SINGULARITES IRREGULIERES ET RESURGENCE MULTIPLE

par Jean Ecalle (Orsay)

English summary : On the simplest conceivable example, that of local analytic differential equations formally conjugate to the Euler equation, we investigate three quite distinct types of resurgence : equational resurgence, synthesis resurgence, and quantum resurgence. We then proceed to show how they relate to one another and attempt to give an idea of their range and applications.

PLAN :

§1. RAPPEL SUR LES FONCTIONS RESURGENTES.

Sur l'exemple des équations différentielles analytiques et formellement conjuguées à l'équation d'Euler nous allons mettre en évidence trois types de résurgence bien différents (résurgence équationnelle, quantique, de synthèse) et étudier leurs rapports. Nous tâcherons ensuite de dégager la portée générale de chaque type. Commençons par un bref rappel sur les fonctions résurgentes.

Définition 1: (Fonctions résurgentes à singularités logarithmiques)

On appelle ainsi toute série formelle du type :

(1.1) $$\varphi(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z^{-n} \qquad (a_n \in \mathbb{C})$$

dont la transformée de Borel :

(1.2) $$\hat{\varphi}(\zeta) = \sum_{n\geq 1} a_n \zeta^{n-1}/(n-1)!$$

converge à l'origine et engendre par prolongation analytique une fonction analytique n'ayant que des singularités isolées et logarithmiques, c'est-à-dire du type :

(1.3) $$\hat{\varphi}(\zeta) = \hat{\psi}_\omega(\zeta-\omega) + \frac{1}{2\pi i}\log(\zeta-\omega)\,\hat{\varphi}_\omega(\zeta-\omega) \qquad (\zeta \text{ voisin de } \omega)$$

avec $\hat{\psi}_\omega$ et $\hat{\varphi}_\omega$ régulières à l'origine.

Proposition 1. (Algèbre des fonctions résurgents à singularités logarithmiques)

L'espace des fonctions résurgentes à singularités logarithmiques est stable pour la multiplication ordinaire des séries formelles :

(1.4) $$\varphi_1, \varphi_2 \mapsto \varphi_3 = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \ .$$

Notons que la transformation de Borel transmute ce produit en convolution :

(1.4bis) $$\hat{\varphi}_3(\zeta) = \hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2(\zeta) = \int_o^\zeta \varphi_1(\zeta_1)\varphi_2(\zeta-\zeta_1)d\zeta_1 \qquad (\zeta \text{ voisin de } 0)$$

L'algèbre multiplicative des fonctions résurgentes est également stable pour la dérivation ordinaire ∂ :

(1.5) $$\partial : \varphi(z) \mapsto \frac{\partial}{\partial z}\varphi(z)$$

(1.5bis) $$\hat{\partial} : \hat{\varphi}(\zeta) \mapsto -\zeta\,\hat{\varphi}(\zeta)$$

et pour la composition O (ou substitution) :

(1.6) $$\psi_1, \psi_2 \mapsto \psi_3(z) = \psi_1(z+\psi_2(z))$$

$$\hat{\psi}_3(\zeta) = \hat{\psi}_1(\zeta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\hat{\psi}_2)^{*n} * (\zeta^n \hat{\psi}_1) \tag{1.6bis}$$

Nous allons maintenant introduire une famille d'opérateurs linéaires Δ_ω ($\omega \in \mathbb{C}^*$) auxquels nous demandons deux choses :

(i) permettre une mesure du comportement singulier des φ .

(ii) être des dérivations.

Définition 2. (Dérivations étrangères Δ_ω)

Soit ω dans $\mathbb{C}^*$ et soit φ dans l'algèbre des fonctions résurgentes à singularités logarithmiques.

α) Si $\hat{\varphi}$ ne possède aucune singularité au-dessus de ω on pose :

$$(\Delta_\omega \hat{\varphi})\ (\zeta) = 0 \tag{1.7}$$

β) Si ω est la première singularité rencontrée en prolongeant $\hat{\varphi}$ à partir de 0 le long de $[0,\omega]$ on pose :

$$(\Delta_\omega \hat{\varphi})\ (\zeta) = \hat{\varphi}_\omega(\zeta) \tag{1.8}$$

avec $\hat{\varphi}_\omega$. comme en (1.3).

γ) Plus généralement si, prolongeant $\hat{\varphi}$ le long de $[0\omega]$ à partir de 0 en contournant les obstacles intermédiaires à droite ou à gauche mais sans retour en arrière, on rencontre des singularités au-dessus des points consécutifs $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{r-1}, \omega_r = \omega$, on pose :

$$(\Delta_\omega \hat{\varphi})(\zeta) = \sum_{\varepsilon_i = \pm} \varepsilon_r \cdot \frac{p!q!}{r!} \cdot \hat{\varphi}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r}(\zeta+\omega) \tag{1.9}$$

(i) avec une somme finie Σ étendue à tous les $\varepsilon_i = \pm$

(ii) avec p (resp. q) égal au nombre de signes + (resp. -) dans la suite $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{r-1}$ (exclure ε_r)

(iii) avec un ζ situé sur $[0\omega_1]$ et proche de 0

(iiii) avec $\hat{\varphi}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r}(\zeta+\omega)$ désignant la valeur en $\zeta+\omega$ de la branche de $\hat{\varphi}$ obtenue par prolongation analytique à partir de 0 en contournant chaque obstacle ω_i dans le sens positif ou négatif selon que ε_i vaut + ou - .

Par prolongation analytique en ζ à partir de 0 , le germe $\Delta_\omega \hat{\varphi}$ définit une fonction $\hat{\varphi}_\omega$ à singularités logarithmiques :

$$(1.10)\qquad \hat{\varphi}_\omega(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\omega)\, \zeta^{n-1}/(n-1)!$$

qui est l'image par Borel d'une fonction résurgente φ_ω :

$$(1.11)\qquad \varphi_\omega(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\omega)\, z^{-n}$$

Comme aucune confusion n'est à craindre on pose simultanément :

$$(1.12)\qquad \Delta_\omega\, \varphi(z) = \varphi_\omega(z) \qquad \text{("modèle formel")}$$

$$(1.12\text{bis})\qquad \Delta_\omega\, \hat{\varphi}(\zeta) = \hat{\varphi}_\omega(\zeta) \qquad \text{("modèle additif")}$$

<u>Proposition 2</u>. (<u>Dérivations étrangères</u> Δ_ω)

Les définitions précédentes sont cohérentes, car la somme pondérée figurant au second membre de (1.9) ne change pas quand on introduit des singularités fictives ω_i . De plus, les opérateurs Δ_ω sont des dérivations, dites <u>dérivations étrangères</u>, de l'algèbre des fonctions résurgentes à singularités logarithmiques :

$$(1.13)\qquad \Delta_\omega(\varphi\cdot\psi) = (\Delta_\omega\varphi)\cdot\psi + \varphi\cdot(\Delta_\omega\psi)$$

$$(1.13\text{bis})\qquad \Delta_\omega(\hat{\varphi}*\hat{\psi}) = (\Delta_\omega\hat{\varphi})*\hat{\psi} + \hat{\varphi}*(\Delta_\omega\hat{\psi})$$

Enfin, pour connaître les valeurs de la fonction analytique $\hat{\varphi}(\zeta)$ sur toute sa surface de Riemann, il suffit de connaître les dérivées successives $\Delta_{\omega_n}\ldots\Delta_{\omega_2}\Delta_{\omega_1}\hat{\varphi}(\zeta)$ sur leurs feuillets principaux ou "étoiles d'holomorphie".

<u>Proposition 3</u>. (<u>Dérivations étrangères pointées</u> $\dot{\Delta}_\omega$)

L'algèbre de Lie engendrée par les dérivations étrangères Δ_ω $(\omega \in \mathbb{C}^*)$ est <u>libre</u>. Les Δ_ω interagissent avec la dérivation naturelle et avec la composition (substitution) de la manière suivante :

$$(1.14)\qquad \Delta_\omega\, \partial = (\partial-\omega)\Delta_\omega \qquad \left(\partial = \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$(1.15)\qquad \Delta_\omega(\varphi\circ f) = e^{-\omega(f-z)}\,(\Delta_\omega\varphi)\circ f + \left(\frac{\partial}{\partial z}\varphi\right)\circ f\cdot\Delta_\omega f$$

avec φ,ψ résurgentes et $f(z) = z+\psi(z)$.

Si on introduit les dérivations étrangères pointées :

$$(1.16)\qquad \dot{\Delta}_\omega = e^{-\omega z}\,\Delta_\omega$$

ces relations se simplifient :

(1.14bis) $\dot{\Delta}_\omega\, \partial = \partial\, \dot{\Delta}_\omega$

(1.15bis) $\dot{\Delta}_\omega(\varphi \circ f) = (\dot{\Delta}_\omega\, \varphi) \circ f + (\partial\varphi) \circ f \cdot (\dot{\Delta}_\omega f)$

La multiplication formelle par $e^{-\omega z}$ fait évidemment sortir de l'algèbre des fonctions résurgentes. Aussi les dérivations étrangères pointées doivent-elles être prises comme de purs symboles, destinés à faciliter les calculs et alléger les énoncés.

Fonctions résurgentes générales.

Les fonctions résurgentes à singularités logarithmiques ne suffisent pas à tous les besoins. Dans maintes applications, on est conduit à introduire des fonctions résurgentes $\varphi(z)$ dont les transformées de Borel $\hat{\varphi}(\zeta)$ (convenablement définies) :

(i) ne sont plus régulières à l'origine

(ii) restent prolongeables "partout sans coupures"

(iii) mais peuvent présenter des singularités quelconques et non plus logarithmiques.

Les transformées de Borel $\hat{\varphi}(\zeta)$ qu'il convient alors d'envisager sont des "germes qualifiés" (espèces de microfonctions globales, voir [E1] chap.1 et 7). Toutes les constructions précédentes s'étendent à ces fonctions résurgentes générales, à cette seule différence près que les dérivations étrangères Δ_ω ne doivent plus être indexées sur $\mathbb{C}^*$ mais sur $\mathbb{C}_\infty$ (surface de Riemann de $\log \zeta$) ou éventuellement sur $\mathbb{C}_p$ (surface de Riemann de $\zeta^{1/p}$) . Voir [E1], chapitre 1.

Notations :

Comme nous aurons dans cet article à envisager des fonctions résurgentes en trois variables distinctes z,s,x , nous affixerons la variable (en haut à gauche) sur les dérivations étrangères, simples ou pointées. Ainsi :

(1.17) $\quad {}^{z}\dot{\Delta}_\omega = e^{-\omega z} . {}^{z}\Delta_\omega \;;\quad {}^{s}\dot{\Delta}_\omega = e^{-\omega s} . {}^{s}\Delta_\omega \;;\quad {}^{x}\dot{\Delta}_\omega = e^{-\omega x} . {}^{x}\Delta_\omega$

§2. SINGULARITES IRREGULIERES ET TRIPLE RESURGENCE.

Même en leurs singularités irrégulières, les équations différentielles à coefficients analytiques admettent des solutions formelles (séries entières ou apparentées). Bien qu'elles divergent, ces solutions formelles ne sont pas totalement erratiques, tant s'en faut : elles sont presque toujours résurgentes en la variable t de l'équation ou en l'une de ses puissances $z = t^{-p}$. Cette résurgence, intimement liée à la variable t de l'équation, est dite <u>résurgence équationnelle</u>. Elle conduit tout droit à la classification analytique de ces équations et permet de décrire le comportement local de leurs solutions. Voir à ce sujet [E7] ou, pour une étude plus poussée, le chapitre 2 de [E3].

Mais ce n'est pas tout. La recherche de "représentants canoniques" dans les classes analytiques d'équations différentielles conduit à un nouveau type de résurgence ("résurgence de synthèse"). Il peut enfin y avoir résurgence par rapport à différents paramètres figurant dans l'équation et notamment par rapport au "paramètre planckien" ("résurgence quantique").

Nous allons ici illustrer ces trois résurgences sur l'exemple le plus simple qui soit, celui de l'équation d'Euler :

$$t^2 \frac{d}{dt} Y + Y = 0 \qquad (Y = Y(t)) \tag{2.1}$$

et des équations analytiques qui lui sont <u>formellement</u> conjuguées. Ce sont les équations locales de la forme :

$$t^2 \frac{d}{dt} y + y + \sum_{m,n\geq o} b_{m,n}\, t^m y^n = 0 \qquad (y = y(t)) \tag{2.2}$$

avec $\sum b_{m,n}\, t^m y^n \in \mathbb{C}\{t,y\}$ et avec :

$$b_{o,o} = b_{o,1} = 0 \quad , \quad b_{1,1} = 2b_{1,o}\, b_{o,2} \tag{2.2bis}$$

Sous les conditions (2.2bis), en effet, l'équation analytique (2.2) est formellement conjuguée à l'équation d'Euler (2.1) par des changements d'inconnues :

$$Y \mapsto y = h(t,Y) \quad ; \quad y \mapsto Y = k(t,y) \tag{2.3}$$

avec des séries h et k qui sont généralement divergentes en t, quoique toujours convergentes en l'autre variable (Y ou y). D'où un problème non trivial de classification analytique. Ce problème est traité par MARTINET et RAMIS dans [MR1] par des méthodes géométriques et cohomologiques. Nous l'abordons ici, au §3, du point de vue de la résurgence.

