Introduction à l'acoustique numérique

Cours 4

Méthode des caractéristiques

François Dubois, mars 2003, édition 20 juillet 2006, 8 pages.

Ch ④ Méthode des caractéristiques

1) Introduction

- La pression $p(x,t)$ d'une onde acoustique satisfait, dans le cas d'une dimension d'espace, l'équation des ondes

(1) $$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 .$$

Nous y reviendrons. Nous voulons, dans le paragraphe qui suit, rappeler la factorisation de l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ proposée par D'Alembert au 18° siècle, sous la forme

(2) $$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x}\right) .$$

Si la pression $p(\bullet,\bullet)$ est solution de (1), alors la grandeur ξ définie par $\xi = \frac{\partial p}{\partial t} - a \frac{\partial p}{\partial x}$ vérifie la relation

(3) $$\frac{\partial \xi}{\partial t} + a \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 .$$

L'équation (3) est appelée <u>équation d'advection</u>. Elle est étudiée dans les paragraphes suivants.

- La démonstration de l'identité (2) est facile. On introduit une fonction quelconque $\varphi(x,t)$

et on applique le produit $\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right)$ à cette fonction. Il vient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial t} - a\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - a\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$$
$$+ a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - a\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$$
$$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$
$$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

en appliquant l'identité de Schwarz

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}$$

d'échange des dérivées partielles.

2) Equation d'advection

- Nous introduisons un paramètre $a > 0$ (la célérité des ondes sonores ?) et une fonction donnée u_0 de la variable x : $\mathbb{R} \ni x \mapsto u_0(x) \in \mathbb{R}$.

On cherche à résoudre le problème formé de l'équation d'advection

$$(5) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0$$

associé à la condition initiale u_0 :

$$(6) \qquad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- on remarque d'abord que ce problème (5)(6), d'inconnue une fonction $u(\cdot,\cdot)$ de <u>deux</u> variables x et t, peut être considéré comme une équation différentielle de la forme

$$(7) \qquad \frac{dU}{dt} = F(U) \quad , t>0$$

mais qui introduit une fonction $U(t)$ qui est elle même une <u>fonction</u> de x :

$$(8) \qquad (U(t))(x) = u(x,t) \quad , x \in \mathbb{R} \, , t>0 \, .$$

L'opérateur $F(U)$ associe à la fonction $(U(t))$ sa dérivée en espace (à une constante près) :

$$(9) \qquad F(U) = -\, a \frac{\partial u}{\partial x} \quad , x \in \mathbb{R} \, , t>0 \, .$$

La condition initiale (6) s'écrit aussi

$$(10) \qquad U(0) = u_0 \quad , t=0 \, .$$

A tout instant, l'inconnue $U(t)$ est une fonction, c'est à dire un ensemble <u>infini</u> de nombres $(U(t))(x)$ et on doit voir l'équation (7) (équivalente à l'équation (5)) comme prenant ses valeurs dans un espace de dimension <u>infinie</u>.

3) Droites caractéristiques

- on remarque que le paramètre $a>0$ de l'équation (5) est homogène à une vitesse.
Il est donc naturel de déterminer les points mobiles $[0,\infty[\ni t \mapsto X(t) \in \mathbb{R}$ ayant la vitesse a, i.e. solutions de l'équation différentielle

$$(11) \qquad \frac{dX}{dt} = a\,, \quad t>0\,.$$

Si nous spécifions une condition initiale pour la trajectoire $X(\bullet)$ en $t=0$, à savoir par exemple

$$(12) \qquad X(0) = y\,, \quad y \in \mathbb{R} \text{ fixé}\,,$$

alors la solution de (11)(12) s'obtient sans aucune difficulté :

$$(13) \qquad X(t) = at + y\,, \quad t>0,\ y \in \mathbb{R}\,.$$

- On fixe y, et on étudie la solution du problème (5)(6), mais restreinte à une droite de la forme (13). On pose

$$(14) \qquad v(t) = u(X(t), t) \quad , t \geq 0,$$

où $X(\bullet)$ vérifie par exemple (11) et (12), c'est à dire la relation (13). Il vient par composition des dérivées :

(15) $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dX}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial t}$

or dans le membre de droite de la relation (15), on peut remplacer $\dfrac{dX}{dt}$ par sa valeur imposée à la relation (11). On obtient

(16) $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\, a + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$

puisque $u(\bullet,\bullet)$ est solution de l'advection (5). On tire donc la chaîne d'égalités :

(17) $\begin{cases} u(at+y,t) = u(X(t),t) = v(t) = v(0) = \\ \quad = u(X(0),0) = u(y,0) = u_0(y) \end{cases}$

compte tenu successivement de (13), (14), (16), (14), (13) et (6). On peut réécrire la relation (17) sous une forme plus parlante.

- Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$. Puis calculons $y \in \mathbb{R}$ de sorte que

(18) $at + y = x$.

La relation (17), c'est à dire $u(at+y,t) = u_0(y)$ peut s'écrire en fonction de x seulement. Il vient

(19) $u(x,t) = u_0(x - at), \quad x \in \mathbb{R}, \; t \geq 0$.

La relation (19) fournit donc une solution nécessaire pour le problème (5)(6).

- on vérifie sans peine que la relation (19) définit bien une solution pour le problème (5)(6). On a d'abord, compte tenu de (19) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\, a\, (u_0')(x-at)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = (u_0')(x-at).$$

On multiplie la seconde égalité par a, on ajoute avec la première. On en déduit que $u(\bullet,\bullet)$ est solution de l'équation d'advection (5). La vérification de la condition initiale (6) est encore plus simple. Si on prend $t=0$ au sein de la relation (19), on lit clairement (6). Nous avons donc démontré la

<u>Proposition</u> ①. Si $u_0(\bullet)$ est dérivable, le problème (5)(6) formé de l'équation d'advection (5) et de la condition initiale (6) a une solution unique $u(\bullet,\bullet)$. Celle-ci est calculée par la relation (19).

4) <u>Transport sans déformation</u>

- Nous pouvons illustrer le résultat précédent, en l'appliquant au "chapeau chinois" $u(\bullet,\bullet)$ associé à la condition initiale u_0 définie par

$$(20)\qquad u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > \varepsilon \\ \dfrac{1}{\varepsilon} - \dfrac{|x|}{\varepsilon^2} & \text{si } |x| \leq \varepsilon \end{cases}.$$

Les points caractéristiques de cette condition initiale sont : $x = -\varepsilon$ (alors u_0 vaut 0, mais u_0' saute de 0 à $1/\varepsilon^2$), $x = 0$ (alors u_0 est maximale et vaut $\frac{1}{\varepsilon}$), $x = \varepsilon$ (alors u_0 vaut 0, mais u_0' saute de $-\frac{1}{\varepsilon^2}$ à 0).

- Les droites caractéristiques issues de ces trois valeurs de condition initiale vérifient $x = at - \varepsilon$, $x = at$, $x = at + \varepsilon$. Au bout d'un temps $t = T$, les trois points caractéristiques se situent en $x = aT - \varepsilon$, $x = aT$, $x = aT + \varepsilon$, et la solution $u(\bullet, T)$ à l'instant T vérifie en conséquence $u(x,T) = 0$ si $x < aT - \varepsilon$ ou $x > aT + \varepsilon$, $u(aT, T) = \frac{1}{\varepsilon}$, et $u(\bullet, T)$ affine entre ces points caractéristiques: $u(aT - \xi, T) = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\xi}{\varepsilon^2}$ si $0 \leq \xi \leq \varepsilon$, $u(aT + \xi, T) = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\xi}{\varepsilon^2}$ si $0 \leq \xi \leq \varepsilon$. Nous laissons au lecteur le soin de dessiner cette fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto u(x,T) \in \mathbb{R}$ pour $T > 0$ fixé.
- Une application directe de la relation (19) à la condition initiale (20) est sans surprise:

$u_0(x-aT) = 0$ si $|x-aT|>\varepsilon$, $= \frac{1}{\varepsilon} - \frac{|x-aT|}{\varepsilon^2}$ si $|x-aT|\leqslant \varepsilon$. Dans les relations précédentes, nous avons simplement posé $x - aT = \pm \xi$ avec $0 \leqslant \xi \leqslant \varepsilon$.

- Il faut avoir en tête l'image intuitive d'une rivière qui coule à la vitesse a. A $t=0$, on connaît un certain niveau de concentration (de sel, de polluant, ...) A un instant ultérieur T, cette concentration est simplement "déplacée" de aT.

D, mars 2003.