Cours 10

Conditions limites pour HaWAY

1) Rappels
2) Conditions limites en vitesse
3) Algorithme Haway
4) Condition d'impédance à gauche
5) Condition d'impédance à droite

François Dubois, juin 2003, édition 20 juillet 2006, 8 pages.

Ch (10) Conditions limites pour HaWAY

1) Rappels.

- Nous avons vu au chapitre précédent que la méthode HaWAY utilise des points entiers en espace et demi-entiers en temps pour le champ de vitesse :

$$(1) \qquad u_j^{n+1/2} \simeq u(x_j, t^{n+1/2}), \quad 0 \leq j \leq J, \; n \geq 0$$

et des points demi-entiers en espace et entiers en temps pour le champ de pression :

$$(2) \qquad p_{j+1/2}^{n} \simeq p(x_{j+1/2}, t^{n}), \quad 0 \leq j \leq J-1, \; n \geq 0.$$

- L'équation d'évolution discrète de la pression s'écrit

$$(3) \qquad \frac{1}{\Delta t}\left(p_{j+1/2}^{n+1} - p_{j+1/2}^{n}\right) + \frac{1}{\Delta x}\left(u_{j+1}^{n+1/2} - u_j^{n+1/2}\right) = 0, \quad 0 \leq j \leq J-1$$

alors que la vitesse discrète évolue selon

$$(4) \qquad \frac{1}{\Delta t}\left(u_j^{n+1/2} - u_j^{n-1/2}\right) + \frac{1}{\Delta x}\left(p_{j+1/2}^{n} - p_{j-1/2}^{n}\right) = 0, \quad 1 \leq j \leq J-1.$$

2) Conditions limites en vitesse.

- Nous constatons que si la relation (3) permet de calculer toutes les nouvelles pressions, puisque les relations (2) et (3) sont valables pour un ensemble d'indices $j \in \{0, \dots, J-1\}$ identique, ce n'est pas le cas pour la relation (4). En effet, cette relation est définie pour les $(J-1)$ valeurs de l'indice qui sont compatibles avec l'existence d'une pression $p_{j-1/2}^n$ "à gauche" du point x_j et une pression $p_{j+1/2}^n$ "à droite" de ce même point. On doit donc inventer une équation d'évolution pour la vitesse $u_0^{n+1/2}$ présente en $x=0$ et une (autre) équation d'évolution pour la vitesse $u_J^{n+1/2}$ présente en $x=L$.

- Le plus simple est de supposer que ces valeurs en apparence compliquées à calculer sont données par les conditions à la limite! On suppose donc dans ce paragraphe

$$(5) \qquad u_0^{n+1/2} = g_0(t^{n+1/2}), \; n \geq 0$$

où $g_0(\bullet)$ est une donnée de la vitesse en

$x=0$. On suppose aussi

(6) $\quad u_J^{n+1/2} = g_L(t^{n+1/2}) \ , n \geq 0$

avec $g_L(t)$ la donnée du champ de vitesse en $x=L$.

- Le traitement des indices $j=0$ et $j=L$ du champ de vitesse est alors immédiat avec les relations (5) et (6).

3) Algorithme Haway.

- Pour programmer la méthode Haway, la notation par des indices demi-entiers est délicate, et ne correspond pas aux standards du stockage en mémoire des informations. On note donc la pression $p_{j+1/2}$ dans un tableau $P(j+1)$ comportant J "places mémoire" :

(7) $\quad P(j) = p_{j-1/2} \ , \quad 1 \leq j \leq J$

Plus exactement, ayant besoin des pressions "anciennes" $p_{j-1/2}^{n}$ et des pressions "nouvelles" $p_{j-1/2}^{n+1}$, on pose

(8) $\quad PA(j) = p_{j-1/2}^{n} \ , \ PN(j) = p_{j-1/2}^{n+1} \ , \ 1 \leq j \leq J$

- on dispose aussi des vitesses en nombre $J+1$ avec un indice j variant de 0 à J. Comme certains langages de programmation n'aiment pas les indices qui démarrent à la valeur "zéro", on pose

$$(9) \qquad U(j) = u_{j-1} \, , \quad 1 \leq j \leq J+1 \, .$$

Comme dans le cas de la pression, ayant à gérer des "anciennes" vitesses $u_{j-1}^{n-1/2}$ et des "nouvelles" vitesses $u_{j-1}^{n+1/2}$, on pose

$$(10) \qquad UA(j) = u_{j-1}^{n-1/2} \, , \quad UN(j) = u_{j-1}^{n+1/2} \, , \quad 1 \leq j \leq J+1 \, .$$

- Nous prenons le temps d'écrire avec les notations introduits aux relations (8) et (10) les évolutions discrètes (3) et (4), en introduisant le nombre de Courant σ :

$$(11) \qquad \sigma = \frac{\Delta t}{\Delta x} \, .$$

Nous avons pour la relation (3) son "analogue algorithmique"

$$(12) \qquad PN(j) = PA(j) - \sigma \big(UA(j+1) - UA(j) \big) \, , \quad 1 \leq j \leq J$$

et une expression analogue pour la relation (4) :

$$(13) \qquad UN(j) = UA(j) - \sigma \big(PA(j) - PA(j-1) \big) \, , \quad 2 \leq j \leq J \, .$$

- Une évolution discrète pour N pas de temps et un maillage comprenant J mailles s'écrit donc avec un algorithme de type décrit ci-dessous.

