Mathématiques Appliquées pour le Génie des Procédés et l'Energétique

Paris, automne 2018

Résolution numérique d'équations

Notes du cours 04

Amélie Danlos, Marie Debacq, François Dubois

MA-GPE 4

Résolution numérique d'équations

F. Dubois
31 octobre 2018.

1 Premier degré

- On se donne $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors l'équation
$$ax + b = 0$$
a une et une seule solution : $x = -\frac{b}{a}$.

- Ce résultat est fondamental; en particulier la condition $a \neq 0$.

- Parfois, une équation du premier degré est cachée derrière une équation en apparence plus compliquée. En vue du génie des Procédés, on se donne $r > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ et on cherche x réel de sorte que
$$\frac{r^x - 1}{r^{x+1} - 1} = \beta.$$

Si on pose $X = r^x$ (qui est nécessairement > 0), l'équation précédente peut s'écrire aussi:

$$\frac{X-1}{rX-1} = \beta$$

qu'on transforme en une équation du premier degré :

$$(1-r\beta)X = 1-\beta .$$

Si $\beta \neq \frac{1}{r}$, cette équation a une unique solution

$$X = \frac{1-\beta}{1-r\beta} .$$

□ on doit exprimer la condition $X > 0$. Or X a le signe de $(1-\beta)(1-r\beta)$ qui est > 0 en dehors de l'intervalle qui relie les deux racines 1 et $\frac{1}{r}$. On distingue plusieurs cas :

1) $r = 1$.
alors $X = 1$ pour tout β qui semble indiquer que l'équation initiale n'a pas de solution car 1^x vaut toujours 1 pour tout x.

2) $r > 1$ alors $\frac{1}{r} < 1$ et β doit être soit plus petit que $\frac{1}{r}$: $\beta < \frac{1}{r}$
ou plus grand que 1 : $\beta > 1$.

3) $r < 1$ alors $1 < 1/r$.
Dans ce cas $\beta < 1$ ou $\beta > \frac{1}{r}$.

Dans chacun de ces cas $X > 0$, donc x s'obtient grâce à la relation $r^x = X$. Donc

$$x = \frac{\log\left(\frac{1-\beta}{1-r\beta}\right)}{\log(r)} .$$

② Second degré.

- On se donne $a \neq 0$, b et c ; on cherche $x \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

- Un premier cas particulier consiste à prendre $a = 1$, $b = 0$ et $c = -\alpha$:

$$x^2 = \alpha.$$

Si $\alpha < 0$, cette équation n'a pas de solution réelle. Si $\alpha = 0$, la seule solution est $x = 0$ (racine double). Si $\alpha > 0$, l'équation $x^2 = \alpha$ a deux solutions : une positive $x_+ = \sqrt{\alpha}$ et une négative : $x_- = -\sqrt{\alpha}$.

- Dans le cas général, on cherche à former un carré parfait, après avoir divisé par a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}.$$

Donc l'équation de départ admet l'écriture équivalente

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{4a^2}(b^2 - 4ac).$$

- On voit apparaître le discriminant Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Si $\Delta < 0$ l'équation du second degré n'a pas de solution.

Si $\Delta = 0$, le trinome ax^2+bx+c est proportionnel à un carré parfait et

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Si $\Delta > 0$, on dispose de deux solutions ; d'une part $x_- = -\frac{b}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{\Delta}$

et d'autre part $x_+ = -\frac{b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{\Delta}$.

- On peut simplifier les expressions précédentes en écrivant $b = 2b'$. L'équation

$$ax^2 + 2b'x + c = 0$$

a deux racines réelles distinctes lorsque

$$b'^2 - ac > 0.$$

Elles s'écrivent

$$x_- = \frac{1}{a}\left(-b' - \sqrt{b'^2 - ac}\right), \quad x_+ = \frac{1}{a}\left(-b' + \sqrt{b'^2 - ac}\right)$$

3) Troisième degré.

- On peut d'abord montrer que toute équation du 3e degré peut se ramener à l'équation canonique

$$x^3 = px + q$$

où p et q sont des paramètres réels.
On dispose (depuis Nicolo Tartaglia en 1535) de formules générales (avec des radicaux) pour résoudre cette équation. Ces relations sont compliquées et peu utilisées en pratique.

- On préfère aux méthodes de l'algèbre les méthodes de l'Analyse, c'est à dire l'étude de fonctions de variable réelle. Résoudre l'équation $x^3 = px + q$, c'est chercher les points où la fonction f définie par
$$f(x) = x^3 - px - q$$
s'annule, c'est à dire les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 0$.

