Université Paris Sud
Modélisation et Calcul Scientifique
TP proposé par F. Dubois.

gradient conjugué

17 novembre 2006.

1) Laplacien discret à une dimension d'espace.

- Afin de résoudre de façon approchée le modèle

(1) $$- \frac{d^2u}{dx^2} = 1 \quad , \quad 0 < x < 1$$

(2) $$u(0) = u(1) = 0 \quad ,$$

on introduit un entier $n \geq 1$, une grille $(x_j)_{0 \leq j \leq n}$ telle que $x_j = j\,h$, $h = 1/n$ et une inconnue discrète $(u_j)_{0 \leq j \leq n}$ qui approche la solution de (1)(2) au point x_j. Afin d'approcher la condition limite (2), on pose

(3) $$u_0 = 0, \quad u_n = 0$$

et l'équation (1) est approchée au point x_j par le schéma classique aux différences

(4) $$\frac{1}{h^2}\left(-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}\right) = 1 \quad , \quad 1 \leq j \leq n-1$$

La résolution du modèle discret (3)(4) conduit à introduire une matrice A d'ordre $(n-1)$, symétrique, définie positive et tridiagonale, un second membre $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ et à chercher $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ (avec $x_j = u_j$ si $1 \leq j \leq n-1$) tel que

$$(5) \qquad Ax = b.$$

- L'algorithme du gradient conjugué pour résoudre un système tel que (5) prend la forme :

$$(6) \qquad x_0 \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad g_0 = Ax_0 - b, \quad w_0 = g_0$$

Pour k fixé, x_k, g_k, w_k étant donnés dans $\mathbb{R}^{n-1}$, calculer x_{k+1}, g_{k+1}, w_{k+1} par :

$$(7) \qquad x_{k+1} = x_k + \rho_k w_k, \quad \rho_k = -\frac{(g_k, w_k)}{(w_k, Aw_k)}$$

$$(8) \qquad g_{k+1} = Ax_{k+1} - b$$

$$(9) \qquad w_{k+1} = g_{k+1} + \alpha_{k+1} w_k, \quad \alpha_{k+1} = \frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2}.$$

- Mettre en œuvre l'algorithme du gradient conjugué pour le système linéaire introduit ci-dessus. Interpréter la solution $(u_j)_{0 \leq j \leq n}$ ainsi calculée.

2) Préconditionnement.

- Soit S une matrice symétrique définie positive telle que le système linéaire

$$(10) \qquad S x = \beta$$

est "facile" à résoudre quelque soit le second membre β. L'algorithme du gradient conjugué préconditionné est une variante des relations (6) à (9) :

$$(11) \qquad x_0 \text{ donné}, \quad g_0 = A x_0 - b, \quad w_0 = S^{-1} g_0 .$$

$$(12) \qquad x_{k+1} = x_k + \rho_k w_k , \quad \rho_k = - \frac{(g_k , w_k)}{(w_k , A w_k)}$$

$$(13) \qquad g_{k+1} = A x_{k+1} - b$$

$$(14) \qquad w_{k+1} = S^{-1} g_{k+1} + \alpha_{k+1} w_k , \quad \alpha_{k+1} = \frac{(g_{k+1}, S^{-1} g_{k+1})}{(g_k , S^{-1} g_k)}$$

- Mettre en œuvre l'algorithme du gradient conjugué préconditionné si A est la matrice introduite à la question 1) et S sa diagonale

3) Laplacien discret à deux dimensions.

- On remplace $]0,1[$ par le carré $\Omega =]0,1[\times]0,1[$, (1)(2) par

$$(15) \qquad -\Delta u = 1 \qquad \Omega$$

$$(16) \qquad u = 0 \qquad \partial\Omega ,$$

on introduit une grille bidimensionnelle $(x_i, y_j) = (ih, jh)$, $0 \le i,j \le n$ et une inconnue discrète $(u_{ij})_{0 \le i,j \le n}$.

- Combien de valeurs (u_{ij}) sont non connues? On remplace (4) par

$$(17) \quad \frac{1}{h^2}\left(-u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + 4u_{ij} - u_{i,j+1} - u_{i+1,j}\right) = 1,$$

ce qui permet de définir une matrice A dite "matrice pentadiagonale pour le laplacien à deux dimensions d'espace".

- Résoudre le système (17) (associé aux conditions aux limites issues de (16)) par la méthode du gradient conjugué.

4) Préconditionnement monodimensionnel.

- Toutes choses égales par ailleurs, on pose

$$(18) \quad (Su)_{ij} = \frac{1}{h^2}\left(-u_{i-1,j} + 4u_{ij} - u_{i+1,j}\right)$$

Utiliser cette matrice comme préconditionneur pour résoudre le système (17) par gradient conjugué avec préconditionnement.