§3. <u>L'EQUATION D'EULER ET LA RESURGENCE EQUATIONNELLE.</u>

Comme c'est par rapport a $z = t^{-1}$ que nous aurons résurgence, il est commode de tout rapporter à z, ce qui revient à se placer au voisinage de l'infini. L'équation d'Euler devient :

$$\frac{d}{dz} Y = Y \qquad (Y = Y(z)) \tag{3.1}$$

L'équation (2.1) devient :

$$\frac{d}{dz} y = y + \sum_{m,n\geq 0} b_{m,n} z^{-m} y^n \qquad (y = y(z)) \tag{3.2}$$

avec $\Sigma\, b_{m,n} z^{-m} y^n \in \mathbb{C}\{z^{-n} y^n\}$ et avec des conditions (2.2bis) inchangées. Enfin, les séries conjugantes (2.3) s'écrivent :

$$y = h(z,Y) = Y + \sum_{n=-1}^{+\infty} h_n(z)\, Y^{n+1} \qquad \text{avec } h_n \in \mathbb{C}[[z^{-1}]] \tag{3.3}$$

$$Y = k(z,y) = y + \sum_{n=-1}^{+\infty} k_n(z)\, y^{n+1} \qquad \text{avec } k_n \in \mathbb{C}[[z^{-1}]] \tag{3.4}$$

Proposition 4. (Résurgence des transformations conjugantes)

Les séries h et k sont résurgentes (*) en la variable z. Les seules dérivations étrangères ${}^z\Delta_\omega$ susceptibles d'agir sur h et k correspondent à des indices entiers :

$$\omega \in \{-1,1,2,3,4\ldots.\} \tag{3.5}$$

et il existe des scalaires A_n bien déterminés tels que l'on ait :

$${}^z\Delta_n\, h(z,Y) = A_n\, Y^{n+1} \frac{\partial}{\partial Y} h(z,Y) \qquad (n+1 \in \mathbb{N}) \tag{3.6}$$

$${}^z\Delta_n\, k(z,Y) = -A_n (k(z,y))^{n+1} \qquad (n+1 \in \mathbb{N}) \tag{3.7}$$

Proposition 5. (Invariants analytiques)

Les scalaires A_n sont des invariants analytiques (**) et holomorphes (***) de l'équation (3.2). L'ensemble

$$\{A_{-1}, A_1, A_2, A_3, \ldots\} \tag{3.8}$$

constitue un système complet d'invariants analytiques de (3.2).

(*) Cela veut dire que chaque composante h_n et chaque composante k_n est résurgente en z. La résurgence est ici de type logarithmique, mais avec en plus des pôles simples.

(**) Ils sont invariants par rapport aux changements de variables analytiques du type (3.3). Si on admet les changements du type $y \to \alpha y + \ldots$ avec $\alpha \neq 0$, il faut considérer la famille (3.8) comme définie modulo les transformations $A_n \to c^n A_n$ $(c \in \mathbb{C})$.

(***) Ils sont fonctions holomorphes de l'équation (3.2), c'est-à-dire de ses coefficients de Taylor.

Pour les démonstrations, voir [E3] ou [E7].

L'équation (3.1) admettant pour solution générale $Y = ue^z$ (u constante), on obtient la solution formelle générale $y = y(z,u)$ de (3.2), dite <u>intégrale formelle</u>, en posant :

$$(3.9) \qquad y(z,u) = h(z,ue^z) \in \mathbb{C}[[z^{-1}]] \times \mathbb{C}\{ue^z\}$$

Introduisant les dérivations étrangères pointées (1.16) et tenant compte de (3.6), on voit que l'intégrale formelle de (3.2) vérifie les équations de résurgence :

$$(3.10) \qquad \overset{z\bullet}{\Delta}_n \, y(z,u) = \mathbb{A}_n \, y(z,u) \qquad , \qquad (n = -1,1,2,3\ldots)$$

avec au second membre des invariants $\mathbb{A}_n$ qui sont des opérateurs différentiels ordinaires de la forme :

$$(3.11) \qquad \mathbb{A}_n = A_n \, u^{n+1} \frac{\partial}{\partial u} \qquad (A_n \in \mathbb{C})$$

Comme nous verrons au §6, c'est sous cette forme que les résultats des propositions 4 et 5 s'étendent le plus commodément aux équations différentielles singulières générales.

<u>Difféomorphisme de retour</u> (*)

Posons maintenant :

$$(3.12) \qquad \begin{cases} f^*(z) = f^*_y(z) = \log(e^z/k(z,y)) \\ \qquad\qquad = z - \log y + \sum\limits_{m,n} \gamma_{m,n} \, z^{-m} \, y^n \end{cases}$$

et notons $f(z) = f_y(z)$ l'unique série entière en z^{-1} et y telle que :

$$(3.13) \qquad f^*(f(z)) = 2\pi i + f^*(z) \qquad \text{avec} \quad f(z) = z + 2\pi i + \ldots$$

Tout comme k , f est analytique en y , résurgente en z , et de transformée de Borel à croissance esponentielle. Appliquant la dérivation étrangère $\dot{\Delta}_n = \overset{z\bullet}{\Delta}_n$ à (3.12) on trouve d'après (3.7) :

$$(3.14) \qquad \dot{\Delta}_n \, f^* = A_n \, e^{-nf^*}$$

avec A_n comme en (3.7) et donc indépendant de y . Appliquant la même dérivation à (3.13) on trouve, compte tenu de la règle (1.15bis) :

(*) Pour la signification géométrique de cette notion, voir [MR1] et [MR2].

(3.15) $$(\frac{\partial}{\partial z} f^*)\circ f \,.\, \dot{\Delta}_n f = A_n e^{-nf^*} - A_n\, e^{-nf^*\circ f} \quad .$$

Mais le second membre est nul d'après (3.13). Finalement :

(3.16) $${}^z\Delta_\omega\, f = 0 \qquad\qquad (\forall \omega \in \mathbb{C})$$

Pour chaque y fixé et suffisamment petit, la série $f(z) = f_y(z)$ définit donc un germe d'application holomorphe à l'infini :

(3.17) $$f : z \mapsto f(z) = z + 2\pi i + O(z^{-2})$$

qui, rapporté à la variable $t = z^{-1}$, devient un germe d'application tangente à l'identité et laissant fixe l'origine :

(3.18) $$f : t \mapsto t - 2\pi i\, t^2 + (2\pi i)^2\, t^3 + O(t^4)$$

Inversement, à tout difféo f de la forme (3.17) on sait (*) faire correspondre une série formelle f^* qu'on appelle itérateur de f et qui se trouve vérifier des équations de résurgence de la forme (3.14) mais pour tout entier relatif $n \neq 0$ et non plus seulement pour $n \geq -1$. On peut donc attacher à chacun de ces f une suite bilatérale de scalaires :

(3.19) $$\{\ldots,\, A_{-2}, A_{-1}, A_1, A_2, \ldots\}$$

Ici encore, les A_n sont des invariants analytiques et holomorphes de f . Cela veut dire que $A_n = A_n(f)$ est holomorphe en f et invariant relativement aux conjugaisons analytiques :

(3.20) $$A_n(g^{-1}\circ f\circ g) = A_n(f) \qquad\qquad (\forall g,\ g(0) = 0,\ g'(0) = 1)$$ (*)

Les scalaires (3.19) constituent même un système complet d'invariants analytiques pour les difféos : f_1 et f_2 sont analytiquement conjugués si $A_n(f_1) = A_n(f_2)$ pour tout n .

Notion de latéralité.

En fait, et pour des raisons qui n'apparaîtront clairement qu'au §6, on est conduit à distinguer, pour les difféos de la forme (3.17), cinq types de classes analytiques, caractérisés chacun par le support S des invariants :

(*) Voir [E2] chapitre 9.

(**) Si on impose seulement $g'(0) \neq 0$, il faut remplacer (3.20) par :

(3.20bis) $$A_n(g^{-1}\circ f\circ g) = c^n\, A_n(f)$$

avec une constante c qui ne dépend que des premiers coefficients de g (mais pas de n).

(3.21) $$S = \{n;\ A_n \neq 0\} \subset \mathbb{Z}^*$$

Ce sont :

(i) les classes <u>unitaires</u>, de support S réduit à un point $\{n_o\}$

(ii) les classes <u>binaires</u>, de support S réduit à deux points symétriques $\{-n_o, n_o\}$

(iii) les classes <u>unilatérales</u>, de support S contenu dans un ensemble $\{n_o, 2n_o, 3n_o, \ldots\}$

(iiii) les classes <u>sesquilatérales</u>, de support S contenu dans un ensemble $\{-n_o, n_o, 2n_o, 3n_o, \ldots\}$

(iiiii) les classes <u>bilatérales</u>, de support S quelconque.

Selon les besoins, on entend ces définitions au sens <u>strict</u> ou <u>large</u> de manière à ce que chaque type <u>exclue</u> ou <u>inclue</u> les précédents.

On note qu'il n'existe pas, pour les équations (3.2), de classes bilatérales (strictes). Seuls subsistent les quatre premiers types.

Pour caractériser les familles scalaires (3.19) auxquelles correspondent effectivement des classes analytiques, il est commode de leur associer des familles :

(3.22) $$\{\ldots, \overset{+}{A}_{-2}, \overset{+}{A}_{-1}, \overset{+}{A}_{1}, \overset{+}{A}_{2}, \ldots\}$$

ainsi construites :

(3.23) $$\begin{cases} u + \sum\limits_{n\geq 1} \overset{+}{A}_n\, u^{n+1} = u + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{m!}\Big\{ \sum\limits_{n\geq 1} A_n\, u^{n+1} \dfrac{\partial}{\partial u}\Big\}^m . u \\[2ex] u + \sum\limits_{n\geq 1} \overset{+}{A}_{-n}\, u^{n+1} = u + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{m!}\Big\{ \sum\limits_{n\geq 1} A_{-n}\, u^{n+1} \dfrac{\partial}{\partial u}\Big\}^n . u \end{cases}$$

On note que :

(3.24) $$\begin{cases} \overset{+}{A}_n = A_n + \text{polynôme en } A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \\[1ex] \overset{+}{A}_{-n} = A_{-n} + \text{polynôme en } A_{-1}, A_{-2}, \ldots, A_{-(n-1)} \end{cases}$$

<u>Proposition 6</u> <u>(Caractérisation des familles d'invariants)</u>

α) Pour que les scalaires (3.19) soient les invariants d'une classe analytique de difféos locaux (3.17), il faut et il suffit que les scalaires associés (3.22) vérifient :

(3.24) $$\limsup |\overset{+}{A}_n|^{1/|n|} < \infty \qquad \text{pour } n \to \pm\infty$$

β) Pour que les scalaires (3.8) soient les invariants d'une classe analytique d'équations (3.2), il faut et il suffit que les scalaires associés (3.22) vérifient :

$$(3.25) \qquad \limsup |A_n^+|^{1/n} < \infty \qquad \text{pour} \quad n \to +\infty$$

Pour la démonstration de α , voir [Ma] ou [E2] et pour celle de β , voir [MR1] ou [E3].

<u>Corollaire de la proposition 6.</u> <u>(Correspondance équations-difféos)</u>.

Il y a bijection entre les classes analytiques d'équations différentielles formellement conjuguées à l'équation d'Euler $t^2y'+y = 0$ et les classes analytiques sesquilatérales (*) de difféos locaux formellement conjugués à l'homographie $t \to t/1+2\pi it$.

Pour l'interprétation géométrique, voir [MR1] et [MR2].

§4. <u>L'EQUATION D'EULER ET LA RESURGENCE DE SYNTHESE</u>.

Revenons aux équations (3.2) et à leurs classes analytiques, caractérisées chacune par une famille sesquilatérale d'invariants $\{A_n\}$. Il est naturel de chercher, dans chaque classe, des représentants qui soient d'une forme aussi élémentaire que possible et qui dépendent d'une famille $\{B_n\}$ à un seul indice. Les équations de la forme :

$$(4.1) \qquad \frac{d}{dz} y = y + \sum_{n \geq 1} B_n \, y^{n+1}$$

ne conviennent évidemment pas, car elles sont toutes analytiquement conjuguées à (3.1). La forme la plus élémentaire qui convienne est celle-ci :

$$(4.2) \qquad \frac{d}{dz} y = y - \frac{1}{2\pi iz} \{B_{-1} + B_1 y^2 + B_2 y^3 + B_3 y^4 + \dots\}$$

avec bien sûr :

$$(4.2\text{bis}) \qquad \limsup |B_n|^{1/n} < \infty \quad .$$

Elle est dite <u>forme canonique</u>. Les coefficients B_n qu'elle comporte jouent un rôle parfaitement symétrique des A_n . De fait, les invariants A_n d'une équation canonique (3.2) s'expriment facilement en fonction des B_n et du moule hyperlogarithmique $V^{\bullet}$ introduit dans [E1] :

(*) au sens large

Proposition 7 (les A_n en fonction des B_n)

Si on introduit les opérateurs différentiels

$$(4.3) \qquad \mathbb{A}_n = A_n\, u^{n+1} \frac{\partial}{\partial u} \quad , \quad \mathbb{B}_n = B_n\, u^{n+1} \frac{\partial}{\partial u} \qquad (n = -1,1,2,3\ldots)$$

on a les relations suivantes :

$$(4.4) \qquad \mathbb{A}_n = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{n_1+\ldots n_r=n} V^{n_1,n_2,\ldots,n_r} [[\mathbb{B}_{n_1}, \mathbb{B}_{n_2}]\ldots \mathbb{B}_{n_r}]$$

avec convergence assurée au second membre (*).

