E.N.S. Ulm, L3, 2000–2003
Univ. Paris-Sud, M1, 2004–2007
Stéphane Fischler

T.D. numéro 9

Algèbre

Exercice 1 Soient p et q deux nombres premiers distincts, et G un groupe d'ordre pq^2. Montrer que G n'est pas simple. (Indication : on pourra procéder comme suit, en utilisant les théorèmes de Sylow. Traiter d'abord le cas où $p < q$. Ensuite, en supposant $q < p$, démontrer que si G est simple alors G admet q^2 p-sylows, et conclure en comptant les éléments de chaque ordre).

Exercice 2 Soit G un groupe simple, de cardinal n supérieur ou égal à 3.

1. Montrer que n est différent de 40.
2. Pour tout facteur premier p de n, notons N_p le nombre de p-sylows de G. On suppose que n n'est pas premier. Montrer qu'on a $n \leq N_p!$ pour tout p, et en déduire que n est différent de 24.
3. En considérant le nombre d'éléments de G ayant un ordre donné, montrer que n est différent de 56.
4. On suppose que n est pair. Démontrer que n est divisible par 4. (Indication : on pourra considérer l'action sur G d'un 2-sylow S de G, par translation à gauche. En explicitant la permutation de G ainsi associée à un éventuel générateur de S, démontrer que S ne peut pas être cyclique. En déduire le résultat.)

On peut démontrer, à l'aide de cet exercice, que tout groupe simple d'ordre n strictement inférieur à 60 est cyclique, et que son ordre est premier. En effet, tout entier $n < 60$ qui n'est pas premier s'écrit p^k, pq, pq^2 ou $4k - 2$ (où p et q sont des nombres premiers distincts et k est un entier supérieur ou égal à 2), excepté 24, 36, 40, 48 et 56. Pour $n = 36$ et $n = 48$, un raisonnement analogue à celui de la question 2. s'applique. Pour $n = 60$, on a le groupe alterné $\mathfrak{A}_5$ qui est simple.

Exercice 3 Soient H et N deux groupes, ϕ et ψ deux morphismes de H dans $\mathrm{Aut}(N)$. On se propose de trouver des conditions suffisantes pour que les produits semi-directs $N \rtimes_\phi H$ et $N \rtimes_\psi H$ déduits de ces morphismes soient isomorphes.

1. Supposons qu'il existe un automorphisme α de H tel que $\psi = \phi \circ \alpha$. Montrer que $N \rtimes_\phi H$ et $N \rtimes_\psi H$ sont isomorphes.
2. Supposons qu'il existe un automorphisme u de N tel que, pour tout $h \in H$, on ait $\phi(h) = u \circ \psi(h) \circ u^{-1}$. Montrer que $N \rtimes_\phi H$ et $N \rtimes_\psi H$ sont isomorphes.

Exercice 4 On pose $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (ce groupe s'appelle le groupe de Klein). Montrer qu'il existe des produits semi-directs non triviaux $V \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et qu'ils sont tous isomorphes. Même question avec les produits semi-directs $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes V$.

Exercice 5 Soit p un nombre premier impair. Combien y a-t-il de produits semi-directs (deux à deux non isomorphes) $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$? Même question pour les produits semi-directs

$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$; dans ce deuxième cas, on pourra utiliser les sous-groupes de Sylow pour étudier la structure de $\mathrm{Aut}((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

Exercice 6 Soit G un groupe simple d'ordre 60. Le but de cet exercice est de démontrer que G est isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_5$.

1. Démontrer que G admet six 5-sylows.
2. En utilisant la question précédente, trouver un sous-groupe G' du groupe alterné $\mathfrak{A}_6$, d'indice 6, qui soit isomorphe à G.
3. En faisant agir G' sur le quotient $\mathfrak{A}_6/G'$, plonger G' dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_5$.
4. Conclure.

Problème 1 Soient H et N deux groupes. On suppose que N est abélien, et que H agit sur N par automorphismes; cette action est notée $(h, n) \mapsto h{\cdot}n$. On note additivement la loi de N, et multiplicativement celle de H. On définit des applications ∂_0, ∂_1 et ∂_2 :

$$N \xrightarrow{\partial_0} N^H \xrightarrow{\partial_1} N^{H\times H} \xrightarrow{\partial_2} N^{H\times H\times H}$$

En général, il ne s'agit pas d'une suite exacte. Les morphismes de groupes abéliens ∂_0, ∂_1 et ∂_2 sont définis comme suit, pour $h_0, h_1, h_2 \in H$, $n \in N$, $\varepsilon \in N^H$ et $z \in N^{H\times H}$:

$$\begin{aligned}
(\partial_0(n))(h_0) &= h_0{\cdot}n - n \\
(\partial_1(\varepsilon))(h_0, h_1) &= h_0{\cdot}\varepsilon(h_1) - \varepsilon(h_0h_1) + \varepsilon(h_0) \\
(\partial_2(z))(h_0, h_1, h_2) &= h_0{\cdot}z(h_1, h_2) - z(h_0h_1, h_2) + z(h_0, h_1h_2) - z(h_0, h_1)
\end{aligned}$$

Pour $i \in \{1, 2\}$, on dit que $\phi \in N^{H^i}$ est un i-cocycle si $\partial_i(\phi) = 0$; on dit que ϕ est un i-cobord si il existe $\psi \in N^{H^{i-1}}$ tel que $\phi = \partial_{i-1}(\psi)$. On dit qu'un cocycle $\phi \in N^{H^i}$ est trivial si, pour tout $\underline{h} \in H^i$, $\phi(\underline{h})$ est l'élément neutre de N.

