Compléments d'Algèbre et d'Analyse

Saint Denis, automne 2012-2013

Cours 04

Introduction à la méthode de la puissance

François Dubois

CA2 Cours IV

Introduction à la méthode de la puissance

Résumé du cours

- on note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle (a, b, c sont des réels) à deux lignes et deux colonnes. on sait qu'il existe une base orthogonale de vecteurs propres (r_+, r_-)

$$(1) \qquad A\, r_\pm = \lambda_\pm\, r_\pm \; ;$$

les valeurs propres λ_+ et λ_- sont les racines de l'équation caractéristique

$$(2) \qquad \det(A - \lambda I) \equiv \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0 .$$

- Les vecteurs propres et les valeurs propres sont naturellement associés à la recherche de solutions particulières pour le système différentiel

$$(3) \qquad \frac{dX}{dt} = A \cdot X, \quad X(t) \in \mathbb{R}^2 .$$

on cherche $X(t)$ sous forme exponentielle

$$(4) \qquad X(t) = e^{\lambda t}\, r \, , \quad r \neq 0 \, , \quad r \in \mathbb{R}^2 .$$

Le vecteur $r \neq 0$ est fixé et ne dépend pas du temps. On injecte (4) dans (3) ; il vient

$\frac{dX}{dt} = \lambda e^{\lambda t} r$; $A \cdot X = e^{\lambda t} A r$.

Comme $e^{\lambda t} \neq 0$ $\forall t, \forall \lambda$, le vecteur $X(t)$ sous la forme (4) est solution du système différentiel (3) si et seulement si

$$(5) \qquad A \cdot r = \lambda r$$

c'est à dire si r est vecteur propre de A (car $r \neq 0$) associé à la valeur propre λ.

- Une fois construits $X_+ = e^{\lambda_+ t} r_+$ et $X_- = e^{\lambda_- t} r_-$, la linéarité de l'équation (3) assure que toute combinaison linéaire de la forme

$$(6) \qquad X(t) = \alpha_+ X_+(t) + \alpha_- X_-(t)$$

est solution de (3). Réciproquement, nous admettrons ici (au moins provisoirement) que toute solution $X(t)$ de (3) est nécessairement de la forme (6), où les vecteurs propres et les valeurs propres jouent un rôle essentiel.

- Nous étudions ensuite une fonction auxiliaire $\varphi(\theta)$ réelle de variable réelle définie par

$$(7) \qquad \varphi(\theta) = (X, A \cdot X), \quad X = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \in S^1$$

où S^1 désigne le cercle de centre O et rayon unité du plan.

Prop. Extrema de la fonction auxiliaire

φ est périodique de période π. Si

(8) $\Delta \equiv (a-c)^2 + 4b^2$

est nul, alors φ est constante. Si $\Delta \neq 0$, alors φ est extrémale $\left(\frac{d\varphi}{d\theta} = 0\right)$ si et seulement si $X(\theta)$ défini à la relation (7) est colinéaire à l'un des vecteurs propres r_+ ou r_-.

- L'expression algébrique de $\varphi(\theta)$ s'explicite sans difficulté

(9) $\varphi(\theta) = a\cos^2\theta + c\sin^2\theta + 2b\sin\theta\cos\theta$.

Si $b(a-c) = 0$, alors $\varphi \equiv a$ est une constante. Sinon,

(10) $\frac{d\varphi}{d\theta} = -(a-c)\sin 2\theta + 2b\cos 2\theta$

* Si $a = c$, $\varphi'(\theta) = 0$ entraîne $2\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec k entier, donc $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$; on vérifie qu'alors les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ sont vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

* Si $a \neq c$, on ne peut avoir $\cos 2\theta = 0$ si $\varphi'(\theta) = 0$ [pourquoi ?] et la condition $\varphi'(\theta) = 0$ s'écrit aussi

(11) $\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2b}{a-c}$.