- On étudie les variations de la fonction f afin d'isoler les valeurs de x telles que $f(x) = 0$. On a
$$f'(x) = 3x^2 - p$$

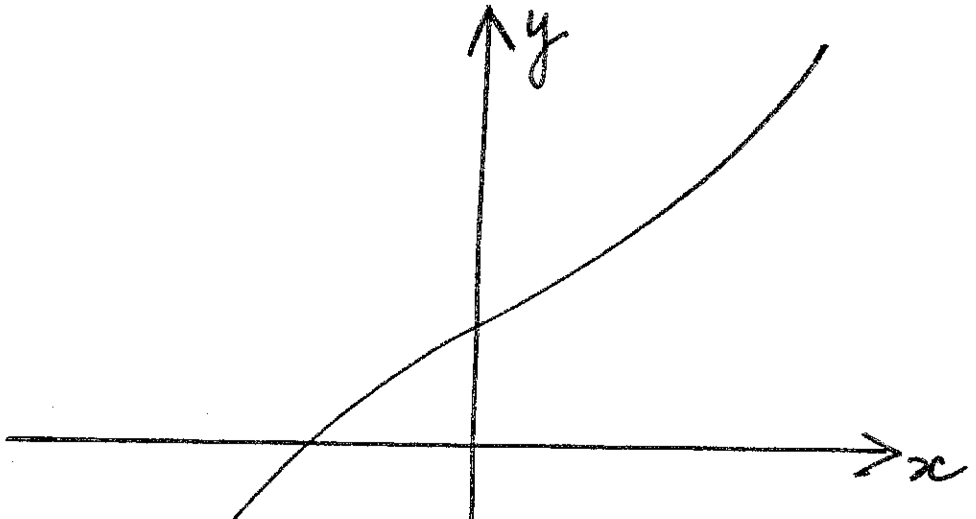

Figure 1. Allure de la fonction $f(x) = x^3 - px - q$ si p est négatif.

Si $p<0$, $f'(x)>0$ pour tout x ; f est strictement croissante, de plus $f(x) \to -\infty$ si $x \to -\infty$ et enfin $f(x) \to +\infty$ si $x \to +\infty$. Donc il existe une unique valeur de $\xi \in \mathbb{R}$ telle que $f(\xi)=0$ (voir la figure 1).

Si $p=0$, le problème se ramène à l'extraction d'une racine cubique.

- Si $p>0$, on dispose de deux valeurs $\pm \sqrt{\frac{p}{3}}$ qui annulent la dérivée. La fonction f est croissante de $-\infty$ à $M = f\left(-\sqrt{\frac{p}{3}}\right)$, décroissante de $f\left(-\sqrt{\frac{p}{3}}\right)$ à $f\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right) = m$ dans l'intervalle $\left[-\sqrt{\frac{p}{3}}, \sqrt{\frac{p}{3}}\right]$ puis croissante de m à $+\infty$ si $x \geqslant \sqrt{p/3}$. On a

$$M = \left(-\frac{p}{\sqrt{3}}\right)^3 - p\left(-\sqrt{\frac{p}{3}}\right) - q = \frac{2}{3\sqrt{3}} p\sqrt{p} - q$$

$$m = \left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^2 - p\sqrt{\frac{p}{3}} - q = -\frac{2}{3\sqrt{3}} p\sqrt{p} - q \leqslant M.$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{p}{3}}$		$+\sqrt{\frac{p}{3}}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

Tableau de variations de $f(x) = x^3 - (px+q)$ lorsque $p>0$.

Si $m>0$ alors $M \geqslant m > 0$ et on a une racine $\xi < -\sqrt{p/3}$

Si $M<0$, alors $m \leqslant M < 0$; la racine unique satisfait à $\xi > \sqrt{p/3}$

Si $mM<0$, alors $m<0<M$, on a 3 racines $\xi_1 < -\sqrt{p/3} < \xi_2 < \sqrt{p/3} < \xi_3$ (Figure 2).

