Cours 14 Valeurs propres et vecteurs propres

- Rappel sur les déterminants

On rappelle que le déterminant d'une matrice n'est pas modifié lors d'un changement de base. On peut donc parler du déterminant d'une application linéaire d'un espace E de dimension n dans lui-même.
Le déterminant d'une matrice diagonale est facile à calculer.

On a $\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \ldots \alpha_n$.

- Quelques exemples d'opérateurs avec une matrice diagonale

L'application linéaire σ [respectivement p] qui transforme le plan $\mathbb{R}^2$ avec la matrice $A_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ [respectivement la matrice $A_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$] est une symétrie [respectivement une projection] sur la droite dirigée par le premier vecteur de base et parallèlement au second vecteur de base.
On construit sans difficulté l'image d'un point du plan par l'application linéaire θ de matrice $A_\theta = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- Valeur propre et vecteur propre

On se donne une application linéaire u d'un espace E de dimension n dans lui-même. On dit que le vecteur **non nul** x de l'espace E est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ si et seulement si $u(x) = \lambda\, x$.
Un vecteur propre est défini à un scalaire non nul près : si x est un vecteur propre, alors tout vecteur de la forme $x' = \alpha\, x$ avec α scalaire **non nul** est vecteur propre, associé à la même valeur propre.
Par extension, on dit que le vecteur colonne X **non nul** de $\mathbb{R}^n$ est vecteur propre pour la matrice A avec la valeur propre λ si on a : $A\,X = \lambda\, X$.
Le premier vecteur de base est vecteur propre associé aux valeurs propres respectives 1, 1 et 2 pour les opérateurs de matrices respectives A_σ, A_p et A_θ. Dans les mêmes conditions, le second vecteur de base est vecteur propre associé aux valeurs propres respectives -1, 0 et -1.

- Application linéaire diagonalisable

On dit que l'application linéaire u d'un espace E de dimension n dans lui-même est diagonalisable si on peut trouver une base de vecteurs propres : il existe une base $r_1, \ldots, r_n$ de l'espace E et des nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de sorte que pour tout $j = 1, \ldots, n$, on a $u(r_j) = \lambda_j\, r_j$.

François Dubois et Chloé Mimeau, 11 janvier 2017.

Exemple. Si u est représenté par la matrice $B_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base (e_1, e_2), alors il est diagonalisable dans la base $(f_1 = e_1 + e_2, f_2 = e_1 - e_2)$. Dans cette base, il a pour matrice A_σ.

- Polynôme caractéristique

On se donne une application linéaire u d'un espace E de dimension n dans lui-même, de matrice A dans une base donnée. Le polynôme $p(\lambda) = \det\,(A - \lambda\,\mathrm{I})$ est un polynôme de degré n qui ne dépend que de l'application u. On l'appelle polynôme caractéristique de la matrice A et par extension polynôme caractéristique de l'application linéaire u. de la matrice A.
Le nombre λ est valeur propre de la matrice A si et seulement si λ annule le polynôme caractéristique : $\det\,(A - \lambda\,\mathrm{I}) = 0$.
Par exemple, $\det\,(A_\sigma - \lambda\,\mathrm{I}) = \det\,(B_\sigma - \lambda\,\mathrm{I}) = \lambda^2 - 1$. Les deux valeurs propres sont bien $+1$ et -1 ainsi que vu plus haut.

- Recherche pratique de valeurs propres et de vecteurs propres

On doit d'abord chercher les valeurs des nombres λ pour lesquels on a $\det\,(A - \lambda\,\mathrm{I}) = 0$. Puis pour chaque valeur propre λ, résoudre l'équation linéaire $A\,X = \lambda\,X$ qui a nécessairement au moins une solution **non nulle**.
Rappelons qu'en vertu du théorème de d'Alembert-Gauss, tout polynôme de degré n a exactement n racines éventuellement confondues.
Par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -7 \\ 3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, on trouve $\det\,(A - \lambda\,\mathrm{I}) = -(\lambda + 6)\,(\lambda - 3)\,(\lambda - 9)$ et les valeurs propres sont égales à -6, 3 et 9. Les vecteurs propres respectifs sont colinéaires à $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Une matrice n'est pas toujours diagonalisable

La forme diagonalisée est particulièrement simple. Mais on ne peut pas s'y ramener toujours. Par exemple, la matrice $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a un polynôme caractéristique égal à $\lambda^2 + 1$. Elle est diagonalisable sur les corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes mais elle n'est pas diagonalisable si on utilise uniquement des nombres réels.

