Compléments d'Algèbre et d'Analyse

Saint Denis, automne 2012-2013

Cours 05

Matrices et déterminants d'ordre n

François Dubois

CA 2 Cours V

Matrices et déterminants d'ordre n

Résumé du cours.

- On note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes. Un tableau $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est composé de nm nombres (réels ici) $(a_{ij})_{1\leq i\leq n,\, 1\leq j\leq m}$. Le premier indice caractérise la ligne et le second la colonne. On effectue sans difficulté la somme $A+B$ de deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et le produit d'un réel λ par une matrice A :

(1) $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$, $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq m$

(2) $(\lambda A)_{ij} = \lambda\ A_{ij}$, $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq m$.

- Le produit $A\times B$ de deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,m}$ et $B \in \mathcal{M}_{m,p}$ est possible lorsque le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. On a alors

(3) $(A\times B)_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, b_{jk}$, $1\leq i\leq n$, $1\leq k\leq p$.

Le résultat est une matrice à n lignes et p colonnes.

- Si $n = m$, la matrice A est carrée ; on note $\mathcal{M}_n \equiv \mathcal{M}_{n,n}$. Si $m = 1$, la matrice X est formée de n lignes et une colonne. On la confond avec un vecteur X de $\mathbb{R}^n$. Alors $Y = AX$ est une matrice à n lignes et une colonne, c'est à dire un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Prop **Associativité.**

Si $A \in \mathcal{M}_{n,m}$, $B \in \mathcal{M}_{m,p}$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}$, les produits $A(BC)$ et $(AB)C$ ont un sens. Ces deux matrices (appartenant à $\mathcal{M}_{n,q}$) sont égales ;

(4) $A(BC) = (AB)C$, $A \in \mathcal{M}_{n,m}$, $B \in \mathcal{M}_{m,p}$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}$.

On note I la matrice "identité" :

(5) $$I_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } 1 \leq i = j \leq n. \end{cases}$$

- La matrice A est inversible ($A \in \mathcal{M}_n$) si et seulement si il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n$ (notée B^{-1} usuellement) telle que

(6) $AB = BA = I$.

Th **Inversibilité et déterminant**

La matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est inversible si et seulement si $\det A = 0$.

Le déterminant de A (noté $\det A$) n'a pas été défini. Nous admettons ici qu'il peut être calculé à l'aide des règles suivantes.

Règle ⓪ $n = 1$ et 2

Si $n = 1$, $\det A = A$

Si $n = 2$, $\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Règle ① Réduction de la dimension.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & \times & \cdots & \times \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

avec $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, alors

(7) $\det A = a \cdot \det B$

Règle ② Rôle analogue des lignes et des colonnes

Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ appartient à $\mathcal{M}_n$, on désigne par A^t la matrice transposée : $A^t = (a_{ji})_{1 \leq i, j \leq n}$.

(8) $(A^t)_{ij} = A_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$.

on a (9) $\det(A^t) = \det(A)$.

Règle ③ Forme alternée

Quand on échange deux lignes (deux colonnes), le déterminant change de signe.

Règle ④ Linéarité d'ordre n.

Si on multiplie tous les termes d'une

même ligne (colonne) par le nombre α, alors le déterminant est multiplié par α.

- En particulier, si une ligne (colonne) d'une matrice est nul, le déterminant associé est nul.

Règle (5) <u>Invariance par combinaison linéaire.</u>

Si on ajoute à une ligne (colonne) donnée une combinaison linéaire des autres lignes (colonnes), on ne change pas la valeur du déterminant

Prop <u>Déterminant d'une matrice diagonale</u>

$$(9) \quad \det\left[\operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\right] = \alpha_1 \dots \alpha_n$$

Prop <u>Déterminant d'une matrice triangulaire.</u>

$$(10) \quad \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2 & * & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \dots \alpha_n .$$

La preuve s'effectue par récurrence sur la dimension n.

Th <u>Le déterminant d'un produit est égal au produit des déterminants</u>

Si $A, B \in \mathcal{M}_n$, alors

(11) $\det(A \times B) = (\det A)(\det B)$, $A, B \in \mathcal{M}_n$

En particulier,

(12) $\det I = 1$

(13) $\det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det P}$, $P \in \mathcal{M}_n$, $\det P \neq 0$.

- on se place dans un espace E_n de dimension n ; il existe une <u>base</u> $(e_1, \dots, e_n)$ composée de n vecteurs de E_n. <u>Tout</u> vecteur $u \in E_n$ se décompose de façon <u>unique</u> dans cette base

(14) $\exists !\, x_j \in \mathbb{R}$, $u = \sum_{j=1}^{n} x_j\, e_j$, $u \in E_n$.

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ représente un unique <u>opérateur linéaire</u> $E_n \to E_n$, une fois choisie la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E_n. On écrit les coordonnées du vecteur image $\mathcal{A} \bullet e_j$ sur la <u>colonne</u> numéro j :

(15) $\mathcal{A} \bullet e_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, e_i$, $1 \leq j \leq m$.

Prop. <u>Composantes du vecteur image</u>

Soit $u = \sum_j x_j\, e_j \in E_n$; on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

la matrice colonne des composantes $x_j \in \mathbb{R}$ de u relativement à la base $(e_1, \dots, e_n)$. Alors $\mathcal{A}\cdot u$ a des composantes $y_1, \dots, y_n$ qui définissent un vecteur colonne $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$:

$$\mathcal{A}\cdot u = \sum_{j=1}^{n} y_j \, e_j$$

on a la relation matricielle

$$(16) \qquad Y = AX$$

avec A matrice de $\mathcal{A}$ relativement à la base $(e_1, \dots, e_n)$ donnée à la relation (15).

- Quand on change de base, on exprime le même vecteur $u \in E_n$ d'une part dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ [cf (14)] et d'autre part dans la nouvelle base $(f_1, \dots, f_n)$ de E_n. Les vecteurs $(f_1, \dots, f_n)$ sont **définis grâce aux <u>colonnes</u> p_{ij} de la <u>matrice de passage</u> P**, supposée <u>inversible</u> ($\det P \neq 0$) :

$$(17) \qquad f_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \, e_i \,, \qquad 1 \leq j \leq n.$$

On a donc $u = \sum_k z_k f_k$ également.

Prop. <u>Changement de base.</u>

Soit $Z \in \mathbb{R}^n$ le vecteurs $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$. On a

$$(18) \qquad PZ = X$$

Exercices

1) Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

2) Même question pour $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs qui annulent ce déterminant. Montrer que $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ est égal au déterminant calculé lors du premier exercice

3) Reprendre les exercices 1 et 2 avec les déterminants d'ordre 4

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}.$$

4) Factoriser les déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix}.$$

5) Pourquoi le déterminant $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ est-il nul?

Dubois 10 janvier 2013