Notons que ce cas correspond à

$$0 < -mM = \left(\frac{2p}{3\sqrt{3}}\sqrt{p} + q\right)\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}p\sqrt{p} - q\right) = \frac{4}{27}p^3 - q^2 .$$

- La synthèse de cette étude est que si $4p^3 - 27q^2 > 0$, l'équation $x^3 = px + q$ a 3 racines distinctes. Si $4p^3 - 27q^2 = 0$, on a une racine double et une autre racine [exercice laissé au lecteur]. Si

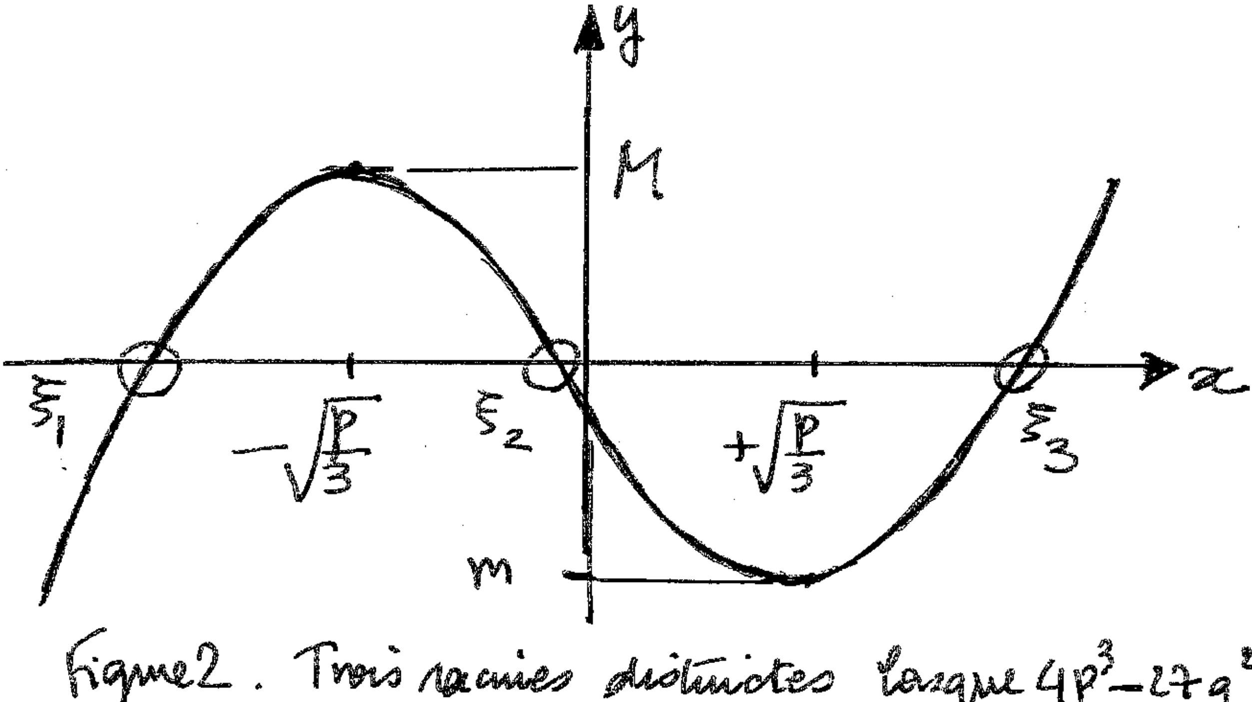

Figure 2. Trois racines distinctes lorsque $4p^3 - 27q^2 > 0$

$4p^3 - 27q^2 < 0$, (cas qui contient en particulier le cas $p < 0$), alors on dispose d'une unique racine réelle ξ pour l'équation $x^3 = px + q$

- Ce résultat pour l'équation du 3° degré a demandé d'étudier une fonction. Cette étude nous a permis de déterminer le nombre et un premier encadrement des solutions de l'équation. Elle est tout à fait caractéristique des méthodes de l'analyse mathématique

④ Méthodes de l'analyse mathématique.

- Les cas vus plus haut sont exceptionnels dans l'univers de toutes les équations. En général, on ne peut dire que très peu de choses des éventuelles solutions d'une équation. Le point fondamental est l'hypothèse de <u>continuité</u> de la fonction f telle qu'on cherche x qui satisfait à $f(x) = 0$. Toutes les fonctions usuelles (polynomes, exponentielle) sont continues puisque dérivables. La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 mais elle est continue comme application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ [$|x| = \max(x, -x)$]. Il existe des fonctions discontinues comme la fonction de Heaviside H :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x>0 . \end{cases}$$

Elle "saute" de 0 à + 1 quand on franchit la valeur $x=0$. Pour ne pas alourdir l'exposé, nous ne donnons pas ici la définition complète d'une fonction continue. Il suffit de savoir qu'on peut dessiner son graphe, la courbe d'équation $y=f(x)$ sans avoir à soulever son crayon !

th des valeurs intermédiaires.

On se donne deux nombres réels $a<b$, f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a)\,f(b)<0$ alors il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $f(\xi)=0$.

- Si la fonction change de signe aux bornes de l'intervalle, alors elle a (au moins) une racine à l'intérieur de cet intervalle (Figure 3).

