Mathématiques Appliquées pour le Génie des Procédés et l'Energétique

Paris, automne 2018

Equations différentielles linéaires

Notes du cours 08

Amélie Danlos, Marie Debacq, François Dubois

MA-GPE (8)

Equations différentielles linéaires

5 décembre 2018.

• Problème modèle

Motivé par des applications aussi variées que le placement financier, la décharge d'un conden-sateur ou le processus d'évolution de populations en biologie.

On se donne $\tau > 0$ et un nombre réel u_0. On cherche une fonction $t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}$ inconnue pour $t > 0$ de sorte que on dispose d'une part d'une équation d'évolution dynamique

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u(t) = 0 \quad , \ t > 0$$

et d'autre part d'une condition initiale :

$$u(0) = u_0 \qquad (\text{à } t = 0) .$$

Ce problème a une solution unique détaillée au paragraphe suivant.

• Résolution analytique du problème modèle

Avec les conditions énoncés plus haut, on a

$$u(t) = \exp(-t/\tau)\, u_0 \, , \ t \geq 0$$

∘ La preuve de cette proposition demande simplement d'introduire une fonction auxiliaire $v(t)$ définie par

$$v(t) = u(t)\exp\left(\frac{t}{\tau}\right).$$

Alors v est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables et

$$\frac{dv}{dt} = \frac{du}{dt}\, e^{t/\tau} + u(t)\left[\frac{1}{\tau} e^{t/\tau}\right]$$

$$= \left[\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u(t)\right] e^{t/\tau}$$

$= 0$ car $u(t)$ est solution de $\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = 0$.

Donc la fonction v est constante sur l'intervalle $[0,t]$. En particulier,

$v(t) = v(0) = u(0)\, e^{0/\tau} = u(0)$ (car $e^{0} = 0$)

$= u_0$ car $u(0) = u_0$.

Donc $u(t)\, e^{t/\tau} = u_0$ pour tout $t \geq 0$. On en déduit que $u(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) u_0$ comme annoncé.

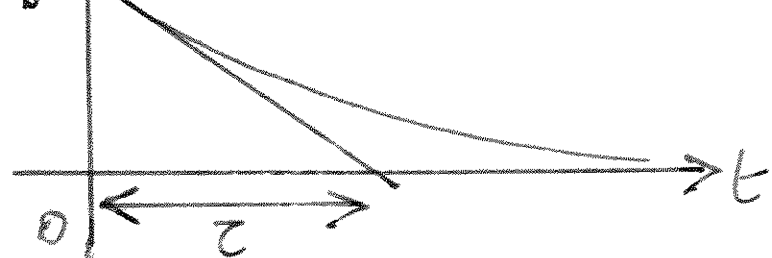


Figure 1. Solution analytique du problème

- Système dynamique

De façon très générale, on se donne une fonction régulière f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et une valeur initiale $u_0 \in \mathbb{R}$. On cherche, pour $t>0$, une fonction $t \mapsto u(t)$, $u(t) \in \mathbb{R}$, de sorte que

$$\frac{du}{dt} = f(u(t)) \,, \quad t>0 \qquad [\text{dynamique}]$$
$$u(0) = u_0 \qquad [\text{condition initiale}].$$

En général, on ne sait dire que peu de choses satisfaisantes pour l'ingénieur de ce système composé d'une part d'une équation différentielle qui pilote l'évolution et d'autre part d'une condition à $t=0$.

Le cas modèle correspond à $f(u) = \frac{-u}{\tau}$.

- Schéma d'Euler explicite (1750)

On renonce à une connaissance complète de la fonction u pour toutes les valeurs du temps t. On se contente d'évaluer une grandeur approchée après échantillonnage. On se donne donc un pas d'échantillonnage

$$\Delta t > 0$$

ou pas de discrétisation. On cherche une valeur approchée u^k (l'indice entier k est écrit par habitude en position supérieure) de la valeur "exacte" $u(k\Delta t)$ en un instant multiple entier du pas de temps :

$$u^k \approx u(k\Delta t), \quad k \in \mathbb{N}$$

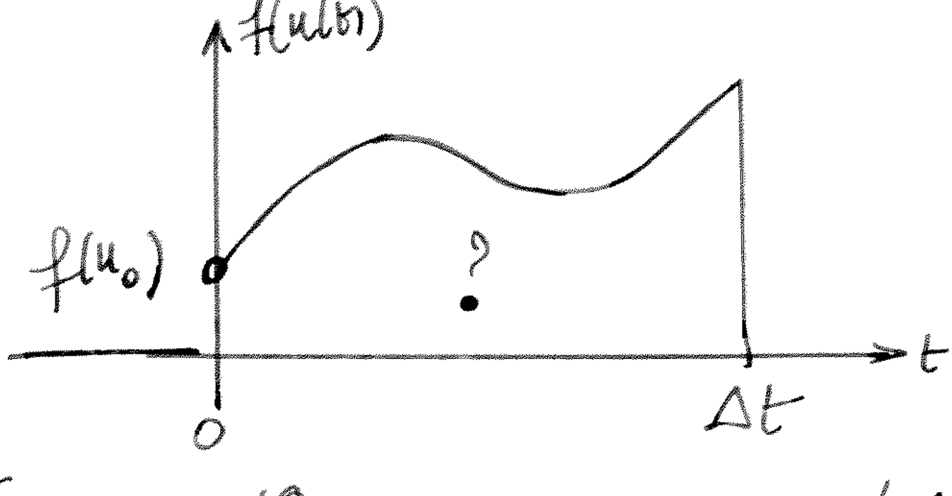
- à $t=0$, on pose bien naturellement

$$u^0 = u_0 \qquad (t=0).$$

- <u>Calcul de u^1</u> à partir de u^0.

