Cours 6

Schéma décentré pour l'advection

François Dubois, juin 2003, édition 20 juillet 2006, 13 pages.

ch⑥ Schéma décentré pour l'advection

1) Discrétisation

- Nous étudions l'équation d'advection

(1) $\quad \dfrac{\partial u}{\partial t} + a \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \,, \quad x \in \mathbb{R} \,, \; t \geq 0$

d'inconnue $u(x,t) \in \mathbb{R}$, avec un paramètre $a > 0$ pour fixer les idées. Nous disposons aussi d'une condition initiale $u^0(\bullet)$ à l'instant $t = 0$:

(2) $\quad u(x,0) = u^0(x) \,, \quad x \in \mathbb{R}$.

- Nous cherchons à <u>approcher</u> l'équation modèle (1) jointe à la condition initiale (2) à l'aide d'un schéma aux différences. Pour cela, nous introduisons un pas d'espace $\Delta x > 0$ et un pas de temps $\Delta t > 0$:

(3) $\quad \Delta x > 0 \,, \qquad \Delta t > 0$.

Le pas d'espace Δx désigne la plus petite échelle spatiale où l'on souhaite décrire la solution $u(\bullet,\bullet)$ du problème (1)(2).

- Nous disposons donc de points de grille discrets (paramétrés par des nombres entiers) à la fois en espace :

(4) $\quad x_j = j\Delta x, \quad j \in \mathbb{Z}$

et en temps :

(5) $\quad t^k = k\Delta t, \quad k \in \mathbb{N}$.

- Au lieu de chercher $u(x,t)$ pour toutes les valeurs $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, nous cherchons une valeur approchée u_j^k de $u(x_j, t^k)$ aux points de grilles définis plus haut :

(6) $\quad u_j^k \simeq u(j\Delta x, k\Delta t), \quad j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$

Nous allons dans le paragraphe suivant définir un schéma, c'est à dire un algorithme de calcul pour déterminer tous les nombres u_j^k, avec $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$.

2) Itération

- La première remarque consiste à utiliser la condition initiale (2). On dispose en effet de toutes les valeurs $u(x,0) = u^0(x)$ pour tous les x réels. C'est donc en particulier le cas pour $x = x_j$ défini à la relation (4). Les $u(x_j, 0) = u^0(j\Delta x)$ étant donc connus, il est naturel de poser pour l'instant initial $t=0$:

(7) $\quad u_j^0 = u^0(j\Delta x), \quad j \in \mathbb{Z}$.

- La condition initiale $(u_j^0)_{j \in \mathbb{Z}}$ étant connue, l'algorithme permet de calculer le pas de temps numéro 1 à partir des u_j^0. Nous déterminons donc les $(u_k^1)_{k \in \mathbb{Z}}$ dans les lignes qui suivent. La remarque essentielle est qu'on sait résoudre le problème (1)(2) par la méthode des caractéristiques. On a en effet (voir le chapitre 4) :

$$(8) \qquad u(x,t) = u^0(x - at), \quad x \in \mathbb{R}, \; t > 0$$

en utilisant le fait que la solution $u(\bullet,\bullet)$ est <u>constante</u> sur les droites caractéristiques de la forme $x - at =$ constante. Pour $x = x_j$ et $t = \Delta t$, la relation (8) s'écrit :

$$(9) \qquad u(x_j, \Delta t) = u^0(x_j - a\Delta t), \; j \in \mathbb{Z}$$

et il suffit de connaître u^0 au point $y = x_j - a\Delta t$, le "pied" de la caractéristique, pour déterminer $u(x_j, \Delta t) \simeq u_j^1$.