On vérifie que le passage des B_n aux A_n conserve la "latéralité", entendue au sens large. Par exemple, à une famille $\{B_n\}$ binaire ou unilatérale, les formules (4.4) associent une famille $\{A_n\}$ binaire ou unilatérale.

Formellement, les formules (4.4) s'inversent selon :

$$(4.5) \qquad \mathbb{B}_n = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{n_1+\ldots n_r=n} U^{n_1,n_2,\ldots,n_r} [[\mathbb{A}_{n_1}, \mathbb{A}_{n_2}]\ldots \mathbb{A}_{n_r}]$$

où $U^{\bullet}$ désigne le moule hyperlogarithmique inverse du moule $V^{\bullet}$:

$$(4.6) \qquad U^{\bullet} \circ V^{\bullet} = I^{\bullet}$$ (Voir [E1] , chapitre 4).

Toutefois, à la différence du second membre de (4.4), celui de (4.5) ne converge pas toujours, même moyennant (3.25). Et lorsqu'il converge, on n'est pas pour autant assuré que les B_n ainsi définis satisfassent à (4.2bis). La synthèse (passage des A_n aux B_n) est donc une opération plus compliquée que l'analyse (passage des B_n aux A_n) . En fait, comme on pouvait s'y attendre, la discussion s'articule autour de la latéralité :

(i) Toute classe unitaire, caractérisée par un unique A_{n_o} non nul, possède un représentant canonique unitaire, avec $B_{n_o} = A_{n_o}$.

(ii) Toute classe binaire, caractérisée par deux invariants $\{A_{-1},A_1\}$ non nuls, possède une infinité dénombrable de représentants canoniques binaires, avec $\{B_{-1},B_1\}$ vérifiant :

$$(4.7) \qquad \frac{1}{2}\sqrt{A_{-1}A_1} = \sin \frac{1}{2}\sqrt{B_{-1}B_1}$$

$$(4.8) \qquad A_1/A_{-1} = B_1/B_{-1}$$

(iii) A toute classe unilatérale $\{A_1,A_2,\ldots\}$ la correspondance formelle (4.5) associe une suite unilatérale $\{B_1,B_2,\ldots\}$ unique puisque $A_{-1} = 0$ et que, de ce fait,

(*) sous réserve de (4.2bis) bien sûr.

le second membre de (4.5) ne comporte plus qu'un nombre fini de termes. Toutefois, la suite $\{B_n\}$ ainsi construite ne vérifie qu'exceptionnellement la condition de croissance (4.2bis). Elle ne définit donc qu'exceptionnellement un représentant canonique (4.2) analytique en y .

(iiii) Enfin, les classes sesquilatérales $\{A_{-1},A_1,A_2,\ldots\}$ possèdent en général une infinité dénombrable de représentants canoniques $\{B_{-1},B_1,B_2,\ldots\}$. Pour toute famille $\{A_n\}$ suffisamment "petite", les formules (4.5) fournissent un représentant canonique $\{B_n\}$ privilégié. Pour les autres $\{A_n\}$ il est possible de "prolonger analytiquement" la correspondance $A_n \to B_n$ donnée en (4.5) mais cette prolongation est multiforme et conduit à une infinité dénombrable de représentants canoniques dont aucun n'est vraiment privilégié.

On a ainsi une nette dichotomie entre les classes sesquilatérales, qui possèdent en général une infinité de représentants canoniques, et les classes unilatérales, qui n'en possèdent en général aucun. Il faut donc se pencher sur les classes unilatérales et examiner à quelles conditions elles possèdent un représentant canonique analytique. Soit $\{A_n\}$ une telle classe et soit p son niveau, c'est-à-dire l'indice du premier A_n non nul :

(4.9) $$A_1 = A_2 = \cdots A_{p-1} = 0 \quad , \quad A_p \neq 0 \qquad\qquad (p \geq 1)$$

Soit $\{B_n\}$ l'unique famille canonique que (4.5) associe à $\{A_n\}$. On vérifie immédiatement que :

(4.10) $$B_n = A_n \quad \text{pour} \quad n \leq 2p \ .$$

Si donc on pose :

(4.11) $$A(y) = \sum_{n\geq 1} A_n\, y^{n+1} \quad , \qquad B(y) = \sum_{n\geq 1} B_n\, y^{n+1}$$

les équations différentielles

(4.12) $$A(y) \frac{\partial}{\partial y} A^*(y) = 2\pi i \quad ; \qquad B(y) \frac{\partial}{\partial y} B^*(y) = 2\pi i$$

auront pour solutions "sans terme constant" des séries formelles bien déterminées :

(4.13) $$A^*(y) = \rho \log y + \sum_{n=-p}^{\infty} A^*_n\, y^n \quad , \quad B^*(y) = \rho \log y + \sum_{n=-p}^{\infty} B^*_n\, y^n$$

avec de chaque côté un même scalaire ρ et avec

(4.14) $$A^*_o = B^*_o = 0 \quad ; \quad A^*_{-p} = B^*_{-p} = -\frac{2\pi i}{p.A_p} = -\frac{2\pi i}{p.B_p}$$

Par suite $A^*(y)$ et $B^*(y)$ sont toutes deux équivalentes à s avec :

(4.15) $$s = -\frac{2\pi i}{p.A_p}\, y^{-p} = c_o\, y^{-p}$$

Les séries $A(y)$ et $B(y)$ et par suite les séries $A^*(y)$ et $B^*(y)$ sont généralement divergentes, mais nous allons voir qu'elles sont toujours résurgentes en la variable s .

Pour $A(y)$ et $A^*(y)$ c'est évident, puisque d'après (3.23) et (3.25) l'opérateur $A(y)\,\partial/\partial y$ est le générateur infinitésimal formel d'un difféo local de $\mathbb{C}$:

(4.16) $$y \mapsto A^+(y) = y + \Sigma\, A_n^+\, y^{n+1} \qquad (A_n^+ \text{ comme en } (3.23))$$

et que $A^*(y)$ est l'itérateur de ce même difféo :

(4.17) $$A^*\circ A(y) \equiv 2\pi i + A^*(y)$$

D'après la théorie générale des difféos (*) $A(y)$ et $A^*(y)$ sont des fonctions résurgentes en s , qui se présentent (à quelques termes irréguliers près) sous forme de séries entières en $s^{-1/p}$ et qui admettent pour réseau de résurgence l'ensemble $\mathbb{Z}_p$ formé de tous les points de $\mathbb{C}_p$ (surface de Riemann de $s^{1/p}$) situés au-dessus de $\mathbb{Z}^*$. Notant n le point courant de $\mathbb{Z}_p$ et $\dot{n}$ sa projection naturelle sur $\mathbb{Z}^*$, on trouve pour l'itérateur $A^*(y)$ les équations de résurgence suivants :

(4.18) $$\overset{s\,\bullet}{\Delta}_n A^* = C_n\, e^{-\dot{n}A^*} \qquad (\forall n \in \mathbb{Z}_p)$$

avec les dérivations étrangères pointées (1.16) et avec une suite de scalaires C_n bien déterminés. On en déduit pour $A(y)$ les équations de résurgence :

(4.19) $$\overset{s\,\bullet}{\Delta}_n A = \dot{n}\, C_n\, A\, e^{-\dot{n}A^*} \qquad (\forall n \in \mathbb{Z}_p)$$

Notons le statut remarquable des C_n . Ce sont des "invariants d'invariants" puisqu'on les obtient comme invariants d'un difféo $y \to A^+(y)$ lui-même fabriqué à partir des invariants A_n des équations (3.2). Les C_n vont nous permettre de discuter l'existence du représentant canonique.

<u>Proposition 8.</u> (<u>Critère d'analycité du représentant canonique unilatéral</u>)

Une classe unilatérale $\{A_n\}$ d'équations (3.2) possède un représentant canonique unilatéral (4.2) + (4.2bis) si et seulement si

(4.20) $$C_n = 0 \quad \text{pour} \quad \dot{n} = 1,2,3,\ldots$$

(*) cf. [E2] chap.9. On prendra garde toutefois aux différences de normalisation entre cet article et [E2].

On a donc ce résultat surprenant : une classe unilatérale d'invariants $\{A_n\}$ possède un représentant canonique (unilatéral et analytique) si et seulement si les "invariants d'invariants" C_n forment eux-mêmes une famille unilatérale, seuls les C_n d'indice négatif (*) pouvant différer de zéro.

Mais il y a plus. Même lorsque la condition (4.20) n'est pas remplie, la correspondance (4.5) continue d'associer à la classe $\{A_n\}$ un représentant canonique "formel" ou "externe" :

$$(4.21) \qquad \frac{d}{dz}\, y = y - \frac{1}{2\pi iz}\, B(y) \qquad\qquad (B(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, y^{n+1})$$

avec une série $B(y)$ qui n'est plus analytique en y mais <u>résurgente en s</u> ("résurgence de synthèse").

<u>Proposition 8</u> (<u>Résurgence de</u> $B(y)$)

La série $B(y)$ associée à une classe unilatérale $\{A_n\}$ est toujours résurgente en s. Les seules dérivations étrangères susceptibles d'agir (**) sur $B(y)$ sont les ${}^{s}\Delta_n$ avec n dans $\mathbb{Z}_p$ et $\dot{n}$ dans $\mathbb{N}^*$. Plus généralement, les seuls produits:

$$\Delta_{n_r} \cdots \Delta_{n_2} \Delta_{n_1}$$

susceptibles d'agir sur $B(y)$ correspondent à des indices :

$$(4.22) \qquad \begin{cases} n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}_p \\ \dot{n}_1, \dot{n}_1+\dot{n}_2, \ldots, \dot{n}_1+\dot{n}_2+\ldots\, \dot{n}_r \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Pour décrire complètement la résurgence de $B(y)$ ou, ce qui revient au même, celle de $B^*(y)$, il faut introduire deux nouvelles séries, $K(z,y)$ et $Q(z,y)$. La première n'est autre, à une facteur élémentaire près, que la série (3.4) qui conjugue l'équation canonique (4.21) à l'équation d'Euler (3.1) :

$$(4.23) \qquad K(z,y) = e^{-z} k(z,y) = e^{-z}\{y + \sum_{n=1} k_n(z) y^{n+1}\} \qquad (***)$$

K vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$(4.24) \qquad D.\, K(z,y) = 0$$

avec

(*) $\dot{n} = -1,-2,-3,\ldots$

(**) sous-entendu : "sans annuler".

(***) Ici, contrairement à (3.4) et à cause de l'unilatéralité, le Σ est étendu aux seuls $n \geq 1$.

(4.25) $$D = \frac{\partial}{\partial z} + [y - \frac{1}{2\pi i z} B(y)] \frac{\partial}{\partial y}$$

Au facteur e^{-z} près, K est une série entière en z^{-1}. La série Q, au contraire, s'obtient en résolvant l'équation :

(4.26) $$D.\ Q(z,y) = 0$$

en puissances positives de z. Plus précisément, Q est l'unique solution de (4.26) qui soit de la forme :

(4.27) $$Q(z,y) = \log z + B^*(y) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(y)\, z^n$$

Ses coefficients $Q_n(y)$ appartiennent à $y^{-p}\,\mathbb{C}[[y]]$ et se calculent par la récurrence :

(4.28) $$[n+1 - \frac{1}{2\pi i} B(y) \frac{\partial}{\partial y}]\ Q_{n+1}(y) = -y \frac{\partial}{\partial y} Q_n(y)$$

avec $n \geq 0$ et $Q_o(y) = B^*(y)$.

On a également besoin des projections P^o, P^+, P^- qui à toute série :

(4.29) $$\varphi(z,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n(y)\, z^n$$

associent les séries :

(4.30) $$P^o\ \varphi(z,y) = \varphi_o(y)$$

(4.31) $$P^+\ \varphi(z,y) = \sum_{n\geq 1} \varphi_n(y)\, z^n$$

(4.32) $$P^-\ \varphi(z,y) = \sum_{n\geq 1} \varphi_{-n}(y)\, z^{-n}$$

Proposition 9. (Résurgence de synthèse)

Les séries $A^*(y)$, $B^*(y)$, $K(z,y)$, $Q(z,y)$ associées à une classe unilatérale $\{A_n\}$ d'équations (3.2) sont généralement divergentes en y, mais toujours résurgentes en $s = c_o\, y^{-p}$ (avec $c_o = -2\pi i/pA_p$) et elles vérifient les équations de résurgence ci-dessous, valables pour tout $n \in \mathbb{Z}_p$:

(4.33) $$\overset{s}{\dot{\Delta}}_n\, A^* = C_n\, e^{-\dot{n}A^*}$$

(4.34) $$(\overset{s}{\dot{\Delta}}_n\, B^*)/(\frac{\partial}{\partial s} B^*) = C_n P^o\{e^{-\dot{n}Q}/\frac{\partial}{\partial s} Q\}$$

(4.35) $$(\overset{s}{\dot{\Delta}}_n K)/(\frac{\partial}{\partial s} K) = -C_n P^-\{e^{-\dot{n}Q}/\frac{\partial}{\partial s} Q\}$$

(4.36) $$(\overset{s}{\dot{\Delta}}_n Q)/(\frac{\partial}{\partial s} Q) = C_n (P^o+P^+)\{e^{-\dot{n}Q}/\frac{\partial}{\partial s} Q\}$$

Pour les démonstrations, voir [E5].