1. Vérifier qu'on a $\partial_2 \circ \partial_1 = 0$ et $\partial_1 \circ \partial_0 = 0$.

Ce résultat implique que tout i-cobord est un i-cocycle. On note Z^i le groupe (abélien) des i-cocycles, B^i celui des i-cobords, et $\mathbf{H}^i = Z^i/B^i$ leur quotient, qui s'appelle le i-ème groupe de cohomologie pour l'action de H sur N.

Soit maintenant G un groupe admettant un sous-groupe distingué abélien N. En notant $H = G/N$, on dit G est une extension de H par N car on a la suite exacte suivante:

$$1 \to N \to G \to H \to 1 \qquad (*)$$

2. Montrer que la loi de G induit une action de H sur N par automorphismes (bien sûr, l'hypothèse selon laquelle N est abélien est cruciale ici, puisqu'on ne s'est pas donné de section).

On peut alors parler des groupes de cohomologie $\mathbf{H}^1$ et $\mathbf{H}^2$ associés à l'action de H sur N. On fixe un système $\overline{H}$ de représentants de $H = G/N$ dans G. On ne suppose pas que $\overline{H}$ est un sous-groupe de G.

3. Constuire, à partir de la loi de G et du choix de $\overline{H}$, un 2-cocycle z qui soit trivial si, et seulement si, $\overline{H}$ est un sous-groupe de G.

4. Montrer que changer le choix de $\overline{H}$ correspond à ajouter à z un 2-cobord.

5. Montrer que la suite exacte $(*)$ admet une section si, et seulement si, z est un 2-cobord.

6. On suppose maintenant que z est un 2-cobord. Montrer que les sous-groupes $\overline{H}$ qui relèvent H sont en bijection avec les éléments $\varepsilon \in N^H$ tels que $\partial_1(\varepsilon) = z$. Montrer que deux sous-groupes qui relèvent H sont conjugués dans G si, et seulement si, les éléments de N^H associés diffèrent par un 1-cobord.

On considère de nouveau, comme au début du problème, deux groupes H et N (en supposant toujours que H agit sur N par automorphismes et que N est abélien).

8. Montrer qu'à tout 2-cocycle z on peut associer une loi de groupe sur le produit cartésien (ensembliste) $N \times H$, de manière à définir une réciproque de la construction de la question 3 (en choisissant $\overline{H} = \{1\} \times H$).

Pour tout entier naturel i, on peut définir un morphisme de groupes $\partial_i : N^{H^i} \to N^{H^{i+1}}$ en posant, pour $\phi \in N^{H^i}$ et $h_0, \ldots, h_i \in H$:

$$(\partial_i(\phi))(h_0, \ldots, h_i) = h_0 \cdot \phi(h_1, \ldots, h_i) + \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^{k+1} \phi(h_0, \ldots, h_{k-1}, h_k h_{k+1}, h_{k+2}, \ldots, h_i) + (-1)^{i+1} \phi(h_0, \ldots, h_{i-1})$$

On définit Z^i, B^i et $\mathbf{H}^i$ pour tout $i \geq 1$ comme pour $i = 1$ et $i = 2$.

9. On suppose que N et H finis, et que leurs ordres sont premiers entre eux. Montrer que $\mathbf{H}^i = \{0\}$ pour tout $i \geq 1$ (ce qui démontre que dans ce cas, toute extension de H par N est un produit semi-direct). Pour cela, étant donné un i-cocycle z, on pourra considérer $\lambda\varepsilon$ pour $\lambda \in \mathbb{Z}$ bien choisi et ε donné par la formule suivante :

$$\varepsilon(h_0, \ldots, h_{i-1}) = \sum_{x \in H} z(h_0, \ldots, h_{i-1}, x)$$

10. Considérons l'unique action non triviale de $H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $N = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Le groupe $\mathbf{H}^2$ est-il réduit à $\{0\}$? Quel est le cardinal du groupe $\mathbf{H}^1$?

On dit que le groupe $\mathbf{H}^2$ classifie les extensions de H par N; celles qui sont des produits semi-directs correspondent à 0 dans le groupe $\mathbf{H}^2$. Quant au groupe $\mathbf{H}^1$, il classifie (à conjugaison près) les relèvements de H en un sous-groupe de G, lorsque G est un produit semi-direct.