Compléments d'Algèbre et d'Analyse

Saint Denis, automne 2012-2013

Cours 02

Matrices deux par deux

François Dubois

CA 2 Cours II | Matrices deux par deux

3 décembre 2012

Résumé du cours

- Une matrice deux par deux est un tableau

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

de quatre nombres réels (pour fixer les idées). La grande découverte de Jordan (fin 19°) et Dirac (1930) est qu'on peut faire des calculs avec de tels tableaux. On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à deux lignes et deux colonnes dans la suite. Nous utiliserons la notation (1), mais également

$$(2) \quad A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq 2}$$

où i est l'indice de ligne et j l'indice de la colonne. En rapprochant les relations (1) et (2), il vient

$$(3) \quad a_{11} = a,\ a_{12} = c,\ a_{21} = b,\ a_{22} = d.$$

- On peut <u>additionner</u> deux matrices en additionnant terme à terme chacun de leurs éléments

$$(4) \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\alpha & c+\gamma \\ b+\beta & d+\delta \end{pmatrix}.$$

- On peut multiplier une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$; on multiplie chaque élément de A par le nombre λ :

$$(5) \quad \lambda \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda c \\ \lambda b & \lambda d \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- On peut surtout multiplier deux matrices A et B pour définir une nouvelle matrice $A \times B$. Si A et B sont deux par deux, il en est de même de $A \times B$:

$$(6) \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + c\beta & a\gamma + c\delta \\ b\alpha + d\beta & b\gamma + d\delta \end{pmatrix}.$$

Prop ① Produit de deux matrices.

Pour A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ d'éléments génériques (a_{ij}) [cf (2)] et $(b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ {i, indice de ligne et j indice de colonne}, l'élément "i, j" du produit AB (ligne i et colonne j) est donné par

$$(7) \quad (AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} \, b_{kj} \begin{cases} \text{ligne } i \\ \text{colonne } j. \end{cases}$$

Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

- Il suffit de reprendre (6) en changeant les notations.

on a des propriétés faciles qui relient les trois opérations d'addition, multiplication par un scalaire et multiplication des matrices. Ainsi

(8) $(\lambda+\mu)A = (\lambda A)+(\mu A)$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$

(9) $\lambda(A+B) = (\lambda A) + (\lambda B)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(10) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu) A$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$

(11) $A\times(B+C) = (A\times B)+(A\times C)$

qui exprime la distributivité de la multiplication des matrices relativement à l'addition.

Prop 2 <u>Associativité du produit de matrices.</u>

Soient A, B, C trois matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
on a la propriété générale

(12) $A\times(B\times C) = (A\times B)\times C$;

le parenthésage est superflu pour le produit des matrices

• La preuve est un <u>exercice</u> laissé au lecteur. Il suffit d'utiliser plusieurs fois la définition (7).

Prop 3 <u>Element neutre pour la multiplication</u>

on note I la "matrice identité"

(13) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors quelque soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a

(14) $$A \times I = I \times A = A$$

- La multiplication à gauche ou à droite par la matrice identité ne modifie pas le résultat. La preuve de (14) est très simple. Elle est laissée au lecteur.

Prop (4) Non commutativité du produit de deux matrices.

En général, pour $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $AB \neq BA$

- Il suffit de le vérifier dans un cas particulier; par exemple avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prop (5) Diviseurs de zéro.

Il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ toutes deux non nulles telles que $AB = 0$.

- Il suffit de le vérifier avec $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il est naturel de chercher un inverse $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que

$$(15) \qquad A \times X = X \times A = I$$

Th ① Matrices inversibles.

Pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par (1), on introduit le déterminant de A, $\det A$, grâce à la relation

$$(16) \qquad \det A = ad - bc = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

* Si $\det A = 0$, alors A est un diviseur de zéro et l'équation (15) n'a jamais de solution.
* Si $\det A \neq 0$, alors A est inversible (on écrit aussi $A \in GL_2(\mathbb{R})$) ; il existe une unique matrice X telle (15) a lieu.

- Avec la notation (1), on pose

$$(17) \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Alors on a

(18) $A \times \widetilde{A} = \widetilde{A} \times A = (\det A)\, I$

ce qui montre l'essentiel du théorème. Si $\det A \neq 0$, l'inverse A^{-1} de A [la matrice X solution de l'équation (15)] est donnée par

(19) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\, \widetilde{A}$.

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ permet de définir une <u>transformation linéaire</u> $\mathcal{A}$ du plan E_2.
On se donne une <u>base</u> (e_1, e_2) du plan E_2 : <u>tout</u> vecteur $u \in E_2$ peut se décomposer de manière <u>unique</u> sous la forme

(20) $u = x\, e_1 + y\, e_2\,, \quad x, y \in \mathbb{R}\,,\ u, e_1, e_2 \in E_2$

Avec la notation (1), on définit d'abord $\mathcal{A}\cdot e_1$ et $\mathcal{A}\cdot e_2$: la première <u>colonne</u> de la matrice A (resp. la seconde colonne) donne les coordonnées de $\mathcal{A} e_1$ (resp. de $\mathcal{A} e_2$) relativement à la base (e_1, e_2) :

(21) $\mathcal{A}\cdot e_1 = a e_1 + b e_2\ ; \quad \mathcal{A}\cdot e_2 = c e_1 + d e_2$.

