Université Paris Sud
Modélisation et Calcul Scientifique
TP proposé par F. Dubois

Interpolation de Lagrange

20 oct 2006

1) Premier exemple

Pour $x \in [0, 3\pi]$, on pose $f(x) = \sin x$.
Pour n entier ≥ 1, on introduit $(n+1)$ points $(x_j)_{0 \leq j \leq n}$ équidistribués de sorte que $x_0 = 0$ et $x_n = 3\pi$. On note $p_n f$ le polynome de degré $\leq n$ tel que

$$(1) \quad (p_n f)(x_j) = f(x_j) \quad , \quad 0 \leq j \leq n .$$

- A l'aide des fonctions "polyfit" et "polyval" du logiciel "Matlab", proposer une procédure qui calcule $(p_n f)(x)$ pour x arbitraire et n quelconque ≥ 1. Tracer $p_n f$ pour quelques valeurs de $n \leq 12$.

2) Algorithme de Horner - Newton.

Constater que pour $n \simeq 15$ à $n \simeq 20$ et au delà, le programme précédent ne donne plus de résultats corrects. Proposer quelques éléments explicatifs.

- La méthode des différences divisées consiste à poser

$$f[x_j] = f(x_j) \quad , \quad 0 \leq j \leq n$$

puis de proche en proche pour $0 \leq j < k \leq n$:

$$(2) \quad f[x_j, \dots, x_k] = \frac{f[x_j, \dots, x_{k-1}] - f[x_{j+1}, \dots, x_k]}{x_j - x_k}$$

jusqu'à $f[x_0, \dots, x_n]$. Construire une procédure qui calcule tous ces nombres et les stocke dans un tableau.

- Le calcul du polynôme $p_n f$ s'effectue alors à l'aide de l'algorithme suivant

$$q_0(x) \equiv f[x_0, \dots, x_n]$$

$$(3) \quad q_j(x) = f[x_0, \dots, x_{n-j}] + (x - x_{n-j})\, q_{j-1}(x)$$

avec en final $q_n(x) = (p_n f)(x)$. Construire une procédure qui calcule $(p_n f)(x)$ pour x quelconque et $n \geq 1$ arbitraire. La tester dans l'exemple 1. Montrer qu'elle est toujours efficace pour $n \geq 20$.

3) <u>Etude de l'erreur d'interpolation</u>.

Pour f fonction régulière $[a, b] \to \mathbb{R}$ et $p_n f$ polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points x_j, on pose

$$(4) \quad E_n(f) = \sup_{a \leq x \leq b} | f(x) - (p_n f)(x) | .$$

- Déterminer $E_n(f)$ expérimentalement pour l'exemple de la question 1. Comparer avec l'estimation classique (voir par exemple le livre de Demailly):

$$(5) \quad E_n(f) \leq \frac{c}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1} \sup_{a\leq x\leq b} |f^{(n+1)}(x)|$$

- Présenter les résultats dans le plan (n, log des erreurs en base 10). Que constate-t-on pour $n \simeq 30$? Expliquer.

4) Phénomène de Runge.

On change la fonction f pour $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, avec $a = -5$, $b = 5$.

- Avec des noeuds x_j équirépartis, constater la divergence de la suite des polynomes $p_n f$.
- Avec des noeuds de Tchebycheff, ie

$$(6) \quad x_j = 5 \cos\left(\frac{2j+1}{2(n+1)}\pi\right), \quad 0 \leq j \leq n$$

dans le cas présent, montrer expérimentalement que la (nouvelle) suite $p_n f$ converge. Tracer l'erreur $E_n(f)$ obtenue en reprenant la question 3.