M est un tore, l'image de $H^0(k, M)$ dans $\mathbf{P}^0(M)$ n'est pas toujours fermée. Par exemple si $M = \mathbf{G}_m$ et $k = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$, alors le sous-groupe H de $\mathbf{P}^0(\mathbf{G}_m)$ engendré par l'image de $(1 + \sqrt{2})$ et celle de $\{\pm 1\}$ est isomorphe à $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2$; d'après le théorème de Baire, le groupe H ne peut pas être compact car il est infini et dénombrable. Pourtant H est l'intersection de l'image de $H^0(k, \mathbf{G}_m) = k^*$ avec le compact de $\mathbf{P}^0(\mathbf{G}_m)$ constitué des éléments dont toutes les composantes aux places v non archimédiennes sont dans $\mathcal{O}_v^*$. Ainsi l'image de k^* dans $\mathbf{P}^0(\mathbf{G}_m)$ ne peut pas être fermée.

–Dans le cas $M = \mathbf{G}_m$, le théorème 2 est essentiellement équivalent au cas où S contient toutes les places du corollaire 8.3.21 p. 464 de [8]. Le théorème 1 est malgré les apparences d'une nature un peu différente (et semble être nouveau même pour $G = \mathbf{G}_m$).

3. Une variante

Le but de cette section est de démontrer une variante du théorème 1 qui fait intervenir deux ensembles finis de places, et d'en déduire un énoncé d'approximation pour les tores. On considère toujours $M = [Y \to G]$ un 1-motif sur k, qui s'étend en un 1-motif $\mathcal{M} = [\mathcal{Y} \to \mathcal{G}]$ au-dessus de $U = \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_S)$. Si v est une place non dans S, on note $H^1_{\mathrm{nr}}(k_v, M)$ l'image de $H^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{M})$ dans $H^1(k_v, M)$ (cf. [3], section 2). Rappelons qu'on a supposé que S contenait toutes les places archimédiennes de k.

Soit S' un ensemble fini de places de k avec $S \cap S' = \emptyset$. On note $\overline{H^0(\mathcal{O}_S, \mathcal{M})}^{S'}$ l'adhérence de $H^0(\mathcal{O}_S, \mathcal{M}) = H^0(U, \mathcal{M})$ dans $\prod_{v \in S'} H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M})$. On note aussi $H^1_{S,S'}(k, M^*)$ l'ensemble des α de $H^1(k, M^*)$ vérifiant $\alpha_v = 0$ pour $v \in S$ et $\alpha_v \in H^1_{\mathrm{nr}}(k_v, M^*)$ pour $v \notin (S \cup S')$. Enfin $H^1_{S,\Omega}(k, M^*)$ désigne l'ensemble des α de $H^1(k, M^*)$ vérifiant $\alpha_v = 0$ pour $v \in S$ et $\alpha_v \in H^1_{\mathrm{nr}}(k_v, M^*)$ pour $v \notin S$.

Lemme 5 *On garde les hypothèses de la proposition 2. Posons*

$$I = \prod_{v \in S} H^0(k_v, M)^\wedge \times \prod_{v \in S'} H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M}) \times \prod_{v \notin (S \cup S')} H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M})^\wedge$$

et notons abusivement $\overline{H^0(U, \mathcal{M})}$ l'adhérence de l'image de $H^0(U, \mathcal{M})$ dans I. Alors on a une suite exacte

$$0 \to \overline{H^0(U, \mathcal{M})} \to I \xrightarrow{\theta} H^1(k, M^*)^D$$

Notons que comme on va s'intéresser ensuite à une propriété d'approximation aux places de S', on n'a besoin ici d'enlever les completions pour I que dans le facteur du milieu.

Démonstration : La preuve est tout à fait analogue (en plus simple) à celle du théorème 1, en remplaçant $\mathcal{P}^0_S(M)$ par I (qui est quasi-compact, ce qui fait que le quotient de I par $\overline{H^0(U, \mathcal{M})}$ est déjà profini).

