le cnam

Mathématiques Appliquées pour le Génie des Procédés et l'Energétique

Paris, automne 2018

Intégration et calcul de surfaces

Notes du cours 03

Amélie Danlos, Marie Debacq, François Dubois

MA-GPE 3

Intégration et calcul de surfaces -

F. Dubois
24 octobre 2018.

1 Exemples.

- on se donne deux réels $a<b$ et une fonction positive $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ [$f(x)\geqslant 0$, $\forall x\in[a,b]$]. L'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ représente la surface comprise entre les abscisses $x=a$ et $x=b$ d'une part, la courbe $y=f(x)$ et l'axe des abscisses d'autre part.

- Dans le cas où la fonction f est constante égale à $h\geqslant 0$, l'intégrale vaut simplement la surface du rectangle de côtés h et $(b-a)$:

$$\int_a^b h\,dx = h(b-a).$$

- on se donne une fonction affine f telle que

$$f(a)=m,\quad f(b)=M.$$

Alors le graphe de $y=f(x)$ pour $a\leqslant x\leqslant b$ est un segment de droite et l'intégrale est simplement égale à l'aire du trapèze, soit $(b-a)\dfrac{m+M}{2}$.

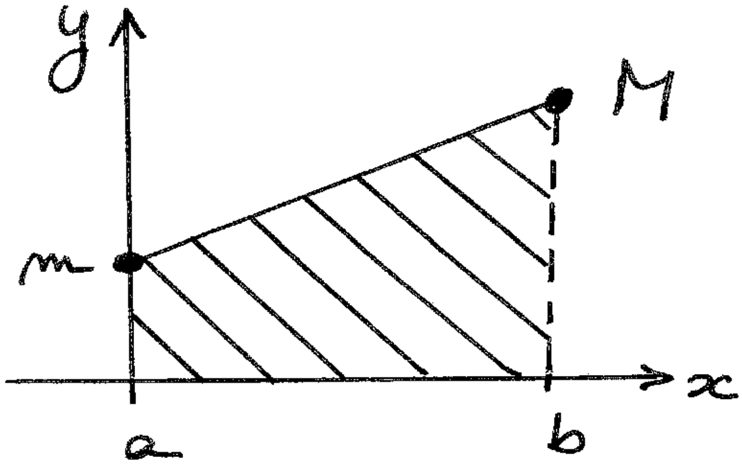

Figure 1 Intégrale d'une fonction affine

L'expression algébrique de cette fonction affine s'obtient facilement si on remarque que sa pente vaut $\frac{M-m}{b-a}$:

$$f(x) = \frac{M-m}{b-a}(x-a) + m.$$

On a donc

$$\int_a^b \left[\frac{M-m}{b-a}(x-a) + m\right] dx = (b-a)\,\frac{m+M}{2}.$$

② Construction de l'intégrale.

- on considère que les axiomes suivants donnent les éléments fondateurs du nombre $\int_a^b f dx$.

□ Linéarité.

(i) L'intégrale de la somme de deux fonctions est égale à la somme de leurs intégrales:

$$\int_a^b (f+g)\,dx = \left(\int_a^b f dx\right) + \left(\int_a^b g\,dx\right)$$

(ii) Si λ est un nombre et f une fonction, alors
$$\int_a^b (\lambda f)\,dx = \lambda.\left(\int_a^b f\,dx\right).$$

☐ <u>Additivité par rapport au domaine</u> (ou relation de Chasles [1793-1880]).
On peut couper en deux une surface qui est alors égale à la somme des aires des morceaux découpés :
$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx, \quad a<c<b.$$

☐ Echange des bornes
$$\int_b^a f\,dx = -\int_a^b f\,dx.$$

- On peut alors intégrer une fonction polynômiale du premier degré :
$$\int_a^b (x-a)\,dx = \frac{1}{2}(b-a)^2.$$

Cette relation était déjà bien connue d'Archimède (−287 ; −212) à Syracuse.

La <u>preuve</u> s'obtient en utilisant la linéarité. On note f la fonction affine telle que $f(a)=m$ et $f(b)=M$. alors on a vu que
$$\int_a^b f\,dx = \frac{M-m}{b-a}\int_a^b (x-a)\,dx + m(b-a)$$

en tenant compte de la linéarité de l'intégrale et de ce qui a été établi pour l'intégration des fonctions constantes. Alors

$$(M-m)\int_a^b (x-a)\,dx = \left[\tfrac{1}{2}(M+m)-m\right](b-a)^2$$
$$= \frac{M-m}{2}(b-a)^2.$$

On suppose $M \neq m$ et on en déduit

$$\int_a^b (x-a)\,dx = \frac{1}{2}(b-a)^2.$$

3) Théorème fondamental de l'Analyse.

