Université Paris Sud
Modélisation et Calcul Scientifique
TP proposé par F. Dubois

Optimisation avec contraintes dans $\mathbb{R}^2$

3 et 24 février 2006.

- On se propose de déterminer numériquement la solution du problème

$$(1) \quad \begin{cases} u \in K \\ J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in K \end{cases}$$

pour différents convexes $K \subset \mathbb{R}^2$ et une fonctionnelle $J(\bullet)$ quadratique :

$$(2) \quad J(x,y) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-a}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{\beta}\right)^2\right], \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. On s'intéressera successivement aux trois convexes

$$(3) \quad K_1 = \left\{(x,y),\ \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1\right\}, \quad p \neq 0,\ q \neq 0.$$

$$(4) \quad K_2 = \{(x,y),\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

$$(5) \quad K_3 = \{(x,y),\ x^2 + xy + y^2 \leq 1,\ x^2 - xy + y^2 \leq 1\}$$

① Préliminaires

- Développer deux programmes Matlab permettant de déterminer la projection sur les convexes K_1 et K_2 d'un point arbitraire de $\mathbb{R}^2$.
- Que pensez-vous du problème analogue pour l'ensemble K_3 ?

② Algorithme du gradient projeté.

- Si P désigne le projecteur sur le convexe K, et $\rho > 0$ un réel à fixer au mieux, on rappelle que l'algorithme du gradient projeté s'écrit (avec les notations de (1)) :

$$(6) \quad u^{k+1} = P\left(u^k - \rho \nabla J(u^k)\right).$$

- Développer un (ou plusieurs !) programmes Matlab permettant de résoudre le problème (1) pour $K = K_1$ et $K = K_2$ en utilisant l'algorithme (6).

③ Algorithme de Uzawa

- On suppose pour fixer les idées que le convexe K est défini par le jeu d'inéquations

$$(7) \quad F_j(u) \leq 0 \quad , \quad j = 1, 2$$

où F_j est une fonction convexe continue $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
On introduit le lagrangien

(8) $$\mathcal{L}(u,\lambda) = J(u) + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j F_j(u).$$

- Après avoir vérifié que

(9) $$\sup_{\lambda \geq 0} \mathcal{L}(u,\lambda) = \begin{cases} +\infty & \text{si } u \notin K \\ J(u) & \text{si } u \in K \end{cases},$$

on pose

(10) $$\inf_{u \in \mathbb{R}^2} \mathcal{L}(u,\lambda) = g(\lambda).$$

Vérifier qu'on a

(11) $$\frac{\partial g}{\partial \lambda_j} = F_j(\overset{*}{u}(\lambda)) \quad , \quad j = 1,2$$

où $u^*(\lambda)$ est le point de minimum de la solution de (10).

- L'algorithme de Uzawa consiste à utiliser un algorithme de gradient projeté pour le problème dual

(12) $$\begin{cases} \lambda \geq 0 \\ g(\lambda) \geq g(\mu), \quad \forall \mu \geq 0 \end{cases}$$

ce qui revient à minimiser à λ fixé le Lagrangien $\mathcal{L}(u,\lambda)$ par rapport à u <u>sans</u> la contrainte $u \in K$, puis à modifier le multiplicateur λ grâce

au gradient de g évalué à l'aide de (11).
L'algorithme s'écrit en deux étapes:

$$(13)\quad \begin{cases} u^k \in \mathbb{R}^2 \\ \mathcal{L}(u^k, \lambda^k) \leq \mathcal{L}(v, \lambda^k), \quad \forall v \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

$$(14)\quad \lambda^{k+1} = P(\lambda^k + \rho\, \nabla g(\lambda^k)), \quad \rho > 0$$

où P est le projecteur sur le convexe $\{\lambda, \lambda \geq 0\}$.

- Utiliser l'algorithme de Uzawa pour résoudre le problème (1) avec $K = K_1$ et K_3. Cet algorithme est-il utile pour $K = K_2$?

F, 30/01/06.