□

Proposition 3 *On garde les hypothèses et notations de la proposition 2. Soit S' un ensemble fini de places de k avec $S \cap S' = \emptyset$. Alors on a une suite exacte*

$$0 \to \overline{H^0(\mathcal{O}_S, \mathcal{M})}^{S'} \to \prod_{v \in S'} H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M}) \xrightarrow{\varphi} H^1_{S,S'}(k, M^*)^D \to H^1_{S,\Omega}(k, M^*)^D \to 0 \tag{1}$$

où l'application φ est définie par

$$\varphi((x_v)).a = \sum_{v \in S'} (x_v, a_v)_v \quad , \ (x_v) \in \prod_{v \in S'} H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M}) \quad , \ a \in H^1_{S,S'}(k, M^*)^D$$

Démonstration : On note d'abord que le quotient topologique

$$\prod_{v \in S'} H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M}) / \overline{H^0(\mathcal{O}_S, \mathcal{M})}^{S'}$$

est séparé et quasi-compact, donc compact. De ce fait $\prod_{v \in S'} H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M})$ et $\prod_{v \in S'} H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M})^\wedge$ ont même image dans $H^1_{S,S'}(k, M^*)^D$. On obtient l'exactitude des trois derniers termes de (1) avec le théorème 2.10 de [3], en dualisant la suite (qui est exacte par définition) :

$$0 \to H^1_{S,\Omega}(k, M^*) \to H^1_{S,S'}(k, M^*) \to \prod_{v \in S'} H^1(k_v, M^*)/H^1_{\mathrm{nr}}(k_v, M^*)$$

D'autre part les trois premiers termes de (1) forment un complexe vu que l'accouplement local entre $H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M})$ et $H^1_{\mathrm{nr}}(k_v, M^*)$ est trivial.

Soit donc $(x_v)_{v \in S'}$ dans $\prod_{v \in S'} H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M})$, d'image nulle par φ. D'après le lemme 5, il suffit de montrer qu'il existe une famille

$$(x_v) \in \prod_{v \notin (S \cup S')} H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M})^\wedge$$

et une famille

$$(x_v) \in \prod_{v \in S} H^0(k_v, M)^\wedge$$

vérifiant : l'image de la famille $(x_v)_{v \in \Omega}$ dans $H^1(k, M^*)^D$ (par la flèche θ du lemme 5) est nulle.

Soit N le dual du groupe

$$\bigoplus_{v \in S} H^1(k_v, M^*) \oplus \bigoplus_{v \notin (S \cup S')} (H^1(k_v, M^*)/H^1_{\mathrm{nr}}(k_v, M^*))$$

et

$$N' := \prod_{v \in S} H^0(k_v, M)^\wedge \times \prod_{v \notin (S \cup S')} H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M})^\wedge$$

On a alors un diagramme commutatif dont les colonnes sont exactes :

$$\begin{array}{ccc}
N' & \xrightarrow{\psi} & N \\
\downarrow & & \downarrow \\
\prod_{v \in S'} H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M}) \times N' & \xrightarrow{\theta} & H^1(k, M^*)^D \\
\downarrow & & \downarrow \\
\prod_{v \in S'} H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M}) & \xrightarrow{\varphi} & H^1_{S,S'}(k, M^*)^D
\end{array}$$

Comme ψ est un isomorphisme par dualité locale, on conclut par chasse au diagramme, en considérant l'élément de

$$I = \prod_{v \in S'} H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{M}) \times N'$$

obtenu en complétant $(x_v)_{v \in S'}$ avec des zéros.

$\square$

Soient maintenant T un k-tore de module des caractères Y, et S_0 un ensemble fini de places de k (contenant les places archimédiennes) tel que les 1-motifs $M = [0 \to T]$ et $M^* = [Y \to 0]$ s'étendent en des 1-motifs $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^* = [\mathcal{Y} \to 0]$ au-dessus de $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{S_0})$. On note $Ш^2_\omega(Y)$ l'ensemble des éléments α de $H^2(k, Y)$ tels que la localisation $\alpha_v \in H^2(k_v, Y)$ soit nulle pour presque toute place v de k.

