le cnam

Compléments d'Algèbre et d'Analyse

Saint Denis, automne 2012-2013

Cours 06

Opérateurs symétriques dans Rn

François Dubois

CA 2 Cours VI

Opérateurs symétriques dans $\mathbb{R}^n$

Résumé du cours

- On désigne par E_n un espace de dimension n, $\mathcal{A}: E_n \to E_n$ un opérateur linéaire $E_n \to E_n$; pour tout $u \in E_n$, $\mathcal{A}\cdot u \in E_n$ et on a

(1) $\mathcal{A}\cdot(u+v) = (\mathcal{A}\cdot u) + (\mathcal{A}\cdot v)$, $u, v \in E_n$

(2) $\mathcal{A}\cdot(\lambda u) = \lambda(\mathcal{A}\cdot u)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in E_n$.

On se donne une (première) base $(e_1, \dots, e_n)$ de E_n et $(a_{ij})_{i,j} = A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de l'opérateur $\mathcal{A}$ exprimé relativement à la base $(e_j)_{1\leq j\leq n}$. On exprime $\mathcal{A}\cdot e_j$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

(3) $\mathcal{A}\cdot e_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, e_i$, $1 \leq j \leq n$,

- On se donne une seconde base $(f_1, \dots, f_n)$ de E_n à l'aide d'une matrice de passage <u>inversible</u> P:

(4) $f_k = \sum_{i=1}^{n} p_{ik}\, e_i$, $1 \leq k \leq n$.

On cherche la "nouvelle" matrice de $\mathcal{A}$ relativement à la nouvelle base $(f_1, \dots, f_n)$, c'est à dire $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Prop <u>changement de la matrice lors d'un changement de base.</u>

Avec le contexte rappelé plus haut, on a

(5) $\widetilde{A} = P^{-1} \, A \, P$.

- Un <u>vecteur propre</u> $r \in E_n$ est un vecteur <u>non nul</u> de E_n tel que $\mathcal{A} \cdot r$ est proportionnel à r :

(6) $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \; \mathcal{A} \cdot r = \lambda r, \; r \neq 0, \; r \in E_n$.

Le nombre λ est appelé <u>valeur propre</u> pour l'opérateur $\mathcal{A}$.

- Si $r = \sum_{j=1}^{n} x_j \, e_j$ est représenté par la colonne $X \in \mathbb{R}^n$, alors la relation (6) s'écrit matriciellement

(7) $A X = \lambda X, \quad X \neq 0$.

Prop <u>Equation des valeurs propres.</u>

Si λ est valeur propre pour l'opérateur $\mathcal{A}$ de matrice A relativement à une base $(e_1, \dots, e_n)$, on a

(8) $\det(A - \lambda I) = 0$

Preuve : La matrice $A-\lambda I$ est singulière à cause de (7), donc non-inversible. Donc son déterminant est nul.

- Changement de base orthonormé.

On suppose qu'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ a été défini sur E_n et que relativement à la base $(e_1,\ldots,e_n)$, il s'exprime de la façon suivante

(9) $$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,.$$

- Si la base $(f_1,\ldots,f_n)$ introduite à la relation (4) est orthogonale, on a

(10) $$(f_i, f_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j \end{cases}, \quad 1\leq i,j\leq n.$$

Prop. Matrice de passage orthogonale

Avec les notations rappelées plus haut, si la famille $(f_1,\ldots,f_n)$ est orthogonale, c'est à dire si la relation (10) a lieu, alors la matrice de passage P introduite à la relation (4) est orthogonale :

(11) $$P\,P^t = P^t\,P = I \,.$$

En d'autres termes,

(12) $$P^{-1} = P^t .$$

- Opérateurs symétriques.

L'espace E_n est muni d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ défini par la relation (9) relativement à la base $(e_1, \dots, e_n)$. L'opérateur $A : E_n \to E_n$ est dit auto-adjoint (ou symétrique) si

(13) $(u, A\cdot v) = (Au, v)$, $\forall u, v \in E_n$.

Prop **Matrice symétrique.**

Si l'opérateur A est symétrique alors sa matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ relativement à la base $(e_1, \dots, e_n)$ est symétrique

(14) $A^t = A$.

Réciproquement, si (14) a lieu, alors l'opérateur A est auto adjoint ((13) a lieu).

Th **Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints.**

Soit A opérateur auto-adjoint sur l'espace E_n muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)$. Alors il existe n valeurs propres réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et n vecteurs propres $r_j \in E_n$ de A deux à deux orthogonaux

(15) $A\cdot r_j = \lambda_j\, r_j$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $r_j \in E_n$, $r_j \neq 0$

(16) $(r_j, r_k) = \delta_{jk}$, $1 \leq j, k \leq n$.

• La preuve de ce résultat n'est pas élémentaire. On a vu qu'il est vrai pour $n=2$ (leçon numéro III). On montre d'abord qu'il existe un premier vecteur propre unitaire r_1. Pour cela, on introduit le "quotient de Rayleigh" défini pour $u \neq 0$, $u \in E_n$:

(17) $E_n \setminus \{0\} \ni u \mapsto Q(u) = \dfrac{(u, Au)}{(u,u)} \in \mathbb{R}$.

Cette "fonction auxiliaire" $Q(\bullet)$ est homogène (de degré zéro) :

(18) $Q(\lambda u) = Q(u)$, $\forall \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$, $u \neq 0, u \in E_n$

Donc on peut la définir sur S^{n-1}, sphère de E_n des vecteurs unitaires :

(19) $S^{n-1} = \{u \in E_n, \ (u,u) = 1\}$.