- Relier le calcul de surfaces aux dérivées n'est pas une entreprise élémentaire. On se donne f continue [on peut tracer le graphe de $y = f(x)$ sans lever le crayon]. Alors la fonction obtenue en faisant varier la borne supérieure de l'intégrale est une fonction dérivable et sa dérivée vaut f :

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x).$$

- L'application classique de ce résultat est le calcul d'intégrales à l'aide de primitives. Une <u>primitive</u> F de la fonction f est telle que la dérivée de F est égale à f :

$$F' = f\,; \quad \frac{dF}{dx}(x) = f(x).$$

alors on peut démontrer la relation suivante :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \equiv [F]_a^b .$$

- Pour la fonction affine $f(x) = x - a$, on vérifie facilement que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}(x-a)^2\right] = x - a .$$

Donc on a

$$\int_a^b (x-a)\,dx = \left[\frac{1}{2}(x-a)^2\right]_a^b = \frac{1}{2}(b-a)^2,$$

ce qui confirme bien le résultat établi page 4.

- Une liste de <u>primitives usuelles</u> s'obtient en connaissant très bien les dérivées de fonctions classiques :

$$x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ f(x) = x^n ;\ F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$x > 0,\ \alpha \neq -1,\ f(x) = x^\alpha ;\ F(x) = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$$

$$x > 0,\ f(x) = \frac{1}{x} ;\ F(x) = \log x + C$$

$$x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^x ;\ F(x) = e^x + C .$$

- On a alors, pour $\alpha \neq 0$ et $a < b$:

$$\int_a^b e^{\alpha x}\,dx = \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}\right]_a^b = \frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha b} - e^{\alpha a}\right)$$

et pour $0 < a < b$:

$$\int_a^b \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\left[x\sqrt{x}\,\right]_a^b = \frac{2}{3}\left(b\sqrt{b}-a\sqrt{a}\right)$$

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\left[\sqrt{x}\,\right]_a^b = 2\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right).$$

(4) Intégration par parties.

- La remarque fondamentale est que toute fonction f est une primitive de sa dérivée. Donc

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(f(x))\,dx = f(b)-f(a).$$

- Si on prend maintenant $f = u\cdot v$, produit de deux fonctions, on a la règle de Leibniz :

$$\frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx}\,v(x) + u(x)\,\frac{dv}{dx}.$$

On en déduit après intégration :

$$\int_a^b \frac{du}{dx}\,v(x)\,dx = -\int_a^b u(x)\,\frac{dv}{dx}\,dx + \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b ,$$

qui est la règle usuelle d'intégration par parties.

- Exemple. On cherche à évaluer $\int_a^b \log x\,dx$ si $0<a<b$. On intègre par parties, avec $u(x)=x$ et $v(x)\ \log x$. Alors

$$\int_a^b \log x\,dx = \left[x\log x - x\right]_a^b$$

après un calcul laissé au lecteur.

(5) Décomposition en éléments simples.

- on se place dans le cas de l'exemple suivant : pour $0<a<b$, calculer $\int_a^b \frac{1}{x(x+1)}\,dx$ -
on doit transformer le produit $\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+1}$ en une somme de la forme :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1}, \quad \forall x \neq 0,-1.$$

- on détermine les nombres α et β de la façon suivante. on multiplie d'abord la relation précédente par x. alors

$$\frac{1}{x+1} = \alpha + \beta\frac{x}{x+1}, \quad \forall x \neq -1.$$

on prend la valeur particulière $x=0$ dans cette relation et on en déduit $\alpha = 1$. on procède de meme façon analogue pour le coefficient β ; on multiplie la relation initiale par $(x+1)$. Il vient alors :

$$\frac{1}{x} = \alpha\,\frac{x+1}{x} + \beta, \quad \forall x \neq 0.$$

on choisit $x=-1$ qui permet d'éliminer α, et conduit à $\beta=-1$. on a finalement

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}, \quad \forall x \neq 0,-1.$$

Cette relation est claire "de droite à gauche".

Mais l'établir "de gauche à droite" demande de maîtriser la méthodologie de décomposition en éléments simples.