Théorème 3 *Avec les notations ci-dessus, on suppose que* $Ш^2_\omega(Y) = 0$*. Soit* S' *un ensemble fini de places de* k *ne rencontrant pas* S_0*. Alors il existe un ensemble fini de places* S *avec* $S \supset S_0$ *et* $S \cap S' = \emptyset$*, vérifiant :* $T(\mathcal{O}_S)$ *est dense dans* $\prod_{v \in S'} T(\mathcal{O}_v)$*.*

Démonstration : La structure des groupes de Lie p-adiques compacts donne qu'il existe un ensemble fini Σ de nombres premiers tels que pour $\ell \notin \Sigma$, le groupe $\prod_{v \in S'} T(\mathcal{O}_v)$ soit ℓ-divisible. D'après la proposition 3, il suffit alors de trouver S tel que la ℓ-torsion $H^2_{S,S'}(k, Y)[\ell]$ du groupe $H^2_{S,S'}(k, Y)$ soit nulle pour tout ℓ de Σ. En utilisant la suite exacte de $\mathcal{O}_{S' \cup S_0}$-schémas en groupes lisses

$$0 \to \mathcal{Y} \xrightarrow{.l} \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}/\ell \to 0$$

on voit que $H^1(\mathcal{O}_{S' \cup S_0}, \mathcal{Y}/\ell)$ (dont l'image dans $H^1(k, Y/\ell)$ est finie via [11], II.6.2., théorème 7) se surjecte sur $H^2(\mathcal{O}_{S' \cup S_0}, \mathcal{Y})[\ell]$. De ce fait il n'y a qu'un nombre fini d'éléments non nuls de $H^2(k, Y)[\ell]$ qui sont non ramifiés en dehors de $(S_0 \cup S')$; pour chacun de ces éléments α, on peut choisir une place v non dans $(S_0 \cup S')$ avec $\alpha_v \neq 0$ (grâce à l'hypothèse $Ш^2_\omega(Y) = 0$). Il suffit alors de prendre pour S la réunion de S_0 et de toutes ces places v.

$\square$

Remarques : – Il n'est pas étonnant de voir apparaître ici l'hypothèse $Ш^2_\omega(Y) = 0$, qui permet ([10], Th. 8.12) d'avoir l'approximation faible pour T (dont le théorème 3 est un raffinement).

– Il n'est pas raisonnable d'attendre un analogue du théorème 3 pour une variété semi-abélienne G. En effet si G s'écrit comme extension d'une variété abélienne non nulle A par un tore T (dont on note encore Y le module des caractères), alors $H^1(k, A^*)$ est infini donc aussi son image dans $H^1(k, M^*)$ (en effet $H^1(k, Y)$ est fini). Or cette image est incluse dans $Ш^1_\omega(M^*)$: en effet toute classe de $H^1(k, A^*)$ est non ramifiée en dehors d'un nombre fini de places (donc nulle en dehors de ces places par connexité de A, cf. lemme 1). Il en résulte que $Ш^1_\omega(M^*)$ est infini, donc que (modulo finitude de $Ш(A)$) le défaut d'approximation faible pour G l'est également via [4], théorème 1.2.

– On comparera le théorème 3 avec les résultats de [7], section 4.

4. Application à l'obstruction de Manin pour les points entiers sur les torseurs

Rappelons ([12], chapitre 5) que si X est une k-variété algébrique, on a un accouplement de Brauer-Manin

$$X(\mathbf{A}_k) \times \operatorname{Br} X \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

entre les points adéliques de X et son groupe de Brauer. Le noyau à gauche de cet accouplement contient l'ensemble $X(k)$ des points rationnels de X. Soit $\mathcal{X}$ un modèle entier de X. On peut se demander si pour certaines classes de variétés, l'existence d'un point de $\mathcal{X}(\mathbf{A}_{\mathcal{O}})$ dans le noyau ci-dessus implique l'existence d'un point entier sur X. Nous allons montrer qu'il en est ainsi si X est un espace principal homogène d'une variété semi-abélienne. Notons que cette problématique de l'obstruction de Manin entière a été formalisée pour la première fois dans [1].