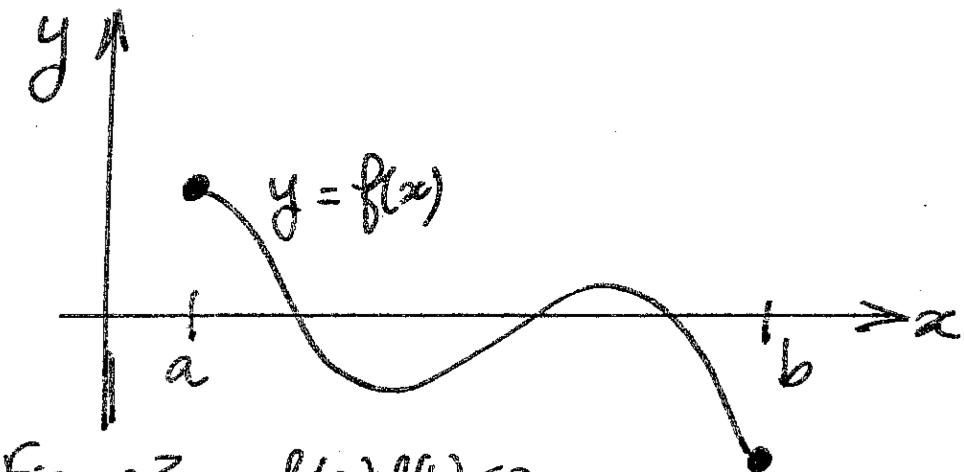

Figure 3. $f(a)f(b)<0$.

- Si de plus la fonction f est strictement croissante ou strictement décroissante sur l'intervalle $[a,b]$, alors il existe un unique $\xi \in]a,b[$ tel que $f(\xi)=0$.

- En particulier si f est dérivable sur $]a,b[$ et si $f'(x)>0$ pour $x \in]a,b[$ (f est strictement croissante] ou si $f'(x)<0$, $\forall x \in]a,b[$ (et alors f est strictement décroissante).

- Le théorème des valeurs intermédiaires ne dit rien sur la façon de calculer (limites)/la racine(s). Mais il assure que d'un point de vue mathématique, on va trouver au moins une racine dans l'intervalle considéré.

⑤ algorithme de Newton.

- Commençons par un exemple avec la fonction

$$f(x) = x - \frac{a}{x}, \quad x>0$$

qu'on étudie pour $x>0$ avec un paramètre $a>0$.
La fonction f est dérivable (donc continue) sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et $f'(x) = 1 + \frac{a}{x^2}$.
Donc elle est strictement croissante.
De plus, $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
La fonction f admet une unique racine $\xi>0$ qui satisfait à $f(\xi)=0$. On remarque

que $\xi^2 = a$ avec $\xi > 0$. Le problème posé est en fait le calcul (numérique) du nombre $\sqrt{a}$.