- En général, le point $x_j - a\Delta t$ n'appartient <u>pas</u> à la grille $(x_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}}$ de la relation (4). C'est un point <u>intermédiaire</u> entre deux points de grille. On suppose que Δt est assez petit de sorte que $a\Delta t$ soit inférieur à un pas d'espace Δx, c'est à dire

$$(10) \qquad 0 \leq a\Delta t \leq \Delta x .$$

On peut donc écrire $x_j - a\Delta t$ comme <u>interpolé</u> entre les points x_{j-1} et x_j :

(11) $\quad x_j - a\,\Delta t = \xi\, x_{j-1} + (1-\xi)\, x_j, \quad 0 \leq \xi \leq 1.$

Le coefficient ξ s'obtient sans difficulté en explicitant au sein de (11) les valeurs x_j et x_{j-1} à l'aide de la relation (4). Il vient :

$$j\Delta x - a\Delta t = \xi\,(j-1)\,\Delta x + (1-\xi)\, j\,\Delta x$$
$$= j\,\Delta x - \xi\,\Delta x$$

on en tire

(12) $\quad \xi = a\,\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$.

On vérifie que la condition $0 \leq \xi \leq 1$ est bien équivalente à la condition (10), dite condition de <u>Courant - Friedrichs - Lewy</u>, qui exprime que le pas de temps Δt n'est "pas trop grand".

- La méthode des caractéristiques et le calcul (11)(12) permettent donc d'exprimer $u(x_j, \Delta t)$ sous la forme

(13) $\quad u(x_j, \Delta t) = u^0\big(\xi\, x_{j-1} + (1-\xi)\, x_j\big), \; j \in \mathbb{Z}.$

le <u>schéma décentré</u> consiste maintenant à <u>approcher</u> le membre de droite de l'égalité (13) par une interpolation <u>affine</u>, ie poser

(14) $\quad u^0(\xi x_{j-1} + (1-\xi) x_j) \simeq \xi u^0(x_{j-1}) + (1-\xi)\, u^0(x_j)$.

On tire donc de (13) et (14) :

$$u_j^1 = \xi\, u_{j-1}^0 + (1-\xi) u_j^0$$

soit en remplaçant ξ par sa valeur calculée à la relation (12) :

(15) $\quad u_j^1 = a \dfrac{\Delta t}{\Delta x} u_{j-1}^0 + \left(1 - a \dfrac{\Delta t}{\Delta x}\right) u_j^0 \;, j \in \mathbb{Z}$

- La relation (15) permet, une fois connues les valeurs $(u_\ell^0)_{\ell \in \mathbb{Z}}$, de calculer toutes les valeurs $(u_j^1)_{j \in \mathbb{Z}}$ au premier pas de temps. On dispose donc maintenant de $(u_j^1)_{j\in\mathbb{Z}}$ et on se propose de calculer tous les $(u_\ell^2)_{\ell\in\mathbb{Z}}$. Il suffit de recommencer le raisonnement précédent. Nous le présentons dans le paragraphe qui suit en imaginant que $(u_j^k)_{j\in\mathbb{Z}}$ est connu (avec k fixé, $k=0$ dans le cas déjà traité à la relation (15)) et en se proposant de calculer les $(u_\ell^{k+1})_{\ell\in\mathbb{Z}}$.

- Soit k un entier $\in \mathbb{N}$ fixé. On suppose déjà connus les $(u_j^k)_{j\in\mathbb{Z}}$. On se propose de calculer les valeurs u_j^{k+1} au pas de temps suivant.

Comme à la relation (9), la méthode des caractéristiques permet d'exprimer $u(x_j, (k+1)\Delta t)$ en fonction des $u^k(x)$ au pied de celle-ci. On a :

$$(16) \quad u(x_j, (k+1)\Delta t) = u^k(x_j - a\Delta t), \; j \in \mathbb{Z}.$$