Remarque 1 : (Nature de la résurgence)

Même quand $p = 1$, la résurgence en s n'est pas du type "à singularités logarithmiques" mais du type "général" signalé à la fin du §1. Supposons pour fixer les idées $p = 1$ et ρ irrationnel. Alors A^* et B^* s'écrivent en fonction de s :

(4.37) $$A^* = s - \rho \log s + \sum_{m\geq 1} \alpha_m s^{-m}$$

(4.38) $$B^* = s - \rho \log s + \sum_{m\geq 1} \beta_m s^{-m}$$

et ont pour transformées de Borel en s :

(4.39) $$\hat{A}^* = \delta'(\sigma) - \rho \widehat{\log} \sigma + \sum_{m\geq 1} \alpha_m \sigma^{m-1}/(m-1)!$$

(4.40) $$\hat{B}^* = \delta'(\sigma) - \rho \widehat{\log} \sigma + \sum_{m\geq 1} \beta_m \sigma^{m-1}/(m-1)!$$

(Pour la définition de $\delta'(\sigma)$ et $\widehat{\log}\, \sigma$, voir [E1] chap 1). Interprétant les équations de résurgence (4.33) et (4.34) on trouve que $\hat{A}^*(\sigma)$ et $\hat{B}^*(\sigma)$ ont au-dessus des points entiers $\sigma = n$ les comportements suivants :

(4.41) $$\hat{A}^*(\sigma) = \mathrm{reg}(\sigma-n) + (\sigma-n)^{-n\rho-1}\, \mathrm{reg}(\sigma-n) \qquad (n \in \mathbb{Z}^*)$$

(4.42) $$\hat{B}^*(\sigma) = \mathrm{reg}(\sigma-n) + (\sigma-n)^{-n\rho-n-1}\, \mathrm{reg}(\sigma-n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

où les symboles $\mathrm{reg}(\sigma-n)$ désignent des fonctions régulières en $\sigma-n$. Même quand $\rho = 0$, $\hat{B}^*$ peut comporter des pôles de tous ordres.

Remarque 2 : (Interprétation de la proposition 9)

D'après (4.27) le rapport $e^{-nQ}/\frac{\partial}{\partial s} Q$ se présente sous la forme d'une série :

(4.43) $$\sum \varphi_m(y)\, z^m \qquad \text{avec } m \geq -\dot{n} \qquad (m,\dot{n} \in \mathbb{Z})$$

La projection P^+ peut tout au plus tronquer cette série (si $\dot{n} > 0$) mais jamais l'annuler. Au contraire, les projections P^o et P^- la tronquent toujours et l'annullent chaque fois que $\dot{n} < 0$. Pour de tels n , les seconds membres de (4.34) et (4.35) valent 0 . On voit par là que l'équation (4.34) contient la proposition 8.

D'autre part, si on se reporte à l'équation (4.26) qui détermine Q , on voit que l'application aux séries B^*,K,Q d'une dérivation étrangère ${}^s\Delta_n$ équivaut grosso modo à une "intégro-différentiation" d'ordre $\dot{n}$ en y (*). Or y est directement

(*) elle équivaut à $\dot{n}$ "intégrations" successives si $\dot{n} > 0$ et à $|\dot{n}|$ "différentiations" successives si $\dot{n} < 0$.

lié par (4.15) à la variable s par rapport à laquelle il y a résurgence. On est donc en présence d'un type de résurgence ("résurgence de synthèse") fort différent de la résurgence équationnelle.

Remarque 3 : (Résurgence de $B(y)$)

Partant de (4.12) et (4.34) et appliquant (1.14bis) on trouve :

$$(4.44) \qquad {}^{s}\dot{\Delta}_{n} B = \dot{n}\, C_n\, B\, P^{o}(e^{-\dot{n}Q}\, \tilde{Q}_n)$$

avec $\tilde{Q}_n = 1 + Q''/\dot{n}Q'Q' - 2\pi i/\dot{n}BQ'$ $(Q' = \frac{\partial}{\partial y} Q,\ Q'' = \frac{\partial^2}{\partial y^2} Q)$. On comparera (et opposera) l'équation (4.44) à l'équation (4.19).

Remarque 4 : (Fermeture du système (4.33-36))

Puisque $\Delta_n k/\frac{\partial}{\partial s} k = \Delta_n K/\frac{\partial}{\partial s} K$, l'équation (4.33) fournit les dérivées étrangères en s de la série k qui conjugue (3.1) à (4.2) dans le cas unilatéral. On en déduirait facilement les dérivées étrangères en s de la série h qui conjugue (4.2) à (3.1). On note aussi que les quatre équations de la proposition 9 forment un système fermé en ce sens qu'elles permettent de calculer toutes les dérivées étrangères successives en s , d'ordre aussi élevé que l'on veut. Elles décrivent donc complètement la résurgence en s . A elles seules, les équations (4.33) et (4.34) n'y suffiraient pas.

Remarque 5 (Lien caché entre K,Q et A^*)

Pour $\dot{n} < 0$, l'équation (4.36) se simplifie :

$$(4.45) \qquad {}^{s}\dot{\Delta}_{n} Q = C_n\, e^{-\dot{n}Q} \quad .$$

C'est exactement la même forme que celle de l'équation (4.33) vérifiée (mais pour tout n) par A^* . Ceci incite à chercher une "factorisation" de Q sous forme d'un produit de composition dont A^* serait le premier facteur et dont le second facteur serait annulé par les ${}^{s}\Delta_{n}$ pour $\dot{n} < 0$. De fait, on s'aperçoit que si on postule la factorisation formelle :

$$(4.46) \qquad Q(z,y) = A^*(K(z,y))$$

et si on lui applique les dérivations étrangères ${}^{s}\dot{\Delta}_{n}$ en tenant compte de la règle (1.15bis), on trouve un résultat compatible avec les équations (4.33), (4.35), (4.36). Malheureusement, la factorisation (4.46) n'a a priori aucun sens, puisque K est une série entière divergente en z^{-1} tandis que $Q(z,y)$ est une série entière convergente en z . Une étape essentielle de la démonstration consiste, justement, à donner un sens à la factorisation (4.46), par prolongation analytique en z de 0 à ∞ le long d'un chemin convenable. On montre ensuite que les quatre équations

(4.33-36) sont les seules qui soient compatibles :

(i) entre elles

(ii) avec la factorisation (4.45)

(iii) avec les équations $DQ = DK = 0$ (où l'opérateur D contient B!).

Ceci fait, il ne reste plus, pour prouver la proposition 9, qu'à établir par un argument direct la prolongeabilité sans coupure des transformées de Borel en s . Il existe d'autres démonstrations plus élémentaires, mais nécessitant de longs calculs. Voir [E5].

Remarque 6. (Interprétation de la synthèse unilatérale pour les équations différentielles)

Lorsqu'à une classe unilatérale $\{A_n\}$ correspond une famille $\{C_n\}$ qui n'est pas unilatérale, i.e. lorsque la condition (4.20) n'est pas remplie, les formules (4.5) ne fournissent plus qu'un représentant canonique "formel" ou "externe", puisque la série $B(y)$ fabriquée avec les B_n n'est plus convergente en y , mais seulement résurgente en s . Ce représentant "externe" est défini sans ambiguité par les formules (4.5) qui donnent les B_n en fonctions des A_n , mais il est aussi susceptible d'une interprétation directe. Il se trouve en effet que pour toute équation analytique

$$(4.47) \qquad \frac{d}{dz} y_o = y_o + \Sigma\, b_{m,n}\, z^{-m}\, y_o^n \qquad (\Sigma\, b_{m,n}\, z^{-m}\, y_o^n \in \mathbb{C}\{z^{-1}, y_o\})$$

de classe unilatérale $\{A_n\}$, les B_n fournis par les formules (4.5) sont les seuls pour lesquels la transformation formelle $y = \ell(z, y_o)$ qui conjugue (4.47) au représentant canonique "externe" (4.21) soit analytique en z . Cette transformation n'est évidemment pas analytique en y , mais seulement résurgente en s .

Remarque 7. (Interprétation de la synthèse unilatérale pour les difféos)

Bien que les classes unilatérales $\{A_n\}$ d'équations (3.2) ne possèdent en général que des représentants canoniques "externes", les classes unilatérales $\{A_n\}$ de difféos (3.17) possèdent, elles, de véritables représentants canoniques "internes", i.e. analytiques. Partant des A_n on peut en effet :

(i) calculer les B_n par (4.5)

(ii) fabriquer avec eux la série $Y = k(z,y)$ qui conjugue (3.1) à (4.21)

(iii) introduire $K(z,y)$ comme en (4.23)

(iiii) et enfin définir la série $f(z) = f_y(z)$ comme en (3.12) et (3.13).

Cette série est analytique en z^{-1} et résurgente en $s = c_o y^{-p}$. Posons :

$$(4.48) \qquad f(z) = z + \Sigma\, f_n(s)\, z^{-n} \qquad \text{avec} \quad f_n(s) \in \mathbb{C}[[s^{-1/p}]]$$

(4.49) $$\hat{f}(z) = z + \Sigma\, \hat{f}_n(\sigma)\, z^{-n} \qquad \text{avec} \quad \hat{f}_n(\sigma) \in \mathbb{C}\{\sigma^{1/p}\} \ .$$

Les $\hat{f}_n(\sigma)$, transformées de Borel des $f_n(s)$, sont (uniformément en n) de croissance exponentielle en σ . De plus, à cause de (4.35), elles ont toutes leurs singularités au-dessus de $\mathbb{N}$. Il y a donc exactement p manières différentes de resommer par Laplace

(4.50) $$f(z) = \int_0^\infty e^{-\sigma s}\, \hat{f}(z)\, d\sigma \qquad (f = f_y = f_{(s)} \ , \ \hat{f} = \hat{f}_{(\sigma)})$$

et chacune de ces manières livre, pour y fixé et assez petit, un difféo $z \mapsto f(z)$ de la forme (3.17) qui est bien un représentant canonique "interne" (i.e. analytique en z^{-1}) de la classe unilatérale $\{A_n\}$. On voit par là que la synthèse unilatérale est plus simple (elle peut être poussée plus loin) pour les difféos que pour les équations différentielles. La synthèse sesquilatérale, en revanche, présente exactement le même ordre de difficulté. La synthèse bilatérale, enfin, ne se pose pas pour les équations différentielles (3.2) mais seulement pour les difféos (3.17) ou pour les équations différentielles résonnantes du type :

(4.51) $$\lambda_1 y\, dx + \lambda_2\, x\, dy + \ldots = 0 \qquad (\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{Q}^+)$$

Voir à ce sujet [MR2] ou [E3] et [E6] .

Remarque 8. (coinvariants)

Les représentants canoniques n'étant pas uniques (sauf dans les classes unilatérales), les coefficients B_n ne sont pas invariants : ils ne sauraient en aucun cas remplacer les A_n pour le paramétrage des classes analytiques. Toutefois les B_n sont "localement invariants", c'est-à-dire invariants relativement aux changements de variables suffisamment proches de l'identité. Cela tient à ce que la famille des représentants canoniques d'une classe analytique donnée est non seulement dénombrable (i.e. au plus dénombrable) mais aussi discrète (i.e. sans points d'accumulation). Voir [E3] et [E5]. En raison de leur invariance "locale" et des relations duales (4.4)-(4.5) qui les rattachent aux A_n , les B_n ont été nommés coinvariants. Voir [E2], chap. 13.

§5. L'EQUATION D'EULER ET LA RESURGENCE QUANTIQUE.

Introduisons maintenant un paramècre x (*) dans l'équation d'Euler :

(5.1) $$\frac{d}{dz} Y = x\, Y \qquad (Y = Y(z))$$

et envisageons toutes les équations analytiques locales qui sont formellement conju-

(*) x est dit paramètre planckien. Cette notion est précisée au §9.

guées à (5.1) :

(5.2) $$\frac{d}{dz} y = xy + \sum_{m,n\geq 0} b_{m,n} z^{-m} y^n \qquad (y = y(z))$$

avec $\Sigma\, b_{m,n} z^{-m} y^n \in \mathbb{C}\{z^{-1},y\}$ et avec

(5.2bis) $$b_{o,o} = b_{o,1} = 0 \ , \quad x\, b_{1,1} = 2\, b_{1,o}\, b_{o,2}$$

Comme dans le cas $x = 1$. Les équations (5.1) et (5.2) sont conjuguées l'une à l'autre par des transformations formelles :

(5.3) $$Y \to y = h(z,x,Y) \in \mathbb{C}[[z^{-1},x^{-1}]] \times \mathbb{C}\{Y\}$$

(5.4) $$y \to Y = k(z,x,y) \in \mathbb{C}[[z^{-1},x^{-1}]] \times \mathbb{C}\{y\}$$

qui sont encore résurgentes en z. Mais cette fois-ci les dérivations étrangères ${}^{z}\Delta_{\omega}$ susceptibles d'agir sur h et k correspondent évidemment à des indices de la forme

(5.5) $$\omega \in \{-x,x,2x,3x,\ldots\}$$

et non plus de la forme (3.5). On a encore des équations de résurgence analogues aux équations (3.6) et (3.7) :

(5.6) $$ {}^{z}\Delta_{nx}\, h(z,x,Y) = A_n(x) \ \ Y^{n+1} \frac{\partial}{\partial Y} h(z,x,Y) \qquad (n+1 \in \mathbb{N})$$

(5.7) $$ {}^{z}\Delta_{nx}\, k(z,x,y) = -A_n(x)\ \ (k(z,x,y))^{n+1} \qquad (n+1 \in \mathbb{N})$$

mais avec des scalaires $A_n(x)$ qui sont <u>fonctions entières</u> de x.