- Le paragraphe précédent n'est qu'une introduction au sujet. Le lecteur pourra par exemple chercher p et q de sorte que

$$\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{p}{x-\alpha} + \frac{q}{x-\beta}, \quad \forall x \neq \alpha, \beta.$$

- Nous pouvons enfin calculer l'intégrale $\int_a^b \frac{dx}{x(x+1)}$ grâce à linéarité :

$$\int_a^b \frac{dx}{x(x+1)} = \int_a^b \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= \int_a^b \frac{dx}{x} - \int_a^b \frac{dx}{x+1}$$

$$= \left[\log x\right]_a^b - \left[\log(x+1)\right]_a^b$$

$$= \log\frac{b}{a} - \log\frac{b+1}{a+1} = \log\left(\frac{(a+1)b}{a(b+1)}\right)$$

6 Méthode des rectangles pour le calcul approché

- Pour la plupart des fonctions f, le calcul d'une primitive F échoue et il faut recourir à une méthode approchée. La méthode des rectangles remplace la fonction f par une

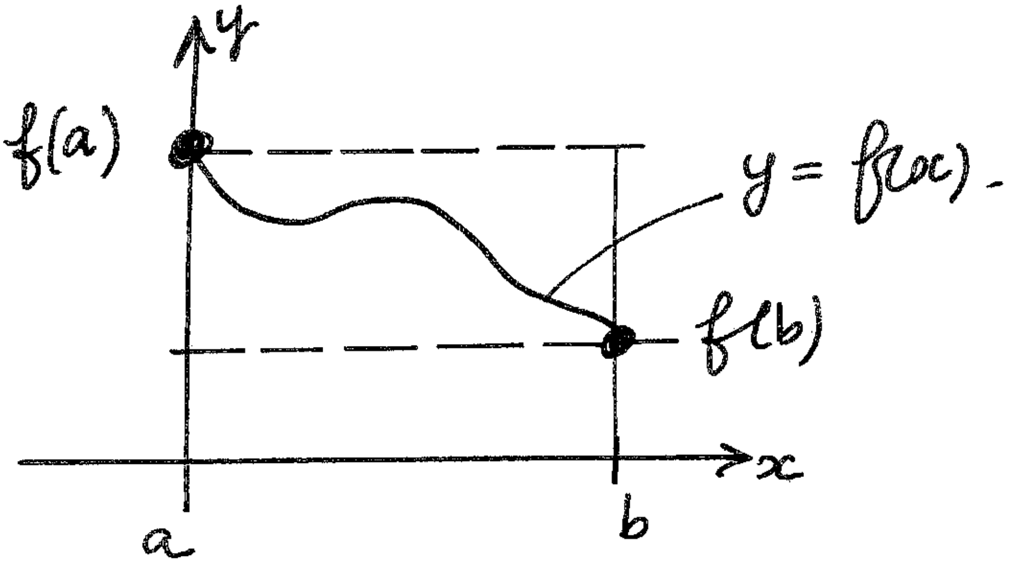

Figure 2. Méthode des rectangles.

constante ; il suffit alors de calculer l'intégrale d'une fonction constante, c'est à dire d'un rectangle (voir la Figure 2).

- Dans la première variante des rectangles "à gauche", on remplace f sur l'intervalle $[a,b]$ (avec $a<b$) par la valeur $f(a)$. Alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \dot{I}_g(a,b) = f(a)(b-a).$$

- Dans la seconde variante "à droite", la fonction f est remplacée par la valeur $f(b)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \dot{I}_d(a,b) = f(b)(b-a).$$

- On utilise en pratique la méthode des rectangles après découpage en n parties égales (n entier ≥ 1) : on introduit $(n+1)$

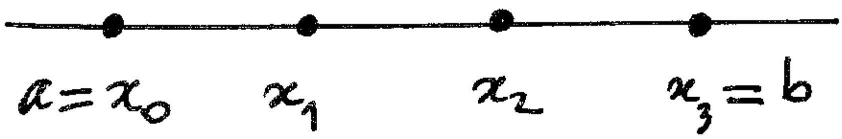

Figure 3. Découpage de l'intervalle $[a,b]$ en trois intervalles égaux plus petits : $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$ et $[x_2, x_3]$.

points x_j pour $0 \leq j \leq n$:

$$x_j = a + j \, \frac{b-a}{n}, \quad 0 \leq j \leq n.$$

on a alors $x_0 = a$, $x_n = b$ et $(n-1)$ points intermédiaires $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$ [voir la Figure 3 dans le cas $n=3$].