Un autre exemple qui présente une obstruction fondamentale. La matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a un polynôme caractéristique égal à λ^2. La valeur propre 0 est valeur propre double. Si la matrice J était diagonalisable, elle serait nulle. Or elle ne l'est pas. La matrice J n'est pas diagonalisable. On observe qu'elle satisfait à la relation $J^2 = 0$.

- Deux cas importants où une matrice est diagonalisable

Si ne polynôme caractéristique de la matrice A d'ordre n a toutes ses racines simples, alors la matrice A est diagonalisable.
C'est le cas de la plupart des exemples proposés jusqu'ici.

Si la matrice A est réelle et symétrique, c'est à dire d'une part $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pour tous les éléments a_{ij} de la matrice et d'autre part A égale à sa transposée A^{t}, égalité qui signifie aussi $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout couple d'indices $1 \leq i,\, j \leq n$, alors il existe une base réelle orthonormée $r_1, \ldots, r_n$ de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ réelles. On a $A\, r_j = \lambda_j\, r_j$ pour tout $1 \leq j \leq n$ avec de plus $(r_i\,,\, r_j) = 0$ si $i \neq j$ et $(r_i\,,\, r_i) = 1$.

- Matrice symétrique réelle d'ordre deux

On peut vérifier pas à pas le résultat précédent pour une matrice symétrique réelle $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$; ses trois coefficients a, b, c sont des nombres réels. On a $\det\,(S - \lambda\, \mathrm{I}) = \lambda^2 - (a + c)\, \lambda + (a\, c - b^2)$. Pour chercher les valeurs propres λ, on doit résoudre une équation du second degré ; le discriminant Δ vaut $(a - c)^2 + 4\, b^2$. Il est toujours positif si a, b et c sont des nombres réels. S'il est nul, les deux valeurs propres sont confondues. Mais dans ce cas, on a $a = c$, $b = 0$ et la matrice S est proportionnelle à l'identité : $S = a\mathrm{I}$ et elle est diagonale. Si $\Delta > 0$, on a deux valeurs propres réelles distinctes : $\lambda_+ = \frac{1}{2}\,\big(a + c + \sqrt{\Delta}\big)$ et $\lambda_- = \frac{1}{2}\,\big(a + c - \sqrt{\Delta}\big)$. Deux vecteurs propres orthonormés sont donnés par $r_+ = \dfrac{1}{\sqrt{2\,(\Delta - (a - c)\,\sqrt{\Delta})}} \begin{pmatrix} 2\,b \\ c - a + \sqrt{\Delta} \end{pmatrix}$ et $r_- = \dfrac{1}{\sqrt{2\,(\Delta + (a - c)\,\sqrt{\Delta})}} \begin{pmatrix} 2\,b \\ c - a - \sqrt{\Delta} \end{pmatrix}$. On vérifie sans peine que ces deux vecteurs sont normés. De plus, $(r_+\,,\, r_-)$ est proportionnel à $4\, b^2 + (c - a)^2 - \Delta = 0$ et les deux vecteurs propres sont orthogonaux.

- Exemple de matrice symétrique réelle d'ordre trois

On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 11 \\ -4 & 14 & -4 \\ 11 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. C'est une matrice symétrique réelle ; ses valeurs propres sont -12, 6 et 18. Les vecteurs propres associés peuvent être rangés dans une matrice de passage $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$. On constate que les colonnes (et aussi les lignes !) de cette matrice sont orthogonales.

- Suite de Fibonacci

La suite réelle u_n définie par 0, 1, 2, 3, 5, 8,… c'est à dire $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ est la suite de Fibonacci. C'est une suite géométrique pour une variable vectorielle. En effet, si on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ on a $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_{n+1} = F\, X_n$ pour tout entier n, avec $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $X_n = F^n\, X_0$. La matrice F^n se calcule de la façon suivante : on diagonalise la matrice (réelle et symétrique !) F : $F = P D P^{-1}$. La matrice diagonale D contient les valeurs propres de F, à savoir le nombre d'or $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et l'opposé de son inverse $-\frac{1}{\Phi}$: $D = \begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Phi} \end{pmatrix}$.

Alors $F^n = P D^n P^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} \Phi^n & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{\Phi^n} \end{pmatrix}$. On peut alors exprimer u_n en fonction de l'entier n et du nombre d'or Φ grâce à un calcul sans difficulté mais un peu long qui est laissé au lecteur.