Théorème 4 *Soit $\mathcal{X}$ un $\mathcal{O}$-schéma plat dont la fibre générique X est un espace principal homogène sous une variété semi-abélienne G. On suppose que le groupe de Tate-Shafarevitch $Ш(A)$ du quotient abélien A de G est fini.*

Soit S un ensemble fini de places de k, contenant les places archimédiennes. On suppose qu'il existe un point adélique $(P_v) \in \mathcal{X}(\mathbf{A}_S)$ qui est orthogonal à $\operatorname{Br}_1 X$ pour l'accouplement de Brauer-Manin. Alors il existe un point de $\mathcal{X}(\mathcal{O}_S)$ qui est arbitrairement proche de P_v pour $v \in S$ non archimédienne, et dans la même composante connexe de $X(k_v)$ que P_v pour v réelle. En particulier, si on suppose de plus $(P_v) \in \mathcal{X}(\mathbf{A}_{\mathcal{O}})$, alors $\mathcal{X}(\mathcal{O}) \neq \emptyset$.

Démonstration : La fibre générique X possède un point adélique orthogonal à $\operatorname{Br}_1 X$ pour l'accouplement de Brauer-Manin. D'après [2], théorème 1 (voir aussi [4], théorème 1.1), X possède un point rationnel ; ceci implique qu'il existe un k-isomorphisme $\varphi : X \simeq G$. Quitte à agrandir S on peut supposer que $\mathcal{G}$ s'étend en un schéma en groupes lisses $\mathcal{G}$ au-dessus de $\mathcal{O}_S$, et que φ s'étend en un $\mathcal{O}_S$-isomorphisme $\varphi_S : \mathcal{X}_S \to \mathcal{G}_S$, où l'on a posé $\mathcal{X}_S = \mathcal{X} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_S$ (notation similaire pour $\mathcal{G}$).

Considérons alors le point $(Q_v) \in \mathcal{G}(\mathbf{A}_S)$ défini par $Q_v = \varphi(P_v)$ pour toute place v de k. Notons $(\widetilde{Q}_v) \in \mathcal{P}_S^0(G) = \prod_{v \in S} H^0(k_v, G) \times \prod_{v \notin S} H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{G})$ l'image de (Q_v). Par fonctorialité de l'accouplement de Brauer-Manin, on obtient que (Q_v) est orthogonal à $\mathrm{Br}_1 G$. Posons $M = [0 \to G]$ et notons M^* le 1-motif dual. On a construit dans [4] (section 4) une flèche

$$\iota : H^1(k, M^*) \to \mathrm{Br}_1 G / \mathrm{Br}\, k$$

qui est compatible (voir [4], p.22) avec l'accouplement de Brauer-Manin et les accouplements locaux, c'est-à-dire qu'on a, pour tout $\alpha \in H^1(k, M^*)$:

$$\sum_{v \in \Omega} (\alpha_v, \widetilde{Q}_v)_v = (\iota(\alpha), Q_v)_{BM}$$

où $(.,.)_{BM}$ est l'accouplement de Brauer-Manin et $(.,.)_v$ est l'accouplement local $H^1(k_v, M^*) \times H^0(k_v, M) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

Il en résulte que $\widetilde{Q}_v$ est dans le noyau de la flèche $\mathcal{P}_S^0(G) \to H^1(k, M^*)^D$ du théorème 1. Ce théorème dit alors que $(\widetilde{Q}_v)$ est dans $\overline{H^0(\mathcal{O}_S, \mathcal{G})}$. Cela implique qu'il existe un point $Q \in \mathcal{G}(\mathcal{O}_S)$ qui est arbitrairement proche de Q_v pour $v \in S$ non archimédienne, et dans la même composante connexe de $G(k_v)$ que Q_v pour v réelle. Il suffit alors de poser $P_v = \varphi^{-1}(Q_v)$.

□

Remarques : – Dans le cas où $G = A$ est une variété abélienne, le théorème 4 (dû dans ce cas à Y. Manin et L. Wang) est essentiellement une reformulation de la suite exacte duale de Cassels-Tate. Quand $G = T$ est un tore, on obtient en particulier que *l'obstruction de Manin à l'existence d'un point entier est la seule pour un $\mathcal{O}$-schéma dont la fibre générique est un torseur sous un k-tore.* On comparera avec les théorèmes 3.7. et 4.5. de [1]. Notons aussi que le théorème 4 a surtout un intérêt théorique dans la mesure où déjà pour un tore T, le groupe $\mathrm{Br}_1 T / \mathrm{Br}\, k$ est infini, donc l'obstruction a peu de chances d'être calculable en pratique.