Que les A_n soient fonctions entières de x alors que h et k sont des séries formelles en x^{-1}, mérite une explication. Cela tient d'une part à la forme des séries h et k, qui ne contiennent que des termes $z^{-m}\, x^{-n}$ avec $m \geq n$ et d'autre part à la nature de leur réseau de résurgence (5.5), qui comporte le facteur d'homothétie x. Voir [E4]. De toute façon il est clair qu'à x fixé, les équations de résurgence (5.6) et (5.7) doivent comporter en leur second membre des facteurs $A_n(x)$ qui sont des <u>nombres</u> bien déterminés et non des séries formelles.

Abordons maintenant l'objet de ce paragraphe, qui est l'étude en x. Observons tout d'abord que si on prend une équation (5.2) de forme "canonique" :

(5.8) $$\frac{d}{dz} y = xy - \frac{1}{2\pi i z} \sum_{n\geq -1} B_n\, y^{n+1} \qquad (y = y(z))$$

les séries h et k qui conjuguent (5.8) à (5.1) satisfont aux relations d'homogénéité :

(5.9) $$h(z,x,Y) = h(zx,1,Y)$$

(5.10) $$k(z,x,y) = k(zx,1,y)$$

Or h et k sont résurgentes en z avec pour réseau :

$$\{-x,x,2x,3x,\dots\} .$$

Elles sont donc automatiquement résurgentes en x avec pour réseau :

$$\{-z,z,2z,3z,\dots\}$$

Cette dualité s'étend-elle à d'autres équations (5.2) et lesquelles ? Pour pouvoir répondre, écrivons (5.2) sous la forme :

(5.11) $$\frac{d}{dz}\, y = xy + \sum_{n\geq -1} b_n(z)\, y^{n+1} \qquad (b_n(z) \in \mathbb{C}\{z^{-1}\})$$

Proposition 10 (Résurgence en x duale de la résurgence en z)

Supposons que les fonctions $b_n(z)$, qui par hypothèse sont holomorphes à l'infini, se prolongent partout sans coupure, c'est-à-dire sans autres singularités qu'isolées (*) et supposons que l'ensemble S , réunion de toutes les singularités α de toutes les fonctions $b_n(z)$, soit discret. Alors les séries h et k qui conjuguent (5.11) à (5.1) sont résurgentes en x et vérifient des équations de résurgence

(5.12) $${}^{x}\Delta_{n(z+\alpha)}\, h(z,x,Y) = A_{n||\alpha}(x)\, Y^{n+1} \frac{\partial}{\partial Y} h(z,x,Y) \qquad n = -1,1,2,3\dots$$

(5.13) $${}^{x}\Delta_{n(z+\alpha)}\, k(z,x,y) = -A_{n||\alpha}(x)\, (k(z,x,y))^{n+1} \qquad \alpha \in S$$

qui sont duales des équations (5.6) et (5.7), mais avec des coefficients $A_{n||\alpha}(x)$ qui sont des fonctions résurgentes en x , et non plus des fonctions entières en x, comme l'étaient les coefficients $A_n(x)$ figurant dans (5.6) et (5.7).

Proposition 11. (Résurgence en x de réseau fixe)

Les seules dérivations étrangères ${}^{x}\Delta_{\omega}$ susceptibles d'agir sur le coefficient $A_{n||\alpha}(x)$ correspondent à des indices ω de la forme :

(5.14) $$\omega = m(\beta-\alpha) \qquad \text{avec } \alpha,\beta \in S \text{ , } \beta \neq \alpha \quad \text{et} \quad m = -1,1,2,3\dots$$

Lorsque l'équation (5.11) est binaire (**) ou unilatérale (***) on peut se limiter respectivement à $m = \pm 1$ et à $m \geq 1$.

(*) mais avec d'éventuelles ramifications.

(**) lorsque seuls $b_{-1}(z)$ et $b_1(z)$ sont $\neq 0$.

(***) i.e. lorsque $b_{-1}(z) = 0$

La résurgence en x est dite résurgence quantique, car elle joue un rôle de premier plan dans les méthodes "semi-classiques" de la mécanique quantique. Voir ci-après. Bien entendu, pour calculer les dérivées étrangères des $A_{n||\alpha}(x)$ il faut connaître le comportement des $b_n(z)$ en leurs singularités. Les formules explicites sont assez compliquées et nécessitent l'emploi d'intégrales multiples d'un type nouveau, dites convolutions pondérées. Voir [E4]. Plutôt que d'entrer dans les détails, nous allons donner ici deux exemples importants de résurgence quantique.

Premier exemple : coefficients $b_n(z)$ à pôles simples.

Supposons que l'ensemble S formé avec les singularités des $b_n(z)$ soit fini et que ces singularités soient des pôles simples. On a alors :

$$(5.15) \qquad b_n(z) = \sum_{\alpha\in S} \frac{c_{n,\alpha}}{z-\alpha}$$

avec bien sûr

$$(5.16) \qquad \sum_{n\geq -1} c_{n,\alpha}\, y^{n+1} \in \mathbb{C}\{y\} \qquad (\forall\alpha)$$

Supposons aussi, pour simplifier, que les différences $\alpha-\beta$ $(\alpha,\beta \in S)$ soient deux à deux incommensurables. On montre alors [E4] que, pour tous $\alpha,\beta,\gamma \in S$ et tous $m,n \in \{-1,1,2,3,\ldots\}$ ont lieu les équations de résurgence :

$$(5.17) \qquad {}^{x}\Delta_{m(\beta-\gamma)}\, A_{n||\alpha}(x) = 0 \qquad (\gamma \neq \beta \text{ et } \gamma \neq \alpha)$$

$$(5.18) \qquad {}^{x}\Delta_{m(\beta-\alpha)}\, A_{n||\alpha}(x) = (n-2m)\, A_{m||\alpha}(x)\, A_{n-m||\alpha}(x) \qquad (\beta \neq \alpha)$$

qui, jointes à (5.12) et (5.13), décrivent complètement la résurgence en x .

Notons que l'équation (5.18) reste valable pour $m = n$. Dans ce cas, elle comporte en son second membre un coefficient $A_{o||\alpha}(x)$ qui ne figure jamais au second membre des équations (5.12) et (5.13) car celles-ci n'ont de sens que pour $n \neq 0$.

Notons aussi qu'après adjonction des $A_{o||\alpha}(x)$, l'algèbre engendrée par les fonctions :

$$(5.19) \qquad A_{n||\alpha}(x) \qquad (\alpha \in S\ ,\ n = -1,0,1,2,3,\ldots)$$

est stable pour la dérivation étrangère : c'est une algèbre de résurgence.

Notons enfin que dans le cas "binaire" (*) cette algèbre possède un nombre fini de générateurs, à savoir les $A_{n||\alpha}(x)$ pour $\alpha \in S$ et $n = -1,0,1$.

Sur la "double nature" des coefficients $A_n(x)$ et $A_{n||\alpha}(x)$ et sur les rela-

(*) c'est-à-dire quand l'équation (5.11) se réduit à une équation de Riccati.

tions qui les lient, voir les indications du §9 et surtout [E4].

Deuxième exemple : équation de Schrödinger à une dimension.

Examinons maintenant les équations linéaires homogènes du second degré à coefficients polynomiaux :

(5.20) $$\frac{\partial^2}{\partial q^2}\psi = \frac{x^2}{4} W(q)\,\psi \qquad (W(q) = q^\nu + \alpha_1 q^{\nu-1} + \cdots \alpha_\nu)$$

Si on pose :

(5.21) $$\begin{cases} V(q) = q^\nu + \alpha_1 q^{\nu-1} + \cdots \alpha_{\nu-1} q = \text{potentiel} \\ E = -\alpha_\nu = \text{énergie} \\ \hbar = 2/x = \text{constante de Planck} \end{cases}$$

on reconnaît en (5.20) l'équation de Schrödinger (indépendante du temps) d'un oscillateur harmonique à une dimension. Cette équation a fait l'objet de recherches poussées, notamment de la part de Y. SIBUYA et A. VOROS, le premier étudiant surtout la dépendance en q (approche directe) et le second la dépendance en x (approche dite semi-classique). Ces deux approches sont parfaitement complémentaires et, à les présenter dans le langage de la résurgence, on s'aperçoit même qu'elles sont duales.

Montrons d'abord comment l'équation (5.20) se rattache à l'équation d'Euler. Effectuons le changement de variable :

(5.22) $$z = z(q) = \int_0^q \sqrt{W(q')}\, dq'$$

Supposons pour simplifier que le polynôme W n'ait pas de racine multiple et que l'on ait, pour ν pair :

(5.23) $$\oint \sqrt{W(q')}\, dq' = 0 \qquad \text{(intégrale autour de } \infty\text{)}$$

L'ancienne variable q apparaît comme fonction hyperelliptique de z et on a , au voisinage de ∞ et pour une bonne détermination :

(5.22bis) $$q = q(z) \sim \left(\frac{\nu+2}{2}\right)^{2/2+\nu} z^{2/2+\nu}$$

Rapportée à la variable z , la solution générale de (5.20) peut s'écrire pour z :

(5.24) $$\begin{aligned} \psi(z,x) \;=\; & C_+(x)\; e^{xz/2}\,(q'(z))^{1/2}\; \varphi_+(z,x) \;+ \\ & +\; C_-(x)\; e^{-xz/2}\,(q'(z))^{1/2}\; \varphi_-(z,x) \end{aligned}$$

avec des $\varphi_\pm(z,x)$ éléments de $\mathbb{C}[[z^{-\frac{2}{\nu+2}}, x^{-1}]]$, de la forme $1+\mathcal{O}(1)$ et solutions de l'équation :

$$(5.25) \qquad \frac{d^2}{dz^2}\varphi_{\pm} \pm x \frac{d}{dz}\varphi_{\pm} = (H^2_{(z)} - H'_{(z)})\varphi_{\pm}$$

où $H(z) \in \mathbb{C}\{z^{-2/2+\nu}\}$ avec :

$$(5.26) \qquad H(z) = \frac{1}{2} q''(z)/q'(z) = -\frac{1}{2}\frac{\nu}{\nu+2} z^{-1} + \ldots$$

Posant :

$$(5.27) \qquad H + \frac{d}{dz}\log \varphi_{\pm} = \pm x\, y_{\pm} / (1-y_{\pm})$$

on s'aperçoit que les nouvelles inconnues y_+ et y_- sont solutions d'équations de Riccati :

$$(5.28) \qquad \frac{d}{dz} y_+ + x\, y_+ = H - H y_+^2 \qquad\qquad y = y(z,x)$$

$$(5.29) \qquad \frac{d}{dz} y_- - x\, y_- = H - H y_-^2 \qquad\qquad H = H(z)$$

qui rentrent dans la catégorie des équations (5.11) à ceci près qu'à l'infini $H(z)$ n'est pas holomorphe en z^{-1} mais en $z^{-2/2+\nu}$. Ce détail n'empêche pas $y_{\pm}$ et $\varphi_{\pm}$ d'être résurgentes simultanément en z et en x. Simplement, les dérivations étrangères en z ne devront plus être indexées sur $\mathbb{C}^*$ mais sur $\mathbb{C}_{2+\nu/2}$ (surface de Riemann de $z^{2/2+\nu}$).

Explicitons les équations de résurgence, en nous limitant aux $\varphi_{\pm}$ et en supposant ν pair pour fixer les idées. On trouve pour la résurgence équationnelle :

$$(5.30) \qquad \left\{\begin{array}{l} {}^{z}\Delta_{x_i}\, \varphi_+ = S_i(x)\, \varphi_- \\ {}^{z}\Delta_{-x_i}\, \varphi_- = S_i(x)\, \varphi_+ \end{array}\right. \quad \left\| \begin{array}{l} (i = 2,4,\ldots,\nu+2) \\ (i = 1,3,\ldots,\nu+1) \end{array}\right. \quad S_i(x) \in \mathbb{C}\{x^{2/2+\nu}\}$$

où $x_2,\ldots,x_{\frac{\nu}{2}+2}$ (resp. $-x_1,\ldots,-x_{\frac{\nu}{2}+1}$) désignent les points de $\mathbb{C}_{2+\nu/2}$ situés au-dessus de x (resp. $-x$). Pour la résurgence quantique on trouve les équations duales:

$$(5.31) \qquad \left\{\begin{array}{l} {}^{x}\Delta_{z+\omega_j}\, \varphi_+ = P_+(x)\, \varphi_- \\ {}^{x}\Delta_{-z-\omega_j}\, \varphi_- = P_i(x)\, \varphi_+ \end{array}\right. \quad \Big\| \quad P_{j\pm}(x) \in \mathbb{C}[[x^{-1}]],\ \omega_j \text{ comme en (5.34)}$$

La <u>résurgence équationnelle</u> fait intervenir les coefficients $S_i(x)$, dit <u>coefficients de SIBUYA</u>. Ce sont des <u>fonctions entières</u> en $x^{2/2+\nu}$. Ces $\nu+2$ coefficients vérifient trois relations a priori (relations polynomiales, à coefficients entiers) si bien qu'il n'y en a que $\nu-1$ d'indépendants.

La <u>résurgence quantique</u> fait intervenir des coefficients $P_{j\pm}(x)$ dont la forme exacte dépend de la région de la surface de Riemann (en z) où l'on se trouve, mais qui s'expriment toujours rationnellement à partir de ν coefficients $V_1(x),\dots,V_\nu(x)$, dits coefficients de VOROS. Ces derniers vérifient une seule relations a priori :

$$V_1(x)\, V_2(x) \dots V_\nu(x) = 1 \tag{5.32}$$

si bien qu'ici encore on a $\nu-1$ degrés de liberté.