- Initialisation

  Lire J, N, σ

  Lire $GO(n)$, $1 \leq n \leq N$ vitesse en $x=0$

  Lire $GL(n)$, $1 \leq n \leq N$ —— $x=L$

  Lire $UA(j)$, $1 \leq j \leq J+1$ vitesse à $t=\Delta t/2$

  Lire $PA(j)$, $1 \leq j \leq J$ Pression à $t=0$.

- Boucle en temps : n varie de 1 à N

  * Calcul de la nouvelle pression
  utiliser la relation (12) pour $1 \leq j \leq J$

  * Condition limite pour la nouvelle vitesse
  $UN(1) = GO(n)$
  $UN(J+1) = GL(n)$

  * Calcul de la nouvelle vitesse
  utiliser la relation (13) avec la nouvelle pression (attention à l'erreur!)

(14) $UN(j) = UA(j) - \sigma\,(PN(j) - PN(j-1))$

avec $2 \leq j \leq J$ (boucle!)

* Passage du temps discret : les nouvelles valeurs deviennent les anciennes valeurs

[Boucle sur $j = 1, \dots, J$
[$PA(j) = PN(j)$

[Boucle sur $j = 1, \dots, J+1$
[$UA(j) = UN(j)$.

- Fin de la boucle en temps.

4) Condition d'impédance en $x = 0$.

- Il s'agit d'écrire la condition

$$(15) \qquad p = p_g - Z_g \, u, \quad x = 0$$

proposée au chapitre 8 pour remplacer la relation (5) par un algorithme un peu plus complexe. L'idée est de faire "sauter" la vitesse discrète u_0 de $(n-\frac{1}{2})\Delta t$ à $(n+\frac{1}{2})\Delta t$ en inventant une pression p au point 0 et à l'instant $n\Delta t$:

$$(16) \quad \frac{1}{\Delta t}\left(u_0^{n+1/2} - u_0^{n-1/2}\right) + \frac{1}{\Delta x/2}\left(p_{1/2}^n - p_0^n\right) = 0.$$

- Dans la relation (16), p_0^n est inconnu. Mais la condition à la limite (15) permet de le réécrire en fonction de u_0^n, toujours autant inconnu !

$$(17) \qquad p_0^n = p_g - Z_g \, u_0^n, \quad n \geq 0.$$

Il ne reste plus à dire que la valeur

intermédiaire u_0^n entre $u_0^{n-1/2}$ (connu) et $u_0^{n+1/2}$ (nouveau, à calculer) est obtenue par une simple moyenne :

$$(18) \qquad u_0^n = \frac{1}{2}\left(u_0^{n-1/2} + u_0^{n+1/2}\right).$$

- On reporte (17) et (18) au sein de (16) pour obtenir une équation dont l'inconnue est $u_0^{n+1/2}$:

$$(19) \quad \frac{1}{\Delta t}\left(u_0^{n+1/2} - u_0^{n-1/2}\right) + \frac{2}{\Delta x}\left(p_{1/2}^n - \left(p_g - Z_g \frac{1}{2}\left(u_0^{n+1/2} + u_0^{n-1/2}\right)\right)\right) = 0$$

qui se résout sans difficulté particulière :

$$(20) \quad u_0^{n+1/2} = \frac{1-\sigma Z_g}{1+\sigma Z_g}\, u_0^{n-1/2} - 2\,\frac{\sigma}{1+\sigma Z_g}\left(p_{1/2}^n - p_g\right).$$

Cette relation remplace la relation (5) dans le cas d'une condition limite d'impédance.

5) Condition d'impédance en $x = L$.

- La condition s'écrit maintenant

$$(21) \qquad p = p_d + Z_d\, u \quad , \quad x = L ,$$

comme nous l'avons développé au chapitre 8. On doit comme au paragraphe précédent passer de $u_J^{n-1/2}$ à $u_J^{n+1/2}$. On introduit une pression paroi p_J^n, et on écrit une forme discrète de la conservation de l'impulsion avec un pas d'espace "moitié" :

$$(22) \quad \frac{1}{\Delta t}\left(u_J^{n+1/2} - u_J^{n-1/2}\right) + \frac{1}{\Delta x/2}\left(p_J^n - p_{J-1/2}^n\right) = 0 .$$

Puis on tire p_J^n de la relation (21) :

$$(23) \quad p_J^n = p_d + Z_d\, u_J^n$$

et u_J^n est supposé être une moyenne arithmétique très simple de $u_J^{n-1/2}$ et $u_J^{n+1/2}$:

$$(24) \quad u_J^n = \frac{1}{2}\left(u_J^{n-1/2} + u_J^{n+1/2}\right) .$$

- On reporte les relations (23) et (24) dans (22), ce qui conduit à l'équation suivante pour la nouvelle vitesse $u_J^{n+1/2}$:

$$(25) \quad \frac{1}{\Delta t}\left(u_J^{n+1/2} - u_J^{n-1/2}\right) + \frac{2}{\Delta x}\left(p_d + \frac{1}{2} Z_d \left(u_J^{n+1/2} + u_J^{n-1/2}\right) - p_{J-1/2}^n\right) = 0 .$$

Cette équation est du premier ordre :

$$(1 + \sigma Z_d)\, u_J^{n+1/2} = (1 - \sigma Z_d)\, u_J^{n-1/2} - 2\sigma \left(p_d - p_{J-1/2}^n\right),$$

donc

$$(26) \quad u_J^{n+1/2} = \frac{1 - \sigma Z_d}{1 + \sigma Z_d}\, u_J^{n-1/2} - \frac{2\sigma}{1 + \sigma Z_d}\left(p_d - p_{J-1/2}^n\right) .$$

Cette relation remplace la condition (6) lorsqu'on doit implémenter une condition d'impédance (21) avec le schéma numérique HAWAY.

FD, juin 2003.