- on note Arctg la fonction $\mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qui à $\varphi \in \mathbb{R}$ associe l'unique solution $z \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de l'équation $\operatorname{tg} z = \varphi$. Alors, comme la fonction tangente est périodique de période π, la relation (11) peut s'écrire aussi

(12) $$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} \frac{2b}{a-c} + k\frac{\pi}{2}, \; k \in \mathbb{Z}.$$

- on se souvient qu'un vecteur propre r associé à la valeur propre λ solution de (2) est colinéaire à $\begin{pmatrix} b \\ \lambda-a \end{pmatrix}$ ou à $\begin{pmatrix} \lambda-c \\ b \end{pmatrix}$. Il est associé à une représentation normée $R(\theta_0) = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)^t$ telle que

(13) $$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{\lambda-a}{b} = \frac{b}{\lambda-c}.$$

Alors $$\operatorname{tg} 2\theta_0 = 2\,\frac{\operatorname{tg}\theta_0}{1-\operatorname{tg}^2\theta_0} = 2\,\frac{\frac{b}{\lambda-c}}{1-\frac{\lambda-a}{b}\frac{b}{\lambda-c}}$$
$$= \frac{2b}{(\lambda-c)-(\lambda-a)} = \frac{2b}{a-c}$$

et θ_0 est de la forme (12), ce qui montre la proposition

Prop Valeurs extrémales de la fonction auxiliaire.

Soit θ_0 une valeur où $\varphi(\theta)$ est extrémale $\left(\frac{d\varphi}{d\theta}=0\right)$, avec φ calculée en (9). Alors $\varphi(\theta_0)$ est l'une des valeurs propres λ_+

en λ_- de la matrice A.

- Il suffit d'utiliser la proposition précédente : pour une valeur extrémale θ_0, on a un vecteur propre $X(\theta_0)$ pour la matrice A. Donc $A \cdot X(\theta_0) = \lambda_0 X(\theta_0)$, où $\lambda_0 \in \{\lambda_+, \lambda_-\}$ est l'une des deux valeurs propres de la matrice A. On a alors

$$\varphi(\theta_0) = (X(\theta_0), A \cdot X(\theta_0)) = (X(\theta_0), \lambda_0 X(\theta_0))$$
$$= \lambda_0 (X(\theta_0), X(\theta_0)) = \lambda_0$$

car $X(\theta_0)$ est de norme unité.

- La <u>méthode de la puissance</u> s'initie à l'aide d'un vecteur "presque quelconque"

(14) $\quad X_0 = \alpha r_+ + \beta r_-, \quad \alpha \neq 0.$

On applique la matrice A : $X_1 = A X_0 = \alpha \lambda_+ r_+ + \beta \lambda_- r_-$, puis on l'applique de nouveau : $X_2 = A X_1 = A^2 X_0 = \alpha \lambda_+^2 r_+ + \beta \lambda_-^2 r_-$. Et on recommence ! On a

(15) $\quad X_{k+1} = A \cdot X_k = A^{k+1} X_0 = \alpha \lambda_+^{k+1} r_+ + \beta \lambda_-^{k+1} r_-$,

relation qui s'établit sans difficulté par récurrence. On <u>norme</u> ensuite la suite de vecteurs obtenue. Il est pratique de supposer r_+ et r_- normés. Alors

$$(16) \quad \| \alpha_+ r_+ + \alpha_- r_- \| = \sqrt{\alpha_+^2 + \alpha_-^2}$$

en toute généralité. On pose

$$(17) \quad Y_k = \frac{X_k}{\| X_k \|}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

On a donc une suite de vecteurs normés.

Prop Convergence de la méthode de la puissance

On suppose

$$(18) \quad \lambda_+ > |\lambda_-| .$$

Alors la suite des vecteurs $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers le vecteur r_+ ou bien vers le vecteur $-r_+$ si X_0 est choisi selon (14).

- On exprime Y_k en fonction des données :

$$(19) \quad Y_k = \frac{\alpha \, \lambda_+^k \left(r_+ + \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^k r_- \right)}{|\alpha| \, |\lambda_+|^k \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^{2k}}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Compte tenu de (18) $\lambda_+ > 0$ et $\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^k \to 0$ si $k \to \infty$ (suite géométrique de raison en module strictement inférieure à 1). Donc

$$Y_k \simeq \frac{\alpha}{|\alpha|} r_+ \text{ si } k \to \infty,$$

ce qui montre la propriété. $\square$

<u>Exercice</u> Reprendre l'étude vue en cours pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres pour cette matrice A.

2) Exprimer la fonction auxiliaire
$$\varphi(\theta) = \left(\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, A \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \right)$$
en fonction de $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$.

3) Montrer que les valeurs θ_0 telles que $\varphi'(\theta_0) = 0$ correspondent aux deux vecteurs propres de A.

4) Montrer que si $\varphi'(\theta_0) = 0$, alors $\varphi(\theta_0)$ est une valeur propre de A.

5) Dessiner le graphe de la fonction $\theta \mapsto \varphi(\theta)$, en prenant en compte sa périodicité.

Dubois 17 déc 2012.