Mais contrairement aux $S_i(x)$, qui sont des fonctions entières de $x^{2/2+\nu}$, les $V_j(x)$ se présentent comme séries formelles en x^{-1} . De plus, ils sont résurgents en x [E4] et vérifient les équations de résurgence suivantes, dues essentiellement à VOROS :

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta_{n\omega_{ij}} V_k = 0 && (k \neq i,j)\\ &\Delta_{n\omega_{ij}} V_i = +\frac{1}{n}\left[-\frac{V_{i+1}V_{i+2}\dots V_{j-1}}{V_{j+1}V_{j+2}\dots V_{i-1}}\right]^n && (i \neq j)\\ &\Delta_{n\omega_{ij}} V_j = -\frac{1}{n}\left[-\frac{V_{i+1}V_{i+2}\dots V_{j-1}}{V_{j+1}V_{j+2}\dots V_{i-1}}\right]^n && (i \neq j)\end{aligned}\right. \tag{5.33}$$

Ici n parcourt $\mathbb{Z}^*$ et i,j,k parcourent l'ensemble $\{1,2,\dots,\nu\}$ qu'on assimile au groupe $\mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z}$. Quant aux ω_{ij} , ce sont les périodes élémentaires de la fonction hyperelliptique $q(z)$. Plus précisément, si l'on suppose le polynome $W(q)$ proche du polynôme $q^\nu-1$, ses racines q_i seront proches des racines de l'unité d'ordre ν . A ce titre elles possèderont une indexation naturelle q_i avec $i \in \mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z}$ et l'on aura

$$\omega_{ij} = \omega_j - \omega_i \qquad \text{avec} \quad \omega_i = \int_{\gamma_i} \sqrt{W(q')}\, dq' \tag{5.34}$$

où γ_i désigne le lacet qui part de 0 , contourne q_i dans le sens positif et aboutit au point $0'$ apparié au point 0 sur la surface de Riemann de $\sqrt{W(q)}$.

A lui seul le système (5.33) ne détermine aucunement les $V_i(x)$ mais on peut montrer [E4] que les fonctions résurgentes $V_i(x)$ sont de type "canonique" (ou "minimal") ce qui conduit à un développement explicite des $V_i(x)$ en fonction du moule hyperlogarithmique $\mathcal{U}^\bullet(x)$. On peut aussi expliciter les relations entre les coefficients $S_i(x)$ de SIBUYA (fonctions entières de $x^{2/2+\nu}$) et les coefficients $V_j(x)$ de VOROS (séries formelles en x^{-1} , résurgentes en x). C'est le point de départ d'une théorie aux ramifications multiples et aux retombées inattendues, notamment en théorie des fonctions hyperelliptiques. Voir [E4].

§6. INTERACTION DES TROIS RESURGENCES. ALGEBRES ETRANGERES AGISSANTES.

Interaction des trois résurgences.

La série $Y = k(z,y)$ qui conjugue l'équation d'Euler (3.1) au représentant canonique "externe" (4.21) d'une classe unilatérale d'équations (3.2) est résurgente en z et aussi en $s = c_o\, y^{-p}$ avec $c_o = -2\pi i/p\, A_p$. Appliquant (3.7), (4.23) et (4.35) on s'assure que :

(6.1) $$[{}^z\Delta_m, {}^s\Delta_n]\ k(z,y) = 0 \qquad (\forall m,n)$$

Ainsi, bien que les différentes dérivations étrangères en z (resp. en x) ne commutent généralement pas entre elles :

(6.2) $$[{}^z\Delta_m\,, {}^z\Delta_n]\ k(z,y) \neq 0\ , \quad [{}^s\Delta_m, {}^s\Delta_n]\ k(z,y) \neq 0$$

chaque dérivation étrangère en z commute avec chaque dérivation étrangère en s .

En revanche, les séries $h(z,x,y)$ du §5 sont résurgentes en z et x , mais on a en général

(6.3) $$[{}^z\Delta_{mx}, {}^x\Delta_{n(z+\alpha)}]\ h(z,x,y) \neq 0$$

C'est le cas en particulier pour chacun des deux exemples traités en fin du §5. Les dérivations étrangères en z ne commutent donc généralement pas avec les dérivations étrangères en x .

Il existe enfin des cas (dont nous n'avons pas parlé) où coexistent résurgence de synthèse (en s) et résurgence quantique (en x) et l'on vérifie sur ces cas que les dérivations étrangères en x ne commutent pas avec les dérivations étrangères en s . En résumé :

Proposition 12. (Commutation a priori)

Seules commutent a priori les dérivations étrangères en z (résurgence équationnelle) avec les dérivations étrangères en s (résurgence de synthèse).

Idéal annulateur et algèbre agissante.

A toute fonction φ (resp. à toute algèbre A de telles fonctions) on associe son idéal annulateur étranger $\mathfrak{J}$. C'est par définition le plus grand idéal de dérivations étrangères qui annulle φ (resp. A) :

(6.4) $$\mathfrak{J}\cdot f = 0 \qquad (\text{resp. } \mathfrak{J}\cdot A = 0)$$

Quant au quotient $\mathbb{A}/\mathfrak{J}$ de $\mathbb{A}$ (algèbre de Lie libre engendrée par toutes les dérivations étrangères) par l'idéal $\mathfrak{J}$, il est dit algèbre étrangère agissante.

Plus encore que les équations de résurgence ou les constantes qu'elles comportent, l'idéal $\mathfrak{J}$ et l'algèbre $\mathbb{\Delta}/\mathfrak{J}$ sont les objets les plus "intrinsèques", les plus "invariants" qu'on puisse attacher à f ou A. Les connaître, c'est connaître l'essentiel.

Dans les calculs pratiques on se limite évidemment aux seules dérivations étrangères Δ_ω à indices ω pris dans le "réseau de résurgence" Ω de f ou A, puisque ce sont les seules dérivations susceptibles d'agir sur f ou A sans les annuler. On utilise alors les identités :

(6.5) $$\mathbb{\Delta}/\mathfrak{J} = \mathbb{\Delta}(\Omega)/\mathfrak{J}(\Omega) \quad , \quad \mathfrak{J}(\Omega) = \mathfrak{J} \cap \mathbb{\Delta}(\Omega)$$

où $\mathbb{\Delta}(\Omega)$ désigne l'algèbre de Lie libre engendrée par les Δ_ω $(\omega \in \Omega)$ et où $\mathfrak{J}(\Omega)$ désigne le plus grand idéal de $\mathbb{\Delta}(\Omega)$ qui annulle f ou A.

Algèbres de Cartan et algèbres à la Cartan.

On constate dans presque toutes les applications importantes que l'idéal annulateur $\mathfrak{J}(\Omega)$ est le noyau d'un homomorphisme d'algèbres de Lie :

(6.6) $$\Delta_\omega \mapsto \partial_\omega \qquad \text{(à prolonger par linéarité)}$$

associant à chaque dérivation étrangère Δ_ω une dérivation ∂_ω qui est un opérateur différentiel ordinaire en un nombre fini de variables $u_1,\dots,u_\nu$.

L'algèbre étrangère agissante $\mathbb{\Delta}(\Omega)/\mathfrak{J}(\Omega)$ se trouve alors être isomorphe à une algèbre d'opérateurs différentiels ordinaires. Lorsque celle-ci est engendrée par des opérateurs différentiels du type :

(6.7) $$u_1^{n_1} \dots u_\nu^{n_\nu} \frac{\partial}{\partial u_i} \qquad (1 \le i \le \nu \ , \ n_j \in \mathbb{N})$$

on dit que c'est une <u>algèbre de Cartan</u>. Lorsqu'elle est engendrée par des opérateurs différentiels du type :

(6.8) $$u_1^{n_1} \dots u_\nu^{n_\nu} \frac{\partial}{\partial u_i} \qquad (1 \le i \le \nu \ , \ n_j \in \mathbb{Z})$$

on dit que c'est une <u>algèbre à la Cartan</u>.

Résurgence en z. Algèbre agissante "de Cartan".

Les séries $h(z,Y)$ et $k(z,y)$ du §3, comme fonctions résurgentes en z, possèdent un même idéal annulateur $\mathfrak{J}(\mathbb{Z})$. Celui-ci est égal au noyau de l'homomorphisme :

(6.9) $$^z\Delta_n \mapsto \partial_n = A_n u^{n+1} \frac{\partial}{\partial u} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

avec A_n comme en (3.6) ou (3.7) pour $n \in \{-1,1,2,3,\ldots\}$ et $A_n = 0$ sinon.

Les algèbres étrangères agissantes (en z) associées aux équations différentielles (3.2) sont donc des algèbres de Cartan . Quand la famille $\{A_n\}$ est unitaire ou binaire, cette algèbre agissante est de dimension finie (resp. 1 et 3) et ce sont les seuls cas de finitude. Quand la famille $\{A_n\}$ est sesquilatérale stricte (resp. unilatérale), l'algèbre agissante contient (resp. ne contient pas) $\frac{\partial}{\partial u}$ et $u\frac{\partial}{\partial u}$ qui sont les seuls opérateurs en u homogènes de degré ≤ 0 . Enfin, si la famille $\{A_n\}$ était bilatérale stricte, ce qui se produirait pour des difféos (3.17) généraux, l'algèbre agissante contiendrait des $u^n \frac{\partial}{\partial u}$ avec des n positifs et négatifs; ce serait donc une algèbre à la Cartan.

Ces remarques expliquent l'importance de la notion de latéralité introduite à la fin du §3.

Résurgence en s . Algèbre agissante "à la Cartan".

Les séries $A(y)$, $A^*(y)$, $B(y)$, $B^*(y)$, $K(z,y)$, $Q(z,y)$ du §3, comme fonctions résurgentes en $s = c_o\, y^{-p}$, possèdent toutes un même idéal annulateur $\mathfrak{J}(\mathbb{Z}_p)$ qui est égal au noyau de l'homomorphisme :

$$(6.10) \qquad {}^s\Delta_n \mapsto \partial_n = C_n\, u^{1+\dot{n}} \frac{\partial}{\partial u} \qquad (n \in \mathbb{Z}_p,\ \dot{n} \in \mathbb{Z}^*)$$

avec C_n comme en (4.33). L'algèbre agissante (en s) est donc une algèbre à la Cartan.

Que l'idéal annulateur de $A(y)$ et $A^*(y)$ soit de la forme (6.10) est immédiat à vérifier à partir des équations de résurgence (4.18) et (4.19). Pour les autres fonctions, en revanche, c'est une propriété plus cachée, que l'on vérifie certes à partir des équations (4.34), (4.35), (4.36) mais sans se l'expliquer d'une manière parfaitement satisfaisante, même en invoquant la factorisation (4.46). Tout repose en effet sur l'identité :

$$(6.11) \qquad (m-n)\, C_{m+n}\, [{}^s\Delta_m, {}^s\Delta_n]\, Q = C_m C_n\, {}^s\Delta_{m+n}\, Q \qquad (*)$$

qui découle des relations :

$$(6.12) \quad \begin{cases} (1/C_m C_n)\ {}^{s}\dot{\Delta}_m\, {}^{s}\dot{\Delta}_n\, Q = \\ +\ Q''(P^+(e^{-mQ}/Q'))\ (P^+(e^{-nQ}/Q')) \\ +\ Q'\ P^+((e^{-mQ}Q''/Q'Q')\ P^-(e^{-nQ}/Q')) \\ -\ Q'\ P^+((e^{-nQ}Q''/Q'Q')\ P^+(e^{-mQ}/Q')) \end{cases}$$

(*) pour alléger les notations, on suppose que le niveau p (voir (4.9)) est égal à 1 si bien que m,n parcourent $\mathbb{Z}_1 = \mathbb{Z}^*$.

$$\left\{ \begin{array}{l} + \, m \, Q' \, P^{+}(e^{-mQ} \, P^{-}(e^{-nQ}/Q')) \\ - \, n \, Q' \, P^{+}(e^{-nQ} \, P^{+}(e^{-mQ}/Q')) \end{array} \right.$$

obtenues en itérant (4.36) (*) . Les simplifications qui s'opèrent lors du calcul de

$${}^{s}\dot{\Delta}_{m} \, {}^{s}\dot{\Delta}_{n} \, Q - {}^{s}\dot{\Delta}_{n} \, {}^{s}\dot{\Delta}_{m} \, Q$$

et qui assurent (4.11), tiennent du miracle. Elle ne se produiraient pas si la résurgence de Q était régie par des équations tant soit peu différentes - si par exemple Q vérifiait non pas (4.36), mais les équations de résurgence plus simples en apparence:

$$\Delta_{n} \, Q = C_{n}(P^{o}+P^{+}) \; (e^{-nQ})$$

<u>Résurgence en</u> x . <u>Algèbre agissante "à la Cartan" et symplectique.</u>

A partir de (5.18) le lecteur pourra facilement calculer l'idéal annulateur de l'algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par les coefficients $A_{n||\alpha}(x)$ qui apparaissent dans le premier exemple du §5. En ce qui concerne le second exemple (équation de Schrödinger à potentiel polynomial) on voit à partir de (5.33) que l'algèbre de Voros engendrée par les $V_{i}(x)$ $(1 \leq i \leq \nu)$ possède un idéal annulateur $\mathbb{J}(\Omega)$ égal au noyau de l'homomorphisme

$$\Delta_{n\omega_{ij}} \mapsto \partial_{n\omega_{ij}} = \frac{1}{n} \left(- \frac{u_{i+1} \, u_{i+2} \cdots u_{j-1}}{u_{j+1} \, u_{j+2} \cdots u_{i-1}}\right)^{n} \left(u_{i} \frac{\partial}{\partial u_{i}} - u_{j} \frac{\partial}{\partial u_{j}}\right) \tag{6.13}$$

avec $n \in \mathbb{Z}^{*}$, avec $i,j \in \mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}$ $(i \neq j)$ et avec des variables u_{i} indexées sur $\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}$ et vérifiant la relation de dépendance :

$$u_{1} \, u_{2} \, \ldots \, u_{\nu} = 1 \tag{6.14}$$

On vérifie également que les opérateurs $\partial_{n\omega_{ij}}$ annulent tous la 2-forme suivante, dite <u>forme isographique</u> :

$$\text{Ш} = \sum_{i \leq i < j \leq \nu} \frac{du_{i}}{u_{i}} \wedge \frac{du_{j}}{u_{j}} \tag{6.15}$$

Ш équivaut bien sûr à une forme symplectique, mais c'est bien sous la forme (4.15) qu'elle sert. A l'algèbre de Voros se trouve donc associé une algèbre étrangère agissante $\mathbb{A}(\Omega) / \mathbb{J}(\Omega)$ qui est "à la Cartan" et de type symplectique, d'où s'ensuivent de nombreuses conséquences intéressantes, à commencer par l'existence d'un "potentiel de résurgence". Voir [E4].

