Cours 8

# Ondes acoustiques sur un intervalle borné



François Dubois, juin 2003, édition 20 juillet 2006, 12 pages.

# Ch (8) Ondes acoustiques monodimensionnelles sur un intervalle borné.

## 1) Introduction

- Nous étudions le système de l'acoustique linéarisé à une dimension d'espace :

(1) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

(2) $$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

(3) $$p = c_0^2 \rho$$

mais au lieu de supposer $x \in \mathbb{R}$ comme au chapitre 7, nous supposons maintenant que $x$ appartient à un intervalle borné, disons de longueur $L > 0$, avec

(4) $$0 \leq x \leq L$$

pour fixer les idées.

- On doit adjoindre à la condition initiale

(5) $$\begin{cases} \rho(x,0) = \rho^0(x), & 0 \leq x \leq L \\ u(x,0) = u^0(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

un ensemble de conditions limites en $x = 0$

et $x = L$ de manière à ce que le problème ainsi obtenu soit mathématiquement bien posé, c'est à dire fasse apparaître une solution unique qui de plus dépende continuement des données.

## 2) Condition limite à gauche.

- En $x = 0$, "à gauche" de l'intervalle $[0, L]$, nous écrivons le système aux variables caractéristiques $\varphi_+$, $\varphi_-$, définis par

(6) $$\varphi_+ = p + \rho_0 c_0 u, \quad \varphi_- = p - \rho_0 c_0 u$$

et qui s'écrit avec deux advections découplées :

(7) $$\frac{\partial \varphi_+}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \varphi_+}{\partial x} = 0 \,, \quad 0 \leq x \leq L$$

(8) $$\frac{\partial \varphi_-}{\partial t} - c_0 \frac{\partial \varphi_-}{\partial x} = 0 \,, \quad 0 \leq x \leq L \,.$$

- Au chapitre 5 concernant les conditions limites pour l'équation d'advection nous avons vu qu'en $x = 0$, on dispose d'une caractéristique "entrante" pour l'équation (7) puisque la solution $x(t)$ de l'équation

(9) $$\frac{dx}{dt} = c_0$$

se propage vers les $x$ croissants pour les temps croissants. De même, la droite caractéristique relative à l'équation (8), c'est à dire

(10) $$\frac{dx}{dt} = -c_0$$

se propage vers les $x$ décroissants si le temps croît. On doit donc se donner une condition à la limite pour $\varphi_+$ en $x = 0$, alors qu'aucune donnée n'est nécessaire pour la variable caractéristique "sortante" $\varphi_-$. On peut se donner la caractéristique "entrante" $\varphi_+(0,t)$ sous la forme

(11) $$\varphi_+(0,t) = \beta\ (t), \quad t > 0 \quad , x = 0$$

en découplant complètement les équations (7) et (8), ou au contraire, on peut se donner $\varphi_+(0,t)$ comme une <u>fonction affine</u> de la caractéristique sortante $\varphi_-(0,t)$, ce qui <u>couple</u> les variables caractéristiques à la frontière $x = 0$ :

(12) $$\varphi_+(0,t) = \alpha\, \varphi_-(0,t) + \beta \quad , \ t > 0, \ x = 0 .$$

- une écriture "caractéristique" de la condition limite à la frontière "gauche" en $x=0$ est à rapprocher de l'écriture classique en acoustique

$$(13) \qquad p(0,t) = p_g - Z_g\, u(0,t)\,, \quad t>0.$$

Les deux expressions (12) et (13) sont équivalents, compte tenu de l'expression (6) des variables caractéristiques, grâce au lien suivant entre $(p_g, Z_g)$ d'une part, $(\alpha, \beta)$ d'autre part :

$$(14) \qquad Z_g = \rho_0 c_0 \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\,, \quad p_g = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

$$(15) \qquad \alpha = \frac{Z_g - \rho_0 c_0}{Z_g + \rho_0 c_0}\,, \quad \beta = \frac{2\, p_g}{1 + Z_g/\rho_0 c_0}\,.$$

- on peut détailler quelques cas particuliers physiquement intéressants

(i) pression imposée

$$(16) \qquad p = p_g \quad \text{en } x=0, \quad t>0.$$

Cette condition correspond à

$$(17) \qquad Z_g = 0, \quad \alpha = -1, \quad \beta = 2\, p_g$$

puisqu'on peut l'écrire aussi

$$(18) \qquad p + \rho_0 c_0 u = -(p - \rho_0 c_0 u) + 2 p_g$$

sous une forme caractéristique

(ii) Vitesse imposée.