- On utilise la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx .$$

Puis chaque intégrale $\int_{x_j}^{x_{j+1}} f\,dx$, dans un intervalle de longueur $\frac{b-a}{n}$, est approchée

à gauche

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f\,dx \simeq I_g(x_j, x_{j+1}) = f(x_j)\,\frac{b-a}{n}.$$

ou à droite :

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f\,dx \simeq I_d(x_j, x_{j+1}) = f(x_{j+1})\,\frac{b-a}{n}.$$

- On a alors deux approximations possibles avec n intervalles; à gauche

$$\int_a^b f\,dx \simeq \frac{b-a}{n}\left(f(x_0)+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})\right)$$

ou à droite:

$$\int_a^b f\,dx \simeq \frac{b-a}{n}\left(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right)$$

sachant que $x_0 = a$ et $x_n = b$.

7) Méthode des trapèzes.

- Au lieu d'approcher f sur l'intervalle $[a,b]$ par une fonction constante, on l'approche par l'unique fonction affine $g(x)$ telle que $g(a)=f(a)$ et $g(b)=f(b)$:

$$g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

On remplace l'intégrale de f sur $[a,b]$ par celle de g sur le même intervalle. Elle a été calculée au premier paragraphe puisque l'aire sous la courbe est un trapèze:

$$\int_a^b f\,dx \simeq I_t(a,b) = (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

- Quand on divise l'intervalle $[a,b]$ en n morceaux de la forme $[x_j; x_{j+1}]$, on obtient

$$\int_a^b f\,dx \simeq \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left[f(x_j) + f(x_{j+1})\right]$$

c'est à dire

$$\int_a^b f\,dx \simeq \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2} f(a) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + \frac{1}{2} f(b)\right]$$

où les points intérieurs x_j apparaissent deux fois, alors que les bornes n'apparaissent qu'une fois.

(8) Méthode de Simpson

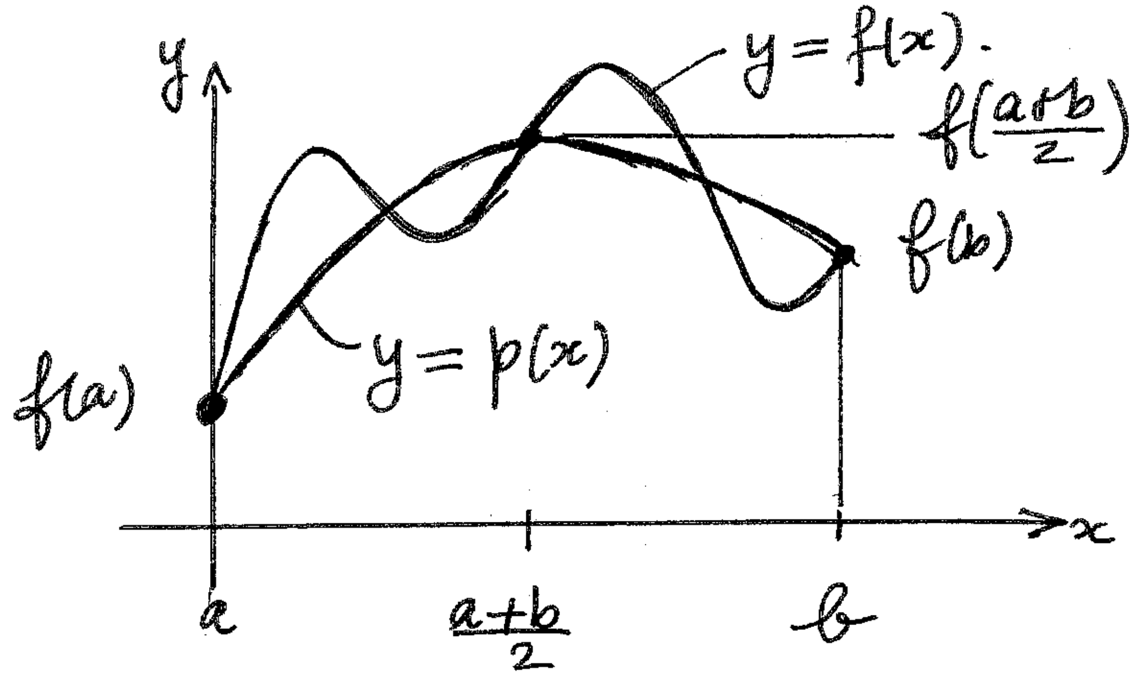

Figure 4. Interpolation parabolique de la fonction f sur l'intervalle [a,b]. On la remplace par une fonction polynomiale de degré deux.