– Ceci dit, si $\mathcal{X}(\mathcal{O})$ est vide, seul un nombre fini d'éléments de $\mathrm{Br}\, X$ est nécessaire pour obtenir une obstruction de Brauer-Manin entière. En effet le produit $\mathcal{P}$ des $\mathcal{X}(\mathcal{O}_v)$ est compact (en convenant que $\mathcal{X}(\mathcal{O}_v)$ est l'ensemble des composantes connexes de $X(k_v)$ si v est archimédienne). Si on note E_α (pour α dans $\mathrm{Br}\, X$) le fermé de $\mathcal{P}$ où α s'annule, alors la condition $\mathcal{X}(\mathcal{O}) = \emptyset$

implique (d'après le théorème 4) que l'intersection de tous les E_α est vide, donc par compacité qu'une intersection finie de tels E_α est vide (remarque due à Colliot-Thélène).

En appliquant le théorème 4 au cas où G est un tore normique de dimension 1, on obtient :

Exemple 1 *Soit $\mathcal{X}$ une conique affine d'équation*

$$ax^2 + by^2 = c \quad a, b, c \in \mathcal{O} \quad abc \neq 0$$

On note X la conique affine sur k associée. S'il existe pour toute place v de k une solution (x_v, y_v) dans $\mathcal{O}_v \times \mathcal{O}_v$, telle que le point adélique $(P_v) = (x_v, y_v)_{v \in \Omega}$ soit orthogonal à $\mathrm{Br}_1 X / \mathrm{Br}\, k$, alors il existe une solution $(x, y) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}$.

Ceci répond à une question posée par Colliot-Thélène. Notons que même le cas où $-b/a$ est un carré dans k^* (qui correspond au cas $G = \mathbf{G}_m$ dans le théorème 4) n'est pas trivial.

$\square$

Remerciements. Ce travail a pour origine plusieurs discussions avec J-L. Colliot-Thélène, et a bénéficié de ses commentaires ; je l'en remercie chaleureusement. Je remercie également le rapporteur pour plusieurs suggestions pertinentes.

Références

[1] J-L. Colliot-Thélène, Xu Fei : *Brauer-Manin obstruction for integral points of homogeneous spaces and representation by integral quadratic forms*, prépublication 2007.
http ://www.math.u-psud.fr/~colliot/CTXuFei4feb08.pdf

[2] D. Harari : *The Manin obstruction for torsors under connected algebraic groups*, Intern. Math. Res. Notices, 2006, **68632**, 1–13.

[3] D. Harari, T. Szamuely : *Arithmetic duality theorems for* 1*-motives*, J. Reine Angew. Math. **578**, 93–128 (2005) et *Corrigenda for "Arithmetic duality theorems for* 1*-motives"*,
http ://www.math.u-psud.fr/~harari/errata/corrigcrelle.pdf

[4] D. Harari, T. Szamuely : *Local-global principles for* 1*-motives*, Duke Math. J. **143**, no 3, 531–557 (2008).

[5] J. S. Milne : *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series **33**, Princeton University Press 1980.

[6] J. S. Milne : *Arithmetic duality theorems*, Second edition, BookSurge, LLC, Charleston, SC, 2006.

[7] N. Naumann : *Arithmetically defined dense subgroups of Morava stabilizer groups*, Compositio Math. **144**, no 1, 247–270 (2008).

[8] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg : *Cohomology of number fields* (seond edition), Grundlehren der Math. Wiss. **323**, Springer-Verlag, 2008.

[9] V. Platonov, A. Rapinchuk : *Algebraic groups and number theory*, Pure and Applied Mathematics **139**, Academic Press Inc., Boston, 1994.

[10] J-J. Sansuc *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. reine angew. Math. **327**, 12–80 (1981).

[11] J-P. Serre : *Cohomologie Galoisienne* (cinquième édition, révisée et complétée), Springer Verlag 1994.

[12] A. N. Skorobogatov : *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics **144**, Cambridge University Press 2001.

David Harari
Université Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay,
Orsay Cedex, F-91405 ; CNRS, Orsay Cedex, F-91405
david.harari@math.u-psud.fr