- Sous forme caractéristique, cette condition $u=u_g$ s'écrit

$$(19) \quad (p+\rho_0 c_0 u) = (p-\rho_0 c_0 u) + 2\rho_0 c_0 u_g \;, x=0$$

où $u_g$ est la vitesse donnée à gauche, ce qui correspond à

$$(20) \quad \alpha = 1, \; \beta = 2\rho_0 c_0 u_g \,, Z_g \to \infty \,, \; \frac{p_g}{Z_g} = u_g$$

L'écriture (13) est donc à manipuler avec précaution, alors que (12) est plus simple

(iii) "Sortie libre" des ondes allant vers la gauche

- On exprime que l'onde allant de droite à gauche sort librement, c'est à dire que $\varphi_+$ ne dépend pas de la variable sortante $\varphi_-$, créant de ce fait une non réflexion de l'onde sortante à la limite $x=0$. On écrit simplement une condition d'entrée de la forme (11), c'est à dire (12) avec $\alpha=0$. On a donc dans ce cas

$$(21) \quad Z_g = \rho_0 c_0 \quad \text{impédance caractéristique}$$

et la condition (13) peut s'écrire

(22) $\quad p(0,t) + \rho_0 c_0 u(0,t) = pg \quad , \; x = 0$

ce qui permet de reconnaître sans difficulté la relation (11) avec $\beta = pg$.

3) <u>Condition limite à droite.</u>

- Elle est très analogue à l'étude en $x=0$, à ceci près que les caractéristiques (9) "sortent" maintenant du domaine $]0,L[$, donc qu'il n'y a pas à se donner de condition à la limite pour la variable caractéristique sortante $\varphi_+(L,t)$. De même, les caractéristiques (10) sont "entrantes", donc on doit se donner $\varphi_-(L,t)$ à la frontière "droite". On se donne, comme pour la relation (12), la variable entrante $\varphi_-$ comme une <u>fonction affine</u> de la variable sortante $\varphi_+$ :

(23) $\quad \varphi_-(L,t) = \lambda\, \varphi_+(L,t) + \mu \,, \; t>0, x=L.$

- Si on explicite cette condition relativement à la pression à la frontière, on a le calcul suivant, issu de (6) et (23) :

$p - \rho_0 c_0 u = \lambda (p + \rho_0 c_0 u) + \mu ,$

soit $(1-\lambda)\,p = \rho_0 c_0 (1+\lambda)\,u + \mu$,
ce qui correspond à

$$p(L,t) = p_d + Z_d\, u(L,t), \quad t>0, \; x=L \qquad (24)$$

avec

$$Z_d = \rho_0 c_0 \frac{1+\lambda}{1-\lambda}, \quad p_d = \frac{\mu}{1-\lambda}. \qquad (25)$$

Cette relation s'inverse en

$$\lambda = \frac{Z_d - \rho_0 c_0}{Z_d + \rho_0 c_0}, \quad \mu = 2\,\frac{p_d}{1+Z_d/\rho_0 c_0}. \qquad (26)$$

Nous détaillons quelques cas particuliers utiles en pratique.

- <u>Pression imposée</u>

Cette condition correspond à $p = p_d$ en $x=L$, c'est à dire

$$Z_d = 0, \quad \lambda = -1, \quad \mu = 2\,p_d \qquad (27)$$

puisqu'on l'écrit sous forme caractéristique

$$p - \rho_0 c_0 = -(p + \rho_0 c_0 u) + 2p_d. \qquad (28)$$

- <u>Vitesse imposée</u>.

Une fois donnée une valeur $u = u_d$ de la vitesse, on peut écrire cette condition à l'aide des variables caractéristiques:

(29) $p - \rho_0 c_0 u = p + \rho_0 c_0 u + 2\rho_0 c_0 u_d, \quad t > 0, \; x = L.$

Avec une expression de type (23) ou (24), cette condition correspond à

(30) $\lambda = 1, \; \mu = 2\rho_0 c_0 u_d, \; Z_d \to +\infty, \; \dfrac{p_d}{Z_d} = u_d.$

- "Sortie libre" des ondes allant vers la droite.

