le cnam **Analyse et Calcul Matriciel**

Cours 2 Séries numériques à termes positifs

- Quelques exemples

$1+1+1+\ldots$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ (série géométrique)

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ (série harmonique)

$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$ (série de Riemann)

- Définition et notations

On se donne une suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs : $u_n \geq 0$ pour tout entier n. On forme la somme S_n des $n+1$ premiers termes de la suite : $S_n = u_0+u_1+\ldots+u_n$. On peut écrire aussi par récurrence : $S_0 = u_0$ et $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$ pour tout entier n. La question posée est de savoir si S_n a une limite lorsque n tend vers l'infini.

- Résultat fondamental

Ou bien la suite S_n est majorée et comme elle est croissante, elle converge ; on dit que la série de terme général u_n converge. On note sa limite sous la forme $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$, qui est dans ce cas un nombre réel positif. Ou bien la suite S_n n'est pas majorée et elle tend vers $+\infty$; on dit que la série de terme général u_n diverge ; la somme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ vaut alors $+\infty$.

- Résultat très important

Si la série de terme général u_n converge, alors la suite u_n tend vers zéro si n tend vers l'infini. Donc le premier exemple où $u_n \equiv 1$ définit une série divergente. Pour l'exemple de la série harmonique où $u_n \equiv \frac{1}{n}$ on ne peut pas encore conclure à la convergence ou à la divergence.

- Série géométrique

Si $q \neq 1$, on a la relation $1+q+\ldots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Si $|q|<1$, la somme $1+q+\ldots+q^n$ converge vers $\frac{1}{1-q}$. C'est le cas pour le second exemple où q est égal à $\frac{1}{2}$.

- Critère de comparaison pour l'étude de la convergence

On se donne deux suites u_n et v_n telles que $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout entier n. Si la série de terme général v_n converge, c'est aussi le cas pour la série de terme général u_n. Si la série de terme général u_n diverge, c'est aussi le cas pour la série de terme général v_n.

- Comparaison de la convergence d'une série et d'une intégrale

Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$, décroissante et à valeurs positives : $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$. On pose $u_n = f(n)$. Si l'intégrale $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, alors la série de terme général u_n converge. Si l'intégrale $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge, il en est de même de la série de terme général u_n. Comme $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ diverge si $\alpha \leq 1$ et converge si $\alpha > 1$, la série harmonique diverge et la série de Riemann proposée comme quatrième exemple converge.

- Une curiosité historique : critères de d'Alembert et de Cauchy

On suppose $u_n > 0$ pour tout n et on suppose que la suite $v_n \equiv \frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite ℓ pour n tendant vers l'infini. Si $\ell > 1$ la série u_n diverge et si $\ell < 1$ la série u_n converge. Mêmes conclusions si on remplace la suite v_n par $w_n \equiv \sqrt[n]{u_n}$.

François Dubois et Chloé Mimeau, 05 octobre 2016.