- On connaît les valeurs u_j^k et u_{j-1}^k, ainsi que l'interpolation (11) entre les points de grille x_{j-1} et x_j. On peut donc à nouveau supposer que la fonction $u^k(\cdot)$ est <u>affine</u> entre les points x_{j-1} et x_j :

$$(17) \quad u^k(x_j - a\Delta t) \simeq \xi \, u_{j-1}^k + (1-\xi) u_j^k .$$

Compte tenu de (12), (16) et (17), on peut donc écrire

$$(18) \quad u_j^{k+1} = a \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{j-1}^k + \left(1 - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) u_j^k, \; j \in \mathbb{Z}$$

on a donc un algorithme d'itération qui permet de faire avancer le temps discret d'<u>un</u> pas. On remarque que la relation (18) considérée avec $k=0$ coïncide avec la relation (15). On peut aussi écrire (18) sous la forme

$$(19) \quad \frac{1}{\Delta t}\left(u_j^{k+1} - u_j^k\right) + \frac{a}{\Delta x}\left(u_j^k - u_{j-1}^k\right) = 0 .$$

3) Implémentation

- Quand on veut programmer la méthode précédente sur un ordinateur, on doit d'abord se restreindre à un ensemble fini de valeurs de l'entier j :

(20) $\qquad 0 \leq j \leq J$,

ce qui revient à étudier l'équation (1) sur l'intervalle $[0, L] = [0, J\Delta x]$. Avec $a>0$, on a vu au chapitre 5 que ce problème admet une solution unique si on adjoint à la condition initiale (2) la condition à la limite

(21) $\qquad u(0,t) = g(t), \quad t>0$.

- La grille $(k\Delta t)_{k\in\mathbb{N}}$ étant fixée, la condition limite (21) peut être envisagée aux instants $t^k = k\Delta t$, et il est donc naturel de poser

(22) $\qquad u_0^k = g(k\Delta t), \quad k \in \mathbb{N}$.

On dispose donc de la condition initiale $(u_j^0)_{0\leq j\leq J}$ ainsi que de la condition limite (22). On doit maintenant déterminer les (u_j^k) pour $1 \leq j \leq J$ et $k \geq 1$.

- Il suffit de faire une boucle sur k et passer de k "ancien" à $(k+1)$ "nouveau" pour tout $k \geq 0$. L'entier k étant fixé, on range donc dans un vecteur UA(•) pour "u ancien", avec un indice j allant de 0 à J les valeurs u_j^k. On cherche alors les valeurs u_j^{k+1} "nouvelles" qu'on dispose dans un second vecteur UN(•) pour des indices allant encore de 0 à J.
UA(•) étant connu, on calcule UN(•) à l'aide de la relation (18) qui s'écrit maintenant :

(23) $\quad UN(j) = \sigma \; UA(j-1) + (1-\sigma) \; UA(j), \; 1 \leq j \leq J$

où (24) $\quad \sigma = a \, \Delta t / \Delta x$
est le "nombre de Courant".

- On doit pouvoir démarrer l'algorithme, ie avoir initialisé UZ(•) à l'instant initial par les valeurs $(u_j^0)_{0 \leq j \leq J}$, puis stocké quelque part la condition limite G(•) qui représente $g(k\Delta t)$. Il est essentiel de noter que le contenu de UZ(j), $0 \leq j \leq J$ est <u>arbitraire</u> ; la condition initiale est <u>quelconque</u>. De même, le contenu de G(k), $k \geq 1$ est <u>arbitraire</u> car la condition à la limite $g(\cdot)$ en également arbitraire.

- Toutes ces considérations conduisent à l'algorithme suivant

* lire le nombre de valeurs J en espace

———————————— N en temps

—— le nombre σ de courant

lire le vecteur $UZ(j)$, $0 \leq j \leq J$ des valeurs initiales

lire le vecteur $G(k)$, $1 \leq k \leq N$ des valeurs à la limite

Boucle en temps

* Initialiser le vecteur $UA(\cdot)$ des valeurs "anciennes" pour $t=0$.

$$UA(j) = UZ(j), \quad 0 \leq j \leq J$$

* Boucle en temps : $1 \leq k \leq N$.

Ecrire que la condition limite permet de connaître la "nouvelle" valeur à l'instant $k\Delta t$: $UN(0) = G(k)$.