Puis l'image $\mathcal{A}\cdot u$ de $u \in E_2$ arbitraire est évaluée par linéarité grâce à la relation (20) :

(22) $\mathcal{A}\cdot u = x\, \mathcal{A}\cdot e_1 + y\, \mathcal{A}\cdot e_2$.

- Il est utile de noter les coordonnées (x,y) de $u \in E_2$ (voir la relation (20)) dans une matrice X à deux lignes et une colonne :

(23) $\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Prop 6 Coordonnées après transformation

Les coordonnées de $A.u$ (avec u décomposé dans la base (e_1, e_2) à l'aide de (20)) sont données par le produit AX

- Il suffit de terminer le calcul (22), sachant que

(24) $\quad A.X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}$

- Une matrice deux par deux est un outil mathématique utile pour décrire un changement de base (voir la figure 1) on fabrique deux vecteurs ε_1 et ε_2 à partir de (e_1, e_2) :

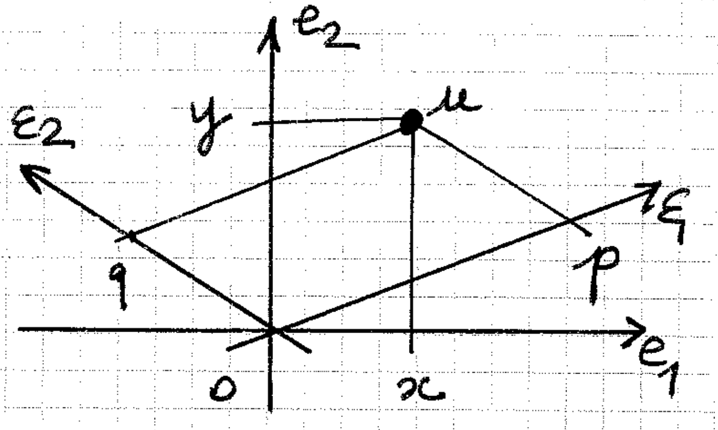

Figure 1.

(25) $\quad \varepsilon_1 = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad \varepsilon_2 = \gamma e_1 + \delta e_2$

et on écrit les coordonnées de ε_1 dans la première colonne (resp. les coordonnées de ε_2 dans la seconde colonne) d'une matrice P, dite "matrice de passage" :

$$(26) \qquad P = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

On cherche à écrire le point $u \in E_2$ dans la nouvelle base, à l'aide de coordonnées p et q réelles :

$$(27) \qquad u = p\,\varepsilon_1 + q\,\varepsilon_2 \quad , \; p, q \in \mathbb{R},\; u, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in E_2$$

(voir aussi la figure 1).

Prop (7) **Changement de base**

La matrice P est inversible : $P \in Gl_2(\mathbb{R})$. Les coordonnées (p,q) de $u \in E_2$ dans la nouvelle base (cf (27)) se calculent à partir des coordonnées (x,y) dans l'ancienne base (cf (20)) par résolution du système

$$(28) \qquad P\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- On introduit la décomposition (25) au sein de (27). D'où une seconde décomposition de u dans l'ancienne base :

$$(29) \quad u = (p\alpha + q\gamma)\,e_1 + (p\beta + q\delta)\,e_2 .$$

Cette décomposition est nécessairement identique à (20). De plus le système (28) a toujours une solution, donc $\det P \neq 0$ et P est inversible.

Exercices

ex 1 Montrer l'associativité du produit des matrices deux par deux :

$$A(BC) = (AB)C, \quad \forall A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

ex 2 Pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par (1), on pose

$$\operatorname{tr} A = a + d \quad (\text{trace de } A)$$

Montrer l'invariance cyclique de la trace.

ex 3 Pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par la relation (1), on rappelle que $\det A = ad - bc$. Montrer la relation $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ pour deux matrices carrées deux par deux

ex 4 Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec J : $AJ = JA$. Exprimer cet ensemble sous forme d'une combinaison linéaire de deux matrices.

ex 5 Soit t la transformation du plan E_2 de matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On introduit une nouvelle base $\varepsilon_1 = e_1 + e_2$, $\varepsilon_2 = e_1 - e_2$. Calculer $t \cdot \varepsilon_1$ et $t \cdot \varepsilon_2$ dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. En déduire la matrice A de t relativement à la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Si P est la matrice de passage, montrer qu'on a $A = P^{-1} \cdot J \cdot P$.

Dubois 4 dec 2012.