Il s'agit de la non réflexion de l'onde sortante ($\varphi_+$) à la frontière $x = L$. L'onde entrante $\varphi_-$ ne dépend plus de $\varphi_+$, c'est à dire qu'on prend $\lambda = 0$ dans la relation (23). La constante $Z_d$ vaut donc l'impédance caractéristique $\rho_0 c_0$ :

(31) $\lambda = 0, \; Z_d = \rho_0 c_0, \quad \mu = p_d$

et la condition correspondante s'écrit

(32) $p(L,t) - \rho_0 c_0 \, u(L,t) = p_d, \quad t > 0, \; x = L.$

## 4) Modes en vitesse

- Nous nous intéressons maintenant à des solutions du système (1)(2)(3) harmoniques en temps, avec une condition à la limite homogène en vitesse :

(33) $u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0.$

Nous obtenons une équation sur la vitesse seule en dérivant l'équation (1) par rapport à l'espace, la multipliant par $\left(-\frac{1}{\rho_0} c_0^2\right)$, puis en ajoutant le résultat obtenu à l'équation (2) dérivée par rapport au temps :

$$(34) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < L, \ t > 0.$$

- Si on cherche une évolution harmonique de la forme

$$(35) \qquad u(x,t) = e^{i\omega t}\, \tilde{u}(x), \qquad 0 < x < L,$$

la représentation (35) introduite dans l'équation (34) conduit à

$$(36) \qquad \frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2}\,\tilde{u} = 0.$$

Cette équation s'intègre sans difficulté :

$$\tilde{u}(x) = A \cos\frac{\omega x}{c_0} + B \sin\frac{\omega x}{c_0}, \qquad 0 < x < L$$

- L'introduction des conditions aux limites en vitesse impose $A = 0$ (en $x = 0$) et

$$(37) \qquad \frac{\omega L}{c_0} = k\pi, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Le $k^o$ mode en vitesse, après prise de la partie réelle de (35), s'écrit

(38) $$u(x,t) = u_k \cos\left(k\pi \frac{c_0 t}{L}\right) \sin\left(k\pi \frac{x}{L}\right), \quad 0 < x < L, \quad k = 1, 2, \ldots$$

- on peut aussi calculer la pression correspondante à l'aide de la relation (1) :

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x,t) = -\rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= -\rho_0 c_0^2 u_k \frac{k\pi}{L} \cos\left(k\pi \frac{c_0 t}{L}\right) \cos\left(k\pi \frac{x}{L}\right)$$

Donc $p(x,t) = -\rho_0 c_0 u_k \sin\left(k\pi \frac{c_0 t}{L}\right) \cos\left(k\pi \frac{x}{L}\right) + \varphi(x)$.

quand on injecte cette représentation dans l'équation (2), compte tenu de (38), il vient $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, donc, quitte à ajouter une constante arbitraire à la pression, on a

(39) $$p(x,t) = -\rho_0 c_0 u_k \sin\left(k\pi \frac{c_0 t}{L}\right) \cos\left(k\pi \frac{x}{L}\right)$$

pour le $k^o$ mode en vitesse.

## 5) Modes en pression.

- L'étude est analogue à celle du paragraphe précédent, mais nous imposons une condition limite homogène en pression aux deux "bouts" de l'intervalle $[0, L]$ :

(40) $$p(0,t) = p(L,t) = 0, \quad t > 0.$$

L'équation pour la pression est la même que celle de la vitesse (exercice (?) laissé au lecteur) :

$$(41) \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 .$$

- Donc le calcul fait au paragraphe précédent démontre que l'ensemble des modes est quantifié par un entier $k \geq 1$ de sorte que

$$(42) \qquad p(x,t) = p_k \cos\left(k\pi \frac{c_0 t}{L}\right) \sin\left(k\pi \frac{x}{L}\right), \quad k \text{ entier} \geq 1$$

On a ensuite compte tenu de (2)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{p_k}{\rho_0}\frac{k\pi}{L} \cos\left(k\pi\frac{c_0 t}{L}\right) \cos\left(k\pi\frac{x}{L}\right)$$

Donc

$$u(x,t) = -\frac{p_k}{\rho_0 c_0} \sin\left(k\pi\frac{c_0 t}{L}\right) \cos\left(k\pi\frac{x}{L}\right) + \varphi(x)$$

et quand on reporte cette expression au sein de la relation (1), il vient

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = \left[\frac{k\pi}{L} p_k c_0 + \rho_0 c_0^2 \frac{p_k}{L \cdot \rho_0 c_0} k\pi\right] \sin\left(k\pi\frac{c_0 t}{L}\right) \sin\left(k\pi\frac{x}{L}\right) + \rho_0 c_0^2 \frac{d\varphi}{dx}$$

$$= \rho_0 c_0^2 \frac{d\varphi}{dx}$$

ce qui montre que $\varphi$ est constante. On la choisit nulle, la vitesse n'étant définie qu'à une constante près via les relations (1) et (2). le champ de vitesse du $k^o$ mode de pression s'écrit donc

$$(43) \quad u(x,t) = -\frac{p_k}{\rho_0 c_0} \sin\left(k\pi \frac{c_0 t}{L}\right) \cos\left(k\pi \frac{x}{L}\right).$$

FD, juin 2003.