(*) A cause de l'homogénéité on peut prendre indifféremment :

$$Q' = \frac{\partial}{\partial y} Q \; , \; Q'' = \frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}} Q \quad \text{ou} \quad Q' = \frac{\partial}{\partial s} Q \; , \; Q'' = \frac{\partial^{2}}{\partial s^{2}} Q$$

§7. PORTEE DE LA RESURGENCE EQUATIONNELLE.

Notion générale de résurgence équationnelle.

Lorsqu'une équation (différentielle, fonctionnelle, etc...) à coefficients analytiques :

$$E(f) = 0 \qquad\qquad (f = f(t)) \tag{7.1}$$

ou un système de telles équations possèdent une ou plusieurs solutions formelles $f(t)$ et que celles-ci sont résurgentes en t ou en une variable $z = h(t)$ liée à t, par exemple :

$$z = t^{-p} \quad \text{ou} \quad z = t^{-p} \log^q t \qquad\qquad (p,q \in \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Q}) \tag{7.2}$$

on dit qu'on a affaire à de la résurgence équationnelle. Ce type de résurgence est particulièrement facile à étudier, car il existe des règles simples permettant de calculer le réseau de résurgence Ω de f et d'autres règles (*) permettant, pour chaque $\omega \in \Omega$, de former à partir de l'équation (7.1) une nouvelle équation :

$$E_\omega(f, \Delta_\omega f) = 0 \tag{7.3}$$

vérifiée par la dérivée étrangère $\Delta_\omega f$ et linéaire homogène en celle-ci. Qui plus est, toutes les dérivées étrangères :

$$[[\Delta_{\omega_1}, \Delta_{\omega_2}] \dots \Delta_{\omega_r}] f \quad \text{avec} \quad \dot\omega_1 + \dot\omega_2 + \dots \dot\omega_r = \dot\omega \tag{7.4}$$

vérifient aussi l'équation (7.3), ce qui impose aux idéaux annulateurs étrangers une forme bien particulière.

Voici un exemple frappant de résurgence équationnelle. Fixons ν difféos locaux de $(\mathbb{C},0)$ tangents à l'identité :

$$f_i : t \mapsto f_i(t) \quad \text{avec} \quad f_i(0) = 0 \, , \; f_i'(0) = 1 \, , \; f_i(t) \in \mathbb{C}\{t\} \, , \; 1 \leq i \leq \nu \tag{7.5}$$

et considérons l'équation (**)

$$E(f) = 0 \Leftrightarrow \overset{n_1}{f} \circ f_1 \circ \overset{n_2}{f} \circ \dots \overset{n_\nu}{f} \circ f_\nu (t) \equiv t \tag{7.6}$$

avec $n_i \in \mathbb{Z}$ et avec $\overset{n}{f}$ désignant l'itérée n-ème de f. C'est, dans le groupe des difféos locaux, l'équation la plus générale qu'on puisse envisager. On montre que sa solution formelle, quand elle existe (**) :

(i) est toujours résurgente en une variable $z = t^{-p}$ pour un entier positif p bien

---

(*) du type (1.14) ou (1.15).

(**) Quand $n_1 + \dots n_\nu \neq 0$ la solution formelle existe toujours et est unique.

déterminé,

(ii) possède un réseau de résurgence Ω engendré par les racines λ d'un certain polynôme exponentiel :

$$P(\lambda) = \Sigma\, \alpha_i\, e^{\beta_i \lambda} \tag{7.7}$$

fabriqué avec les premiers coefficients de Taylor des f_i

(iii) possède des dérivées étrangères ${}^{z}\Delta_{\omega} f$ dont chacune vérifie une équation linéaire homogène (7.3) que l'on forme facilement à partir de (7.5) en appliquant la règle (1.15) ou, mieux, sa variante (1.15bis).

Classification analytique des objets locaux.

La résurgence équationnelle couvre un champ immense, attendu que "neuf fois sur dix" les équations analytiques singulières $E(f(t)) = 0$ (c'est-à-dire les équations locales - ou systèmes locaux - à coefficients analytiques mais à solutions formelles divergentes) ont leurs solutions $f(t)$ résurgentes en une variable z déduite de t.

Mais la principale application de la résurgence équationnelle demeure sans doute la classification analytique des objets locaux. Par objet local nous entendons ici toutes les équations ou systèmes analytiques locaux (différentiels, aux différences, aux translations, aux composées, mixtes, etc...) ainsi que tous les champs de vecteurs et difféomorphismes locaux de $\mathbb{C}^{\nu}$ et ceci pour n'importe qu'elle dimension ν. Pour de tels objets locaux il existe deux notions naturelles de conjugabilité, formelle et analytique, auxquelles répondent deux notions d'invariants, formels et analytiques. Les invariants formels sont élémentaires à calculer. Les invariants analytiques sont de deux sortes : les invariants holomorphes (i.e. fonctions holomorphes de l'objet) et les autres, ou invariants métaholomorphes. Ces derniers sont essentiellement "non constructibles" et heureusement exceptionnels, vu qu'ils ne peuvent provenir que de deux sources : la nihilence, créatrice de petits diviseurs, et la quasi-résonance, créatrice de tout petits diviseurs. (Voir [E3] chapitres 8 et 9). Quant aux invariants holomorphes ils s'avèrent tous calculables au moyen de la résurgence équationnelle. Les constructions correspondantes sont menées à bien dans [E3] mais leur principe est si simple que nous pouvons l'indiquer ici. Tout repose sur deux notions-clef : l'INTEGRALE FORMELLE et l'EQUATION DU PONT.

L'intégrale formelle $x(z,u)$ dépend du temps complexe z et d'un certain nombre de paramètres $u_1, u_2, \ldots$ Elle se présente toujours sous la forme

$$x(z,u) = \sum_n u^n.\, z^{[n]}.\, \phi^n(z) \tag{7.8}$$

avec n parcourant une partie de $\mathbb{Z}^{\nu}$, avec $u^n = \Pi\, u_i^{n_i}$, avec des $z^{[n]}$ qui sont des "blocs élémentaires" et avec des composantes $\phi^n(z)$ qui sont résurgentes en z.

Pour des équations différentielles ou aux différences d'ordre ν , l'intégrale formelle est tout simplement une solution formelle qui contient ν paramètres u_i .
Pour un champ de vecteurs singulier :

$$X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (X_i(0) = 0) \tag{7.9}$$

l'intégrale formelle $x(z,u) = (x_i(z,u))$ est une solution du système dynamique :

$$\frac{\partial}{\partial z} x_i(z,u) = X_i(x(z,u)) \quad . \tag{7.9bis}$$

Pour un difféo local :

$$f : x_i \mapsto f_i(x) \quad , \qquad (f_i(0) = 0,\ i = 1,\dots,\nu) \tag{7.10}$$

l'intégrale formelle $x(z,u) = (x_i(z,u))$ est une solution du système aux différences:

$$x_i(z+1,u) = f_i(x(z,u)) \tag{7.10bis}$$

Il se trouve, fait crucial, que tout objet local possède essentiellement un <u>nombre fini</u> N d'intégrales formelles $x(z,u)$, que celles-ci sont résurgentes en z et qu'elles vérifient chacune des équations de résurgence de la forme :

$$\dot{\Delta}_\omega \; x(z,u) = \mathbb{A}_\omega \; x(z,u) \qquad (\forall \omega \in \Omega) \tag{7.11}$$

où ω parcourt un ensemble dénombrable ("réseau de résurgence"), où le $\dot{\Delta}_\omega$ du premier membre est une dérivation étrangère pointée (en z) et où le $\mathbb{A}_\omega$ du second membre est un opérateur différentiel ordinaire (en les u_i et parfois en z). L'équation (7.11) est dite <u>équation du pont</u> car elle jette un pont entre le calcul étranger (*) et le calcul différentiel ordinaire.

Il s'avère d'autre part que les opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ sont <u>invariants</u> relativement aux changements de variable analytiques et que, tous ensemble, ils constituent un système complet d'invariants holomorphes de l'objet considéré. On voit par là qu' hormis les cas de nihilence et de quasirésonance, le calcul étranger permet de classer analytiquement tous les objets locaux possibles et imaginables, et ce par un procédé aussi constructif qu'uniforme.

§8. <u>PORTEE DE LA RESURGENCE DE SYNTHESE.</u>

<u>Représentants canoniques et singularités de l'application "synthèse".</u>

Dans beaucoup de classes analytiques d'objets locaux on a une notion naturelle de représentants canoniques. Bien que rarement uniques, ceux-ci présentent tout de

---

(*) On appelle ainsi le "calcul" qui opère avec les dérivations étrangères.

même un grand intérêt car ils sont en un sens les représentants les plus réguliers de leur classe, ceux qu'on peut prolonger analytiquement le plus loin. [E5]. Donnons un exemple qui généralise directement celui du §4.

Fixons des complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ rationnellement indépendants (donc non nuls). Considérons le système normal :

(8.1) $$\frac{d}{dz} Y_i = \lambda_i Y_i \qquad (1 \leq i \leq \nu)$$

et les systèmes analytiques

(8.2) $$\frac{d}{dz} y_i = \lambda_i y_i + \varphi_i(z,y) \qquad (\varphi_i \in \mathbb{C}\{z^{-1},y\}\ ,\ 1 \leq i \leq \nu)$$

qui sont formellement conjugués à (8.1). Considérons enfin les systèmes canoniques :

(8.3) $$\frac{d}{dz} y_i = \lambda_i y_i - \frac{1}{2\pi i z} \cdot y_i \cdot \Sigma B^i_{n_1,\ldots,n_\nu} y_1^{n_1} \ldots y_\nu^{n_\nu} \begin{cases} n_i \geq -1 \\ n_j \geq 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

et associons-leur les opérateurs :

(8.4) $$\mathbb{B}_n = \mathbb{B}_{n_1,\ldots,n_\nu} = u_1^{n_1} \ldots u_\nu^{n_\nu} \sum_{i=1}^{\nu} B^i_{n_1,\ldots,n_\nu} u_i \frac{\partial}{\partial u_i}$$

Tout comme au §4, on montre que les classes analytiques d'équations (8.2) sont caractérisées chacune par une famille dénombrable d'invariants analytiques :

(8.5) $$\mathbb{A}_n = \mathbb{A}_{n_1,\ldots,n_\nu} = u_1^{n_1} \ldots u_\nu^{n_\nu} \sum_{i=1}^{\nu} A^i_{n_1,\ldots,n_\nu} u_i \frac{\partial}{\partial u_i}$$

La recherche dans ces classes de représentants canoniques (8.3) conduit à étudier l'application $\mathbb{B}_n \to \mathbb{A}_n$ ("analyse") et l'application inverse $\mathbb{A}_n \to \mathbb{B}_n$ ("synthèse"). Ces applications sont données par des formules parfaitement analogues à (4.4) et (4.5). Les classes $\{\mathbb{A}_n\}$ qui généralisent les classes <u>unilatérales</u> du §4 sont celles dont les <u>invariants cruciaux</u> ne sont pas tous $\neq 0$. Par définition, les invariants cruciaux sont les $\mathbb{A}_n$ dont les indices $n = \langle i \rangle$ ont toutes leurs coordonnées nulles, sauf la i-ème qui vaut -1 . Ils sont toujours de la forme :

(8.6) $$\mathbb{A}_{\langle i \rangle} = A_{0,\ldots,-1,\ldots,0} \frac{\partial}{\partial u_i} \qquad (1 \leq i \leq \nu)$$

Quand les ν invariants cruciaux sont $\neq 0$, il existe en général une infinité dénombrable de représentants canoniques (analytiques). Quand au contraire un ou plusieurs de ces invariants cruciaux sont nuls, il n'existe plus en général que des représentants canoniques "externes", mais qui sont résurgents par rapport à une ou plusieurs variables $s_1, s_2, \ldots, s_r$ liées aux $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$. C'est la <u>résurgence de synthèse.</u> Elle est régie par des équations analogues à (4.34), (4.35), (4.36) mais en plus compliqué.

On peut donc dire grosso modo que partout où l'application "synthèse" $\mathbb{A}_n \mapsto \mathbb{B}_n$

est irrégulière, elle est résurgente (résurgence de synthèse).

Synthèse r-canonique.

