le cnam **Exercices d'Analyse et Calcul Matriciel**

Cours 6 — Séries entières

- **Rayons de convergence** [d'après Nathalie Zanon]

  Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes

  a) $\sum_{n\geq 0} n!\,x^n$

  b) $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{z}{\rho}\right)^n$, avec $\rho > 0$ donné.

  c) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!}\,x^n$

  d) $\sum_{n\geq 0} \frac{\sinh n}{(\cosh n)^2}\,x^n$

  e) $\sum_{n\geq 0} \left(b_n\, z\right)^n$, où b_n est une suite positive donnée qui tend vers zéro si n tend vers l'infini.

  f) $\sum_{n\geq 0} \left(\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)\right) x^n$ [et la compétence de Marco Caponigro !]

- **Rayons de convergence et somme de séries** [d'après Nathalie Zanon]

  Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme des séries suivantes :

  a) $\sum_{n\geq 0} x^n$

  b) $\sum_{n\geq 1} n\,x^{n-1}$

  c) $\sum_{n\geq 2} n\,(n-1)\,x^{n-2}$

  d) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$.

- **Une relation classique**

  a) On se donne la série entière $f(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots = \sum_{k\geq 0} (-1)^k x^{2k}$.

Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

b) Exprimer $f(x)$ à l'aide d'une expression algébrique simple.

c) Donner l'expression algébrique de la fonction $F(x)$ obtenue à partir de $f(x)$ en intégrant terme à terme et telle que $F(0) = 0$.

d) Montrer qu'on a la relation $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$.

François Dubois, 02 novembre 2016.