La méthode de Simpson (1710-1761) généralise la méthode des trapèzes. Au lieu d'utiliser une fonction affine pour approcher f, on introduit un polynôme de degré 2 $p(x)$ tel que

$$p(a) = f(a), \quad p\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad p(b) = f(b).$$

On a introduit un point de plus, au milieu $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ de l'intervalle $[a,b]$.

- On peut vérifier (c'est un bon exercice!) que $p(x)$ est donné par l'expression

$$\begin{cases} p(x) = f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \\ \qquad + \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)\right)\right] \cdot 4\dfrac{(x-a)(b-x)}{(b-a)^2} \end{cases}$$

- L'intégrale de p sur l'intervalle $[a,b]$ se calcule sans difficulté de principe :

$$\int_a^b p(x)\,dx \equiv I_S(a,b) = (b-a)\left[\frac{1}{6}f(a) + \frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6}f(b)\right].$$

Alors on approche le calcul de $\int_a^b f\,dx$ par l'intégrale calculée à la ligne précédente :

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b p(x)\,dx.$$

Ces relations caractérisent la méthode de Simpson d'intégration numérique.

- On remarque que la méthode de Simpson est exacte non seulement si f est un polynôme de degré ≤ 2, mais également si f est un polynôme de degré trois. On peut le voir simplement pour la fonction $f(x) = x^3$ sur l'intervalle $[0,1]$. On a d'une part :

$$\int_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{4}\left[x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

et d'autre part

$$\frac{1}{6}0^3 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{6}1^3 = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}.$$

- On peut comme plus haut découper l'intervalle $[a,b]$ en n morceaux égaux. On introduit le milieu de $[x_j, x_{j+1}]$:

$$x_{j+1/2} \equiv \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1}) = a + \left(j + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

Alors

$$\int_a^b f\, dx \simeq \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{6}f(a) + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + \frac{1}{6}f(b) + \frac{2}{3}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_{j+1/2})\right].$$

Conservatoire National des Arts et Métiers
Mathématiques Appliquées pour le Génie des Procédés et l'Énergétique
Amélie Danlos, Marie Debacq et François Dubois
24 octobre 2018

UTC101, travaux pratiques, cours 03

On se propose de calculer de façon approchée deux intégrales classiques à l'aide de trois méthodes : les rectangles, avec les deux variantes des "rectangles à gauche" et des "rectangles à droite", les trapèzes et la méthode de Simpson. On compare les valeurs obtenues avec la valeur exacte. On détermine de manière expérimentale l'ordre de convergence de chacune des méthodes utilisées. L'outil informatique est simplement un tableur "excel", "calc" ou équivalent.

1 - $I_1 = \ln 10 = \displaystyle\int_1^{10} \frac{\mathrm{d}x}{x}$

a) - Calculer la valeur exacte de cette intégrale avec la meilleure précision possible compte tenu de votre outil de calcul.

b) - On introduit 9 intervalles réguliers entre 1 et 10 afin de découper l'intégrale lors du calcul numérique. Calculer les valeurs approchées de I_1 pour les quatre méthodes suivantes :

méthode des rectangles à gauche
méthode des rectangles à droite
méthode des trapèzes
méthode de Simpson.

c) - Déterminer les quatre erreurs obtenues.

d) - On double le nombre d'intervalles afin d'avoir un résultat approché plus précis. Reprendre l'étude précédente (les questions b) et c)) en utilisant 18 intervalles réguliers entre 1 et 10.

e) - Montrer que le rapport des erreurs obtenues à la question d) [on utilise 18 intervalles] et à la question c) [on utilise 9 intervalles] peut se mettre dans chacun des quatre cas sous la forme $\frac{1}{2^m}$, où m est très voisin d'un nombre entier que l'on précisera. Quantifier le gain de précision obtenu en changeant de méthode de calcul numérique.

2 - $I_2 = \displaystyle\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x\,(x+1)}$

a) - A l'aide d'une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{1}{x\,(x+1)}$, montrer que l'intégrale I_2 est égale à $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$.

b) - Reprendre les questions a) à e) de l'exercice précédent, mais en utilisant d'abord 10 intervalles (au lieu de 9) puis 20 (au lieu de 18).

c) - Montrer que les quatre entiers introduits à la question e) restent inchangés.