Calculer la nouvelle valeur à l'instant k en fonction des "anciennes" :

Boucle en espace : $1 \leq j \leq J$

$$UN(j) = \sigma\, UA(j-1) + (1-\sigma)\, UA(j)$$

Le pas de temps numéro k est terminé
UA contient les $(u_j^{k-1})_{j\in\{0,\dots,J\}}$ et UN
contient les $(u_j^k)_{0\le j\le J}$.

Passage du temps : le vecteur UA est remplacé par les "nouvelles" valeurs :

[Boucle en espace : $0 \le j \le J$
UA(j) = UN(j)

Maintenant UA contient $(u_j^k)_{0\le j\le J}$ et on peut itérer une nouvelle fois.

* Fin de la boucle en temps.

4) Stabilité.

- On se place à nouveau (c'est plus simple !) dans le cas d'un ensemble d'indices $j\in\mathbb{Z}$ non borné. Le schéma numérique s'écrit

(24) $$u_j^{k+1} = \sigma u_{j-1}^k + (1-\sigma)\, u_j^k, \quad j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{N}.$$

On s'intéresse à une "onde", représentée à l'instant t^k sous la forme

(25) $$u_j^k = \hat{u}(\mathbf{K}) \exp(i\,\mathbf{K}\, x_j), \quad j\in\mathbb{Z}$$

soit encore

(26) $$u_j^k = \hat{u}(\xi)\, e^{i\xi j}, \quad j\in\mathbb{Z}$$

avec

(27) $$\xi = K\Delta x,$$

qui désigne le nombre d'onde

- on regarde l'effet du schéma (24) sur l'onde (26). Comme on a

(28) $$u_{j-1}^k = e^{-i\xi}\, u_j^k \,,$$

il vient facilement

(29) $$u_j^{k+1} = \left(1-\sigma+\sigma e^{-i\xi}\right) u_j^k \,, j\in\mathbb{Z}$$

On a donc au pas de temps "suivant" une nouvelle onde qui s'écrit

(30) $$u_j^{k+1} = g(\sigma,\xi)\, \hat{u}(K)\, e^{iKx_j}$$

avec

(31) $$g(\sigma,\xi) = 1-\sigma+\sigma e^{-i\xi}$$

qui est par définition le <u>coefficient d'amplification</u> du schéma (24).

- Lors du passage d'<u>un</u> pas de temps, l'onde (25) devient (30); elle est simplement <u>multipliée</u> par le nombre complexe $g(\sigma,\xi)$. Le <u>critère de stabilité de Von Neumann</u> exprime que quel que soit le nombre d'onde $\xi\in\mathbb{R}$, l'ampli.

fication de l'onde est inférieure ou égale à 1 en module. Algébriquement

$$(32) \quad |g(\sigma,\xi)| \leq 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

Si l'onde s'amplifie, ie si (32) n'a pas lieu, alors les <u>erreurs d'arrondis</u> qu'effectue la machine s'amplifient et après quelques dizaines de pas de temps, les solutions numériques calculées n'ont plus rien à voir avec une approximation de la solution de (1) !

- Pour déterminer les valeurs du paramètre σ qui permettent de vérifier la condition (32), on commence par l'écrire avec $\xi = \pi$. Il vient, puisque $e^{-i\pi} = -1$:

$$|1-2\sigma| \leq 1, \text{ ie } -1 \leq 1-2\sigma \leq 1,$$

soit encore

$$(33) \quad 0 \leq \sigma \leq 1$$

Réciproquement, si (33) a lieu, on a :

$$|1-\sigma+\sigma e^{-i\xi}| \leq |1-\sigma| + \sigma\,|e^{-i\xi}|$$

$$\leq 1-\sigma+\sigma = 1$$

et la relation (32) est vraie <u>pour tout</u> $\xi \in \mathbb{R}$.

- Nous retenons que le schéma décentré (24) est <u>stable</u> au sens de Von Neumann, c'est à dire <u>utilisable</u> en pratique si et seulement si le nombre de Courant $\sigma = a\Delta t/\Delta x$ vérifie la "condition CFL" décrite à la relation (33)

FD, juin 03