le cnam

Compléments d'Algèbre et d'Analyse

Saint Denis, automne 2012-2013

Cours 03

Diagonalisation des matrices symétriques réelles deux par deux

François Dubois

CA 2 Cours III

Diagonalisation des matrices symétriques réelles deux par deux

Résumé du cours

(Th) Changement de base

Soit $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire $E_2 \to E_2$ de matrice A relativement à une base (e_1, e_2) du plan E_2. Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une nouvelle base de matrice de passage P relativement à la base initiale (e_1, e_2). Alors la matrice $\tilde{A}$ de l'opérateur $\mathcal{A}$ relativement à la nouvelle base est donnée par

$$(1) \qquad \tilde{A} = P^{-1} A P.$$

- Les coordonnées Y de $\mathcal{A}.u$ dans l'ancienne base sont données par

$$(2) \qquad Y = A X,$$

où $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$ dans l'ancienne base; avec $X = (x_1, x_2)^t$. Quand on change de base, les nouvelles coordonnées $\tilde{X}$ de u et $\tilde{Y}$ de $\mathcal{A}.u$ respectivement satisfont à

$$(3) \qquad X = P\tilde{X}, \quad Y = P\tilde{Y}$$

On en déduit $P\tilde{Y} = A P \tilde{X}$, c'est à dire

$\tilde{Y} = \tilde{A}\tilde{X}$ avec $\tilde{A}$ donnée par la relation (1)

- Une matrice symétrique réelle A est de la forme

(4) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Pour $X = (x_1, x_2)$ et $Y = (y_1, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, le produit scalaire (X, Y) est un réel défini par

(5) $(X, Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

Prop Une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est <u>symétrique</u> si et seulement si

(6) $\forall X, Y \in \mathbb{R}^2, \ (AX, Y) = (X, AY)$.

- Il suffit de calculer $(AX, Y) - (X, AY)$ pour une matrice A quelconque et constater que cette différence se factorise.

def <u>Vecteur propre et valeur propre.</u>

Soit $\mathcal{A} : E_2 \to E_2$ un opérateur linéaire. On dit que $r \in E_2$ est un vecteur propre de $\mathcal{A}$ associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ si et seulement si

(7) $r \neq 0$ et $\mathcal{A} \circ r = \lambda r$.

- Pour calculer les valeurs propres λ, on exprime $\mathcal{J}$ relativement à une base (e_1, e_2) grâce à une matrice A. Si $x = X_1 e_1 + X_2 e_2$, les relations (7) se traduisent par la recherche de $X \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$(8) \qquad X \neq 0, \qquad A \cdot X = \lambda X.$$

- Si $X \neq 0$ est un vecteur propre, alors la matrice $B = A - \lambda I$ <u>n'est pas inversible</u>. Donc son déterminant est nul :

$$(9) \quad \begin{cases} \lambda \text{ valeur propre de } A \\ \quad \Longleftrightarrow \quad \det(A - \lambda I) = 0. \end{cases}$$

- Dans le cas où A est symétrique donnée à l'aide de (4), on a

$$(10) \quad \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2.$$

Donc la somme $\lambda_+ + \lambda_-$ des valeurs propres est égale à la trace $\operatorname{tr} A = a + c$ de la matrice A et le produit $\lambda_+ \lambda_-$ des valeurs propres est égal au déterminant $ac - b^2$ de la matrice A.

Le discriminant Δ du trinôme donné en (10) est toujours positif :

$$(11) \quad \Delta = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2.$$

Les valeurs propres λ_+ et λ_- sont solution de (10) ; on a

$$(12) \begin{cases} \lambda_+ = \frac{1}{2}\left[(a+c) + \sqrt{(a-c)^2+4b^2}\right] \\ \lambda_- = \frac{1}{2}\left[(a+c) - \sqrt{(a-c)^2+4b^2}\right] \end{cases}$$

- Prop Un vecteur propre r pour la matrice symétrique réelle A relativement à une valeur propre λ ($\lambda = \lambda_+$ ou $\lambda = \lambda_-$, cf(12)) a des coordonnées X données par

$$(13) \quad X = \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} \lambda - c \\ b \end{pmatrix}.$$