La fonction $S^{n-1} \ni u \mapsto Q(u) \in \mathbb{R}$ est continue sur E_n et S^{n-1} est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ (elle est fermée et bornée, notions de topologie générale qui ne sont pas développées dans le cadre de ce cours). Elle admet un maximum : il existe un vecteur $u_0 \in S^{n-1}$ de sorte que

(20) $\forall u \in S^{n-1}$, $Q(u) \leq Q(u_0)$; $u_0 \in S^{n-1}$.

Compte tenu de (18), on a aussi

(21) $\forall u \in E_n$, $u \neq 0$, $Q(u) \leq Q(u_0)$.

- Il est alors facile de voir que u_0 est un vecteur propre de $\mathcal{A}$. Nous introduisons v <u>orthogonal</u> à u_0 arbitraire, c'est à dire

(22) $$(u_0, v) = 0, \quad v \in E_n \quad ,$$

et considérons le vecteur

(23) $$u(t) = u_0 + t\, v, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On écrit la relation (21) pour $u = u(t)$. On introduit donc une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

(24) $$f(t) = Q(u_0 + t\, v), \quad t \in \mathbb{R}, (u_0, v) = 0 .$$

On écrit la condition (21) pour tout $t \in \mathbb{R}$:

(25) $$f(u(t)) \leqslant f(0) = Q(u_0) .$$

Compte tenu de la bilinéarité, on a

$$f(t) = \frac{(u_0 + t v, \mathcal{A}(u_0 + t v))}{(u_0 + t v, u_0 + t v)}$$

$$= \frac{(u_0, \mathcal{A} \cdot u_0) + t(v, \mathcal{A} \cdot u_0) + t(u_0, \mathcal{A} v) + t^2(v, \mathcal{A} v)}{(u_0, u_0) + 2t(u_0, v) + t^2(v, v)}$$

$$= \frac{Q(u_0) + 2t(\mathcal{A} u_0, v) + t^2(v, \mathcal{A} v)}{1 + t^2(v, v)}$$

car $Q(u_0) = (u_0, \mathcal{A} u_0)$, $(u_0, u_0) = 1$, et $(u_0, \mathcal{A} v) = (\mathcal{A} u_0, v)$.

La relation (25) peut alors se développer :

$$Q(u_0) + 2t(\mathcal{A}u_0, v) + t^2(\mathcal{A}v, v) \leq (1+t^2(v,v))\, Q(u_0)$$

d'où

(26) $\quad 2t(\mathcal{A}u_0, v) + t^2\left[(v, \mathcal{A}v) - Q(u_0)(v,v)\right] \leq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

Le membre de gauche de (26) est un trinôme (polynome de degré 2) nul pour $t=0$ et toujours négatif. Donc zero est racine double de ce trinome ; le coefficient de t est nul, soit

(27) $\quad (\mathcal{A}\cdot u_0, v) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{E}_n \text{ tq } (u_0, v) = 0.$

- Si on développe le vecteur $\mathcal{A}\cdot u_0$ sur une base formée de u_0 et de $(n-1)$ autres vecteurs orthogonaux à u_0 (qui satisfont à (22)), alors les composants sur ces autres vecteurs $(u_2, \dots, u_n)$ sont nulles. En effet, si $\mathcal{A}u_0 = \lambda_1 u_0 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$, $(\mathcal{A}u_0, u_2) = \alpha_2 = 0, \dots,$ $(\mathcal{A}u_0, u_n) = \alpha_n = 0$ et il reste

(28) $\quad \mathcal{A}\cdot u_0 = \lambda_1 u_0, \; (u_0, u_0) = 1$

Le vecteur u_0, défini comme atteignant le maximum du quotient de Rayleigh (relation (21)) est un vecteur propre de $\mathcal{A}$. On peut poser $r_1 = u_0$.

- La preuve s'achève par récurrence. La relation (27), compte tenu de la symétrie de $\mathcal{A}$, s'écrit ainsi

$$(29) \qquad (u_0, \mathcal{A}v) = 0 \ , \ (u_0, v) = 0, \ v \in E_h .$$

Donc en particulier, les vecteurs $\mathcal{A}u_2, \ldots, \mathcal{A}u_n$ sont orthogonaux à u_0. En d'autres termes, la matrice de $\mathcal{A}$ relativement à la base orthonormée $(u_0, u_2, \ldots, u_n)$ est de la forme

$$(30) \qquad A_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \quad \cdots \quad 0 \\ 0 & \\ \vdots & A_{n-1} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

où A_{n-1} est une matrice symétrique d'ordre $(n-1)$ seulement. D'où le théorème. $\square$

- Si A est symétrique réelle, il existe D diagonale réelle et P orthogonale $(P^{-1} = P^t)$ de sorte que

$$(31) \qquad D = P^t \, A \, P .$$

En d'autres termes, l'action de $\mathcal{A}$ dans la base $(r_1, \ldots, r_n)$ s'explicite facilement :

$$(32) \qquad \mathcal{A}\cdot\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j \, r_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_j \, r_j .$$

Exercices.

1. Trouver une base de vecteurs propres pour la matrice

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si P_3 désigne la matrice $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que

$$P_3^{-1} \cdot A_3 \cdot P_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

2. Questions analogues avec

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1-\sqrt{5} & -1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

et $$P_4^{-1} \cdot A_4 \cdot P_4 = \begin{pmatrix} (5+\sqrt{5})/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (5-\sqrt{5})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (3+\sqrt{5})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (3-\sqrt{5})/2 \end{pmatrix}.$$

Jubaris 10 janvier 2013.