MA261. Introduction au calcul scientifique
TP 3 : Résolution par la méthode de Cholesky des problèmes discrétisés

`Le but est de résoudre les problèmes discrétisés 1d (fil, poutre), 2d (membrane), 3d (cavité), que l'on écrit sous la forme` $\mathbb{A}_d\vec{u} = \vec{f}$, $d = 1, 2, 3$. `Les matrices` $(\mathbb{A}_d)_{d=1,2,3}$ `étant` ***`symétriques définie-positives`***`, on utilisera la méthode de Cholesky pour la résolution des systèmes linéaires.`

Soit A une matrice de $\mathbb{R}^{N\times N}$ *symétrique définie-positive*, et $\vec{f}$ un élément de $\mathbb{R}^N$. La factorisation de Cholesky de la matrice A construit une matrice triangulaire inférieure L telle que $A = LL^{\mathsf{T}}$. En remplaçant A par sa factorisation, on peut résoudre le problème

$$A\vec{u} = \vec{f} \tag{1}$$

en deux temps :
- une *descente* : résoudre $L\vec{y} = \vec{f}$;
- une *remontée* : résoudre $L^{\mathsf{T}}\vec{u} = \vec{y}$.

Ceci est très avantageux, car chacun des deux problèmes fait intervenir une matrice triangulaire, pour laquelle la résolution du système linéaire associé est élémentaire...

Exercice 8 Méthode de Cholesky (I).
Ecrire une fonction Matlab pour calculer la solution de (1) à l'aide la méthode de Cholesky.
`Aide : utiliser la fonction Matlab qui réalise la factorisation de Cholesky.`

Exercice 9 Résolution des problèmes discrétisés et étude de l'erreur.
Les problèmes statiques 1d (fil, poutre), 2d (membrane), 3d (cavité) sont respectivement posés dans $\Omega_d =]0,1[^d$, pour $d = 1, 2, 3$: trouver u tel que

$$-\Delta_d u = f \text{ sur } \Omega_d, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Ils sont discrétisés à l'aide de la méthode des différences finies dans $\mathbb{R}^N$ $(N = n^d)$, pour aboutir à

$$\mathbb{A}_d\vec{u} = \vec{f} \text{ pour } d = 1, 2, 3.$$

1. Appliquer la méthode de Cholesky aux problèmes discrétisés.
2. Comment peut-on vérifier que la solution calculée est une bonne approximation de la solution exacte ?

Exercice 10 Etude de complexité.
1. Comment évaluer la complexité
   - d'un algorithme ?
   - sous Matlab ?
2. Evaluer la complexité de la descente-remontée, puis de la factorisation de Cholesky pour $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Evaluer la complexité totale de la résolution du système linéaire $A\vec{u} = \vec{f}$ à l'aide de la méthode de Cholesky.

3. Choisir succcessivement $A = \mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3$, en faisant varier N, et comparer la complexité de la factorisation au temps d'exécution de la commande `LT = chol(A)` sous Matlab. Conclusion ?
4. Même question pour la résolution du système linéaire et la commande `A\f` .

Exercice 11 Méthode de Cholesky (II).

1. Rappeler ce qu'est le profil (optimisé) d'une matrice symétrique définie-positive.
2. Ecrire les algorithmes de descente-remontée et de la factorisation de Cholesky, avec prise en compte du *profil*.
3. Evaluer la complexité de la résolution du système linéaire $\mathbb{A}_d\vec{u} = \vec{f}$ à l'aide de la méthode de Cholesky avec prise en compte du profil, pour les matrices $(\mathbb{A}_d)_{d=1,2,3}$. Conclusion ?