On écrit le système dynamique entre les instants 0 et Δt à l'aide d'une intégrale :

$$u(\Delta t) = u(0) + \int_0^{\Delta t} f(u(t))\, dt.$$



<u>Figure 2</u>. Comment approcher l'intégrale $\int_0^{\Delta t} f(u(t))\,dt$?

Avec la méthode des rectangles à gauche, on a

$$\int_0^{\Delta t} f(u(t))\, dt \simeq \Delta t \; f(u_0).$$

On en déduit, compte tenu de la condition initiale $u(0) = 0$:

$$u(\Delta t) \simeq u_0 + \Delta t \, f(u_0)$$

Le terme de droite de cette relation définit la méthode d'approximation numérique :

$$u^1 = u_0 + \Delta t \, f(u_0).$$

- La question qui demeure en souffrance est celle d'un bon choix du pas de temps $\Delta t > 0$.
Il n'y a pas de recette miracle, même si on peut dire des choses raisonnables pour le problème modèle.

- Calcul de u^{k+1} si u^k est connu.

On se donne $u^k \simeq u(k\Delta t)$, avec k entier.
La solution "mathématique" du système dynamique satisfait à

$$u((k+1)\Delta t) = u(k\Delta t) + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} f(u(t))\, dt.$$

Cette intégrale qui reste inconnue est approchée par des rectangles à gauche

$$\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} f(u(t))\, dt \simeq \Delta t \, f(u(k\Delta t)) \simeq \Delta t f(u^k)$$

On en déduit :

$$u^{k+1} \simeq u((k+1)\Delta t) \simeq u^k + \Delta t\, f(u^k).$$

Le schéma d'Euler explicite consiste à définir u^{k+1} par le terme de droite précédent :

$$u^{k+1} = u^k + \Delta t\, f(u^k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

- on teste facilement la méthode d'Euler explicite précédente pour le problème modèle où $f(u) = -u/\tau$ dans le cas $\tau = 1$ pour fixer les idées.

- Attention aux instabilités !

Si $\left|\frac{\Delta t}{\tau}\right| > 2$, on peut démontrer que le schéma d'Euler pour le problème modèle :

$$u^{k+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) u^k$$

est instable. La "solution numérique" n'a alors plus rien à voir avec la solution $u(t)$ de l'équation différentielle.

Le lecteur est invité à faire l'expérience avec $T_{max} = 25$ et 10 pas de temps ($\Delta t = T_{max}/10$ est alors supérieur à 2)

En pratique, il est conseillé de choisir un pas de temps Δt au plus égal à la constante de temps du processus de relaxation :

$$0 < \Delta t \leq \tau.$$

La difficulté reste entière pour une loi d'évolution $f(u)$ arbitraire ; en effet, on ne connaît pas la constante de temps τ a priori.

- <u>Schéma d'Euler implicite.</u>

On part toujours, pour calculer u^{k+1} en fonction de $u^k \simeq f(k\Delta t)$ de la relation intégrale

$$u((k+1)\Delta t) = u(k\Delta t) + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} f(u(t))\,dt.$$

On approche l'intégrale inconnue (voir la figure 2) par une formule des rectangles à droite :

$$\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} f(u(t))\,dt \simeq \Delta t\, f(u((k+1)\Delta t))$$

Ensuite, comme $u^{k+1} \simeq u((k+1)\Delta t)$, on a

$$\Delta t\, f(u((k+1)\Delta t)) \simeq \Delta t\, f(u^{k+1}).$$

On en déduit

$$u((k+1)\Delta t) \simeq u^k + \Delta t\, f(u^{k+1}).$$

L'expression de droite définit le nouvel algorithme :

$$u^{k+1} = u^k + \Delta t\, f(u^{k+1}),\quad k \in \mathbb{N}$$

C'est une <u>équation</u>, avec u^k donné et u^{k+1} inconnu :

$$u^{k+1} - \Delta t \, f(u^{k+1}) = u^k .$$

Pour cette raison, on parle de schéma implicite. Une fois défini, le schéma demande d'avoir recours à un nouvel algorithme (dichotomie, Newton, etc) pour calculer effectivement u^{k+1} à la nouvelle itération.

- Pour le problème modèle, $f(u) = -\frac{u}{\tau}$ et la relation précédente s'écrit

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{\tau}\right) u^{k+1} = u^k .$$

Elle se résout par une simple division dans ce cas linéaire. S'il est plus compliqué que le schéma explicite, le schéma implicite est inconditionnellement stable. On le vérifie dans l'expérience suggérée page 6 : $T_{max} = 25$ avec seulement 10 pas de temps. On a bien u^k très proche de zéro (comme la fonction exponentielle), alors que ce n'est pas le cas pour le schéma explicite.