- Il suffit d'exprimer (8). On a deux équations proportionnelles car $\det(A-\lambda I) = 0$. Les deux vecteurs donnés à la relation (13) sont colinéaires ; $\det(X, \tilde{X}) = 0$ exprime exactement l'équation (13)

- Pour $\lambda = \lambda_+$, on a deux expressions possibles pour le vecteur propre r_+, à savoir $X_+ = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_+ - a \end{pmatrix}$ ou $\tilde{X}_+ = \begin{pmatrix} \lambda_+ - c \\ b \end{pmatrix}$. De même pour $\lambda = \lambda_-$, on a deux expressions possibles pour les coordonnées de r_- : $X_- = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_- - a \end{pmatrix}$ et $\tilde{X}_- = \begin{pmatrix} \lambda_- - c \\ b \end{pmatrix}$.

Prop Si Δ calculé en (11) est nul, alors $A = aI$ est proportionnelle à la matrice identité ; alors toute base (r_+, r_-) de E_2 est une base de vecteurs propres. On dit que la valeur propre $\lambda = a$ est <u>dégénérée</u>.

Prop Si Δ calculé en (11) est <u>non nul</u>, les valeurs propres λ_+ et λ_- calculées en (12) sont <u>distinctes</u>. Les vecteurs propres r_+ et r_- correspondants forment une <u>base</u>.

- Si $b \neq 0$, on forme la matrice P de passage en reportant les coordonnées de r_+ et r_-. On a par exemple

$$(14) \quad P = \begin{pmatrix} b & \lambda_- - c \\ \lambda_+ - a & b \end{pmatrix}$$

et $\det P = b^2 + \left(\dfrac{a - c - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2} \right)^2 > 0$.

Si $b = 0$, les valeurs propres valent a et c qui sont différents car $\Delta \neq 0$. Une matrice de passage possible est alors

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} a-c & 0 \\ 0 & c-a \end{pmatrix}$$

de déterminant $\neq 0$ car $a \neq c$.

Prop Orthogonalité des vecteurs propres

Si Δ donné à la relation (11) est non nul, alors les vecteurs propres r_+ et r_- calculés à l'aide de (13) sont orthogonaux.

$$(15) \quad (r_+, r_-) = 0.$$

- On a par exemple

$$(r_+, r_-) = \left(\begin{pmatrix} b \\ \lambda_+ - a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_- - c \\ b \end{pmatrix} \right)$$

$$= b\,(\lambda_+ + \lambda_- - (a+c)) = 0$$

car la somme des valeurs propres est égale à la trace de la matrice.

- Dans la base des vecteurs propres, la matrice $\tilde{A}$ de l'opérateur $\mathcal{A}$ est donnée par la <u>matrice diagonale des valeurs propres</u>

$$(16) \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}.$$

En effet, $\mathcal{A} r_+ = \lambda_+ r_+ = \lambda_+ r_+ + 0 \cdot r_-$ et

$\mathcal{A} \cdot r_- = \lambda_- r_- = 0 \cdot r_+ + \lambda_- r_-$, qui fournit une décomposition explicite de ces vecteurs relativement à la base des vecteurs propres.

Exercices

ex 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) calculer les valeurs propres de A et proposer des vecteurs propres associés.

b) Vérifier que ces vecteurs propres sont bien orthogonaux.

c) Quelle est la matrice de passage P entre la base canonique $((1,0),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$ et la base des vecteurs propres ?

d) Calculer P^{-1} puis vérifier que $P^{-1} A P = \Lambda$, matrice diagonale composée des deux valeurs propres de la matrice A. Pouvait-on prévoir le résultat ?

ex 2 Calculer les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ solution du système différentiel

$$\frac{dx}{dt} = x(t) + y(t) \, ; \quad \frac{dy}{dt} = x(t) - y(t).$$

avec la condition initiale $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.
<on pourra établir un lien avec le premier exercice>.

Dubois 11 décembre 2012.