- Itérations

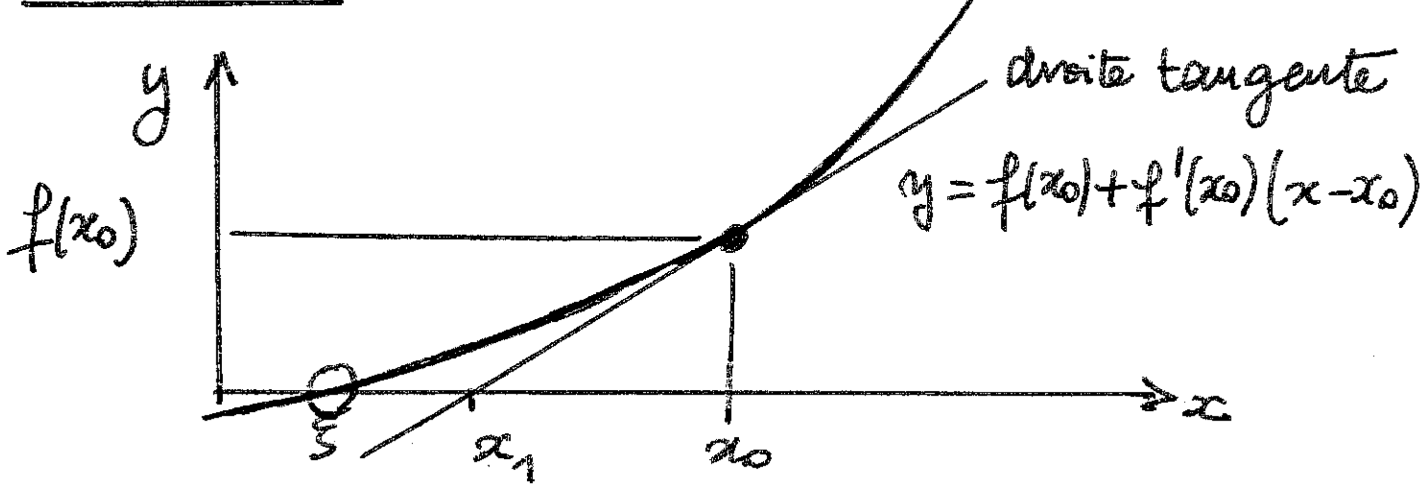

Figure 4 Itération de l'algorithme de Newton

- On se contente de chercher à approcher ξ tel que $f(\xi) = 0$. On suppose avoir une première idée d'une approximation possible de ξ : $x_0 \simeq \xi$. Afin d'améliorer cette approximation, on va résoudre une équation du premier degré, où on remplace la fonction f par son approximation affine g au voisinage de x_0. On sait que (voir aussi la figure 4)

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

On passe de x_0 à x_1 (Figure 4) en cherchant x tel que $g(x) = 0$.

on doit résoudre une équation du premier degré ! Attention, le coefficient "a" de la variable x doit être <u>non nul</u> :

$$f'(x_0) \neq 0.$$

Si c'est le cas, on calcule x_1 tel que $g(x_1) = 0$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0$$

c'est à dire

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

- une fois x_1 connu, on recommence le processus. On dispose donc d'un <u>algorithme</u> qui permet (quand il converge !) d'approcher la solution ξ de l'équation $f(\xi) = 0$. Si après la k^e étape, on se trouve en $x = x_k$, on "linéarise" la fonction f autour de x_k, on la remplace par la fonction affine g_k telle que

$$g_k(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

et on résout l'équation $g_k(x) = 0$ pour calculer x_{k+1} :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

- Attention ! L'algorithme de Newton ne fonctionne pas si on a une racine double :

$$f(\xi) = 0 \quad \text{et } f'(\xi) = 0 .$$

De plus, on doit éviter tout point x_k tel que $f'(x_k) = 0$ puisqu'alors l'itération $x_k \to x_{k+1}$ ne peut être définie.

- Dans le cas du calcul de $\xi = \sqrt{a}$ $(a>0)$ à l'aide de la fonction $f(x) = x - \frac{a}{x}$, l'écriture de l'algorithme de Newton conduit à une suite récurrente x_k :

$$x_{k+1} = 2a \frac{x_k}{a + x_k^2}$$

puisqu'on a le calcul suivant :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k - \frac{a}{x_k}}{1 + \frac{a}{x_k^2}}$$

$$= x_k - x_k^2 \frac{x_k - \frac{a}{x_k}}{a + x_k^2} = x_k \left(1 - \frac{x_k^2 - a}{a + x_k^2}\right)$$

$$= x_k \frac{a + x_k^2 - (x_k^2 - a)}{a + x_k^2} = 2a \frac{x_k}{a + x_k^2} . \quad \blacksquare$$

- <u>L'initialisation</u> de l'algorithme de Newton est en fait le point dur, surtout si l'équation que l'on cherche à résoudre a plusieurs solutions. Si on cherche par exemple à tester l'algorithme de Newton pour l'équation

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

(qui a deux racines quasi évidentes $x = 1$ et $x = -3$), le choix du point initial est crucial. Il faut absolument éviter le point x_0 qui annule la dérivée : $x_0 \neq -1$.

- On utilise en général l'algorithme de Newton après une première étude qui consiste à placer "au mieux" une éventuelle racine grâce au théorème des valeurs intermédiaires.

Paris, 2 novembre 2018.

Dubois.

MA-GPE 4 **Travaux Pratiques.**

Résolution numérique d'équations avec Excel ou équivalent

1 Degré 1

- $3x - 4 = 0$
- $$\frac{r^x - 1}{r^{x+1} - 1} = \beta \equiv \frac{x_A - x_n}{x_A - y_A/K}$$

  avec $x_A = 1/2$; $y_A = \frac{1}{10}$; $K = 0{,}2$; $x_n = 0{,}03$

  et r variant de $0{,}1$ à $2{,}3$.

2 Degré 2

- Itérations de Newton pour calculer $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.
- Choix de l'initialisation de l'algorithme de Newton pour résoudre $x^2 + 2x - 3 = 0$.

3 Degré 3.

- $x^3 + x = 1$
- $x^3 = 4x + 2$.

  On pourra prendre successivement $x_0 = 0$, $x_0 = 2$ et $x_0 = -2$.

– 31 oct 2018 –