- <u>Schéma de Crank-Nicolson</u> (1947)

Les schémas d'Euler sont convergents, mais pas assez précis pour les applications, où on veut garder un nombre de pas de temps tout en ayant des résultats assez précis.

On utilise une méthode des trapèzes pour approcher l'intégrale de la figure 2 :

$$\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} f(u(t))\,dt \simeq \frac{\Delta t}{2}\Big[f(u(k\Delta t)) + f(u((k+1)\Delta t))\Big]$$

Avec les approximations $u^{k+1} \simeq u((k+1)\Delta t)$ et $u^k \simeq u(k\Delta t)$, on déduit de l'équation intégrale fondamentale la relation :

$$u((k+1)\Delta t) \simeq u^k + \frac{\Delta t}{2}\left[f(u^k) + f(u^{k+1})\right]$$

Comme pour les autres schémas, on <u>définit</u> la valeur approchée u^{k+1} à l'aide du membre de droite de la relation précédente :

$$u^{k+1} = u^k + \frac{\Delta t}{2}\left[f(u^k) + f(u^{k+1})\right].$$

Il s'agit encore d'un schéma <u>implicite</u> : la relation précédente est en fait une équation d'inconnue u^{k+1} :

$$u^{k+1} - \frac{\Delta t}{2} f(u^{k+1}) = u^k + \frac{\Delta t}{2} f(u^k).$$

- Pour le problème modèle, cette équation s'écrit

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{2\tau}\right) u^{k+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{2\tau}\right) u^k$$

qui se résout simplement en

$$u^{k+1} = \frac{1 - \Delta t/2\tau}{1 + \Delta t/2\tau}\, u^k$$

L'expérimentation numérique montre que le schéma de Crank-Nicolson est beaucoup plus précis. Il reste stable pour le problème modèle (mais peut devenir instable pour une dynamique non linéaire quelconque f). Il a bien sûr le défaut d'être implicite : à chaque pas de temps, il faut résoudre une équation.

• Schéma de Heun (1900).

L'idée est d'éviter d'utiliser un schéma implicite, tout en gardant la précision "d'ordre deux" du schéma de Crank-Nicolson. Rappelons que ce dernier schéma peut s'écrire

$$u^{k+1} = u^k + \frac{\Delta t}{2} f(u^k) + \frac{\Delta t}{2} f(u^{k+1})$$

Le dernier terme est multiplié par Δt. Donc on peut se permettre une "petite" erreur sur la variable u^{k+1} écrite au membre de droite. On pose alors

$$u^{k+1} \simeq \tilde{u} = u^k + \Delta t \, f(u^k).$$

Cette phase, dite de prédiction est un simple schéma d'Euler explicite. On remplace alors dans l'expression du schéma de Crank-Nicolson $f(u^{k+1})$ par $f(\tilde{u})$:

$$u^{k+1} = u^k + \frac{\Delta t}{2}\left(f(u^k) + f(\tilde{u})\right).$$

Cette seconde étape est le <u>correcteur</u> du schéma de Heun. C'est un schéma explicite : u^{k+1} est donné par une "formule" en fonction de u^k, Δt et la fonction f :

$$u^{k+1} = u^k + \frac{\Delta t}{2} f(u^k) + \frac{\Delta t}{2} f\left(u^k + \Delta t\, f(u^k)\right)$$

- Pour programmer le schéma de Heun, on conseille l'algorithme suivant, qui consiste à faire deux étapes du schéma d'Euler-explicite, puis à prendre une moyenne :

$$\tilde{u} = u^k + \Delta t\, f(u^k)$$

$$\tilde{\tilde{u}} = \tilde{u} + \Delta t\, f(\tilde{u})$$

$$u^{k+1} = \frac{1}{2}\left(u^k + \tilde{\tilde{u}}\right).$$

En effet, on a le calcul suivant :

$$\begin{aligned} u^{k+1} &= \frac{1}{2} u^k + \frac{1}{2}\left(u^k + \Delta t\, f(u^k)\right) + \frac{1}{2}\Delta t\, f(\tilde{u}) \\ &= \frac{1}{2} u^k + \frac{1}{2}\left(\tilde{u} + \Delta t\, f(\tilde{u})\right) \\ &= \frac{1}{2} u^k + \frac{1}{2}\tilde{\tilde{u}}. \end{aligned}$$

- Pour le problème modèle, la mise en œuvre s'effectue sans difficulté :

$$\tilde{u} = (1 - \Delta t/\tau)\, u^k$$
$$\tilde{\tilde{u}} = (1 - \Delta t/\tau)\, \tilde{u}$$
$$u^{k+1} = \frac{1}{2}\left(u^k + \tilde{\tilde{u}}\right).$$

Ce schéma de Heun, explicite et d'ordre deux, peut donner naissance à des instabilités si Δt est choisi trop grand. Ici encore, on conseille le choix

$$0 < \Delta t \leq \tau.$$