Téléchargé depuis http://www.math.u-psud.fr/~fischler/enseignement.html

S3 Chimie, Parcours Chimie — Univ. Paris-Sud, Orsay
Math 250 : Matrices et équations différentielles — 22 octobre 2015

Partiel

Durée : 2 heures

Les documents sont interdits ; les téléphones portables doivent être éteints. Les calculatrices sont autorisées à condition d'être *de type collège*, c'est-à-dire non graphiques, non programmables et essentiellement sans mémoire.

Toute réponse devra être précisément justifiée (sauf dans la question (a) de l'exercice 5). Les exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

A chaque opération sur les équations d'un système ou sur les lignes ou colonnes d'une matrice, on indiquera *explicitement* sur la copie quelle opération est effectuée. Sauf indication explicite du contraire, tous les nombres considérés sont des nombres complexes.

Exercice 1 - Calculer le déterminant de la matrice suivante : $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Exercice 2 - Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $2+2i\sqrt{3}$; en déduire une racine carrée de $2+2i\sqrt{3}$ (c'est-à-dire un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = 2+2i\sqrt{3}$).

Exercice 3 - Déterminer les racines du polynôme $P(z) = z^3 - 3iz^2 - (3+i)z + (2i-2)$.

Exercice 4 - Déterminer les solutions du système linéaire suivant : $\begin{cases} -x - 3y + 2z = 4 \\ 2x + y - z = -7 \\ 3x - y + 2z = -6 \end{cases}$

Exercice 5 - Considérons la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Calculer le produit AX, avec $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. *Aucune justification n'est demandée.*

(b) Déterminer le polynôme caractéristique de A, puis la (ou les) valeur(s) propre(s) de A.

(c) Pour chaque valeur propre de A, déterminer une base du sous-espace propre associé.

(d) La matrice A est-elle diagonalisable ?

(e) Compte tenu des résultats obtenus, quel lien peut-on faire entre la question (a) et le reste de l'exercice ?

Exercice 6 - Considérons le système suivant, dans lequel a et b sont des paramètres :

$$\begin{cases} (a+1)x + 3y = 0 \\ 2x + y = b \end{cases}$$

(a) Déterminer les solutions de ce système (en distinguant si nécessaire en fonction de a et b).

(b) En supposant $b = 0$, donner une base de solutions (on pourra distinguer en fonction de a).