Cours 11 Espaces vectoriels, applications linéaires et matrices

- **Bases de $\mathbb{R}^3$**

a) A quelle condition sur les nombres réels a et b la famille de vecteurs
$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

b) Même question avec les trois vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$.

- **Expression d'une application linéaire dans une base**

Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on pose $u(X) = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que l'application u est linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

b) On pose $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

c) Quelle est la matrice A_e de l'application linéaire u relativement à la base (e_1, e_2) ?

d) On pose $f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $f_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Reprendre les questions b) et c) avec cette nouvelle famille de vecteurs (f_1, f_2) qui remplace la famille (e_1, e_2).

e) Même question avec $g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

François Dubois et Chloé Mimeau, 07 décembre 2016.