Au lieu de chercher les représentants canoniques sous la forme (8.3), on pourrait les chercher sous la forme :

$$\frac{d}{dz}\, y_i = \lambda_i\, y_i - \frac{1}{2\pi i\, z^{r+1}} \cdot y_i \cdot \Sigma\, B^i_{n_1,\dots,n_\nu}\, y_1^{n_1} \dots y_\nu^{n_\nu} \tag{8.7}$$

pour un entier positif r fixé. Bien que sensiblement moins réguliers, les représentants r-canoniques jouissent de propriétés qui rappellent celles des représentants canoniques. Voir [E5].

Modules analytiques.

Les représentants canoniques tirent leur intérêt de leur simplicité, qui compense leur habituelle multiplicité (*) et leur occasionnelle inexistence (**). Mais on peut inverser les priorités et chercher, pour toute classe formelle C d'objets analytiques locaux, un module analytique, c'est-à-dire une famille $F \subset C$ d'objets locaux qui soit une variété analytique et qui intersecte toute classe analytique de C en un point exactement.

MARTINET et RAMIS abordent la question dans [MR1] à propos notamment des équations conjuguées à l'équation d'Euler. Ils prouvent l'existence de modules analytiques dans les classes unitaires et binaires (selon notre terminologie), c'est-à-dire dans les cas à un nombre fini de paramètres. La construction effective des modules est une autre affaire. Elémentaire pour les classes unitaires, elle paraît très ardue pour les classes binaires. Voir [MR1]. En tout état de cause, les représentants, dans le cas binaire, ne sauraient être tous algébriques (BRJUNO, MALGRANGE).

Les difficultés s'aggravent encore pour les classes unilatérales et sesquilatérales strictes (cas à une infinité de paramètres). Dans [Br] BRJUNO tente la construction de modules pour ces classes, mais ses énoncés sont sujets à caution (Voir ci-avant, §4, remarque 8). Cet auteur nous annonce des corrections à paraître dans la version anglaise de son article.

Résurgence synthétique ou artificielle.

On se gardera de confondre la résurgence de synthèse avec la résurgence synthétique ou artificielle, qui intervient dans le problème de la représentation étrangère des algèbres de Lie et qui consiste en ceci : étant donné une algèbre de Lie $\mathbb{L}$ de dimension finie, une base $\partial_1,\dots,\partial_\nu$ de cette algèbre et des points distincts

(*) dans le cas sesquilatéral (ou bilatéral)

(**) dans le cas unilatéral.

$\omega_1,\dots,\omega_\nu$ de $\mathbb{C}$, construire une algèbre A de fonctions résurgentes dont l'idéal annulateur étranger $\mathbb{J}(\Omega)$ soit exactement le noyau de l'homomorphisme :

(8.8) $$\Delta_{\omega_i} \mapsto \partial_i \qquad (i = 1,\dots,\nu)$$

Il s'agit, si l'on préfère, de construire une algèbre de résurgence A dont l'algèbre étrangère agissante $\mathbb{A}/\mathbb{J}$ soit isomorphe à une algèbre de Lie $\mathbb{L}$ donnée. La construction est possible de multiples manières mais livre les résultats les plus intéressants quand on impose à A d'être canonique (*) et stable pour la dérivation naturelle. Pour assurer cette dernière propriété, il est souvent commode de remplacer l'homomorphisme (8.8) par l'homomorphisme :

(8.9) $$[\Delta_{\omega_i},\Delta_{-\omega_i}] \mapsto \partial_i \qquad (i = 1,\dots,\nu)$$

car les $[\Delta_{\omega_i},\Delta_{-\omega_i}]$, au contraire des Δ_{ω_i}, commutent avec la dérivation naturelle $\partial/\partial z$.

§9. PORTEE DE LA RESURGENCE QUANTIQUE.

Notion mathématique de paramètre planckien.

Pour la plupart des équations ou systèmes $E(f) = 0$ à solutions $f = f(z)$ résurgentes en z et de réseau ${}^z\Omega$ (résurgence équationnelle) on a une notion naturelle de paramètre planckien. Il s'agit d'un paramètre x :

(i) qui se prête à des développements formels en x^{-1}

(ii) qui intervient comme facteur d'homothétie dans le réseau de résurgence ${}^z\Omega$

(iii) qui vérifie quelques conditions supplémentaires (Voir [E4]).

Plutôt que d'entrer dans les détails, il sera plus parlant de donner deux exemples de paramètre planckien sans rapport avec la mécanique quantique, puis d'aborder l'équation de Schrödinger.

Le premier exemple est celui des systèmes différentiels, analytiques à l'infini, formellement conjugués à :

(9.1) $$\frac{d}{dz} Y_i(z) = x\,\lambda_i\, Y_{i(z)} \qquad (i \leq i \leq \nu; \lambda_i \text{ non résonnants})$$

et du type :

(*) c'est-à-dire engendrable par les monômes canoniques $\mathcal{U}^{\omega_1,\dots,\omega_r}_{(z)}$ qui sont introduits dans [E1].

(9.2) $$\frac{d}{dz}\, y_i(z) = x\,\lambda_i\, y_i(z) + \varphi_i(z,y(z)) \qquad (1 \leq i \leq \nu;\ \varphi_i(z,y) \in \mathbb{C}\{z^{-1},y\})$$

Le second exemple est celui des systèmes aux différences, analytiques à l'infini, formellement conjugués à :

(9.3) $$Y_i(z+x^{-1}) = e^{\lambda_i}\, Y_i(z) \qquad (1 \leq i \leq \nu;\ \lambda_i \text{ non résonnants})$$

et du type

(9.4) $$y_i(z+x^{-1}) = e^{\lambda_i}\, y_i(z) + x^{-1}\,\varphi_i(z,y(z)) \qquad (1 \leq i \leq \nu; \varphi_i(z,y) \in \mathbb{C}\{z^{-1},y\})$$

Les solutions formelles des systèmes (9.2) et (9.4) ainsi que les séries formelles qui conjuguent (9.2) et (9.4) à (9.1) et (9.3), sont développables en puissances négatives de x . Elles sont également résurgentes en z , avec un réseau de résurgence Ω engendré dans le premier cas par les scalaires :

(9.5) $$x\lambda_1, x\lambda_2, \ldots, x\lambda_\nu$$

et dans le second cas par les scalaires :

(9.6) $$x\lambda_o, x\lambda_1, x\lambda_2, \ldots, x\lambda_\nu \qquad (\lambda_o = 2\pi i)$$

Le paramètre x est donc bien un facteur d'homothétie pour Ω . Ainsi les conditions (i) et (ii) sont-elles satisfaites. Les conditions subsidiaires (iii) l'étant aussi (voir [E4]), il apparaît que x est pour les systèmes (9.2) et (9.4) un <u>paramètre planckien</u>.

<u>Résurgence quantique duale de la résurgence équationnelle.</u>

Supposons que tous les coefficients de l'équation $E(f) = 0$, qui par hypothèse sont holomorphes en z à l'infini, soient prolongeables analytiquement "partout sans coupures", c'est-à-dire sans autres singularités qu'isolées (*). Soit S l'ensemble de ces singularités. Le fait remarquable est que la (ou les) solution f de $E(f) = 0$ est résurgente non seulement en z (résurgence équationnelle) mais aussi en x (résurgence quantique) et que ces deux résurgences sont en <u>dualité</u>, au sens que voici.

D'abord, les seules dérivations étrangères en z susceptibles d'agir sur f sont de la forme ${}^{z}\Delta_{x\omega}$ avec ω parcourant un ensemble fixe Φ , tandis que les

---

(*) Dans les exemples (9.2) et (9.4) cela revient à supposer que :

$$\varphi_i(z,y) = \Sigma\, \varphi_{i;n_1,\ldots,n_\nu}(z)\; y_1^{n_1} \ldots y_\nu^{n_\nu}$$

avec $\varphi_{i;n}(z) \in \mathbb{C}\{z^{-1}\}$ et $\varphi_{i;n}$ prolongeable "partout sans coupures" à partir de ∞ . On admet des singularités essentielles et des ramifications de toute nature.

seules dérivations étrangères en x susceptibles d'agir sur f sont de la forme ${}^{x}\Delta_{z\omega+\alpha\omega}$ avec ω dans $\mathbb{O}$ et α dans S . On a donc un réseau de résurgence en z :

(9.7) $\quad {}^{z}\Omega = x \cdot \mathbb{O}$

"dual" du réseau de résurgence en x :

(9.8) $\quad {}^{x}\Omega = \bigcup_{\alpha \in S} (z+\alpha).\mathbb{O}$

Ensuite et surtout, les dérivées étrangères en z et en x qui se correspondent vérifient les mêmes équations linéaires homogènes. Autrement dit :

$$(9.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{x\omega}(f, {}^{z}\Delta_{x\omega} f) = 0 \\ E_{z\omega+\alpha\omega}(f, {}^{x}\Delta_{z\omega+\alpha\omega} f) = 0 \\ \text{avec } E_{x\omega} = E_{z\omega+\alpha\omega} = E_{(\omega)} \end{array} \right. , \qquad \left\| \begin{array}{l} \omega \in \mathbb{O} \\ \alpha \in S \end{array} \right.$$

On montre à partir de là que les équations de résurgence en x (résurgence quantique) ont la même forme que les équations de résurgence en z (résurgence équationnelle). On a vu trois exemples concrets au §5 où les équations (5.12), (5.13) et (5.31) faisaient pendant respectivement aux équations (5.6), (5.7) et (5.30). La seule différence est que dans les équations de résurgence en z interviennent des coefficients $A_\omega(x)$ qui sont des fonctions entières de x tandis que dans les équations de résurgence en z interviennent des coefficients $A_{\omega\|\alpha}(x)$ qui sont des fonctions résurgentes de x (ici $\omega \in \mathbb{O}$ et $\alpha \in S$) et qu'à ce titre ils vérifient des équations de résurgence (en x) avec un réseau fixe engendré par les différences $\alpha-\beta$ $(\alpha,\beta \in S)$.

Comme enfin des liens cachés (*) rattachent les coefficients $A_\omega(x)$ aux coefficients $A_{\omega\|\alpha}(x)$ ou plutôt à leurs "modèles sectoriels" (Voir [E1]), on aboutit à des fonctions de x qui possèdent une double nature (fonctions entières et fonctions résurgentes), d'où s'ensuivent de très riches conséquences [E4].

Résurgence quantique indépendante de la résurgence équationnelle.

Lorsque les coefficients de l'équation ou du système $E(f) = 0$, comme fonctions de z , possèdent des singularités essentielles à l'infini, la résurgence en z disparaît évidemment. Mais la résurgence en x peut se maintenir et se maintient en général, pourvu que les coefficients en question, comme fonctions de z , vérifient des conditions (pas très sévères) de croissance uniforme à l'infini.

(*) Pour un exemple, voir au §5 les liens entre les coefficients de Sibuya et ceux de Voros. Des liens analogues, mais linéaires, existent entre les $A_n(x)$ des formules (5.6), (5.7) et les $A_{n\|\alpha}(x)$ des formules (5.17), (5.18).

La résurgence quantique est donc largement indépendante de la résurgence équationnelle : elle peut survivre à sa disparition. Cependant - chose remarquable - les équations de résurgence en x conservent leur forme, duale des équations de résurgence en z, même lorsque ces dernières disparaissent !

Equation de Schrödinger à une dimension.

L'équation de Schrödinger unidimensionnelle et indépendante du temps :

$$\frac{d^2}{dq^2}\psi = \frac{x^2}{4} W(q)\,\psi \qquad (x = 2/\hbar\ ,\ W(q) = V(q)-E) \tag{9.10}$$

fournit peut-être le plus bel exemple de "paramètre planckien" et de "résurgence quantique" en même temps que la justification de cette terminologie.

Lorsque $W(q)$ est polynomial de degré ν ou plus généralement méromorphe à l'infini avec pôle d'ordre ν, on a résurgence équationnelle en $z = q^{\nu+2/2}$

Lorsqu'en outre la fonction $H(z)$ construite à partir de $W(q)$ selon (5.22) et (5.26), est prolongeable partout sans coupures (mais avec d'éventuelles ramifications) on a aussi résurgence quantique en x.

Lorsqu'enfin $H(z)$ reste prolongeable partout sans coupure mais que $W(q)$ perd sa méromorphie à l'infini, seule subsiste la résurgence quantique en x.

Le cas des potentiels polynomiaux, quartiques surtout, est étudié dans [V1] et [V2]. Sur la base d'indices théoriques et numériques très probants, VOROS y conjecture la résurgence en x, avec croissance exponentielle (et même tempérée) des transformées de Borel en x. Cette conjecture est vraie. La démonstration [E4] repose sur le changement de variable $q \to z$ donné en (5.22) et sur la remarque suivante :

Pour tout z_o fixé, l'équation (9.10) admet au voisinage de z_o une solution formelle du type (5.24) avec des $\varphi_\pm(z,x)$ qui sont développables en série divergentes de puissances de x^{-1} et dont les transformées de Borel en x :

$$x^{-n} \mapsto \xi^{n-1}/(n-1)! \quad , \quad \varphi_\pm(z,x) \mapsto \hat{\varphi}_\pm(z,\xi) \tag{9.11}$$

sont données par les formules (*) :

$$\hat{\varphi}_+(z,\xi) = \delta(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{W}_n(z,\xi) \qquad (\delta(\xi) = \text{dirac en } 0) \tag{9.12}$$

avec

$$\begin{cases} \hat{W}_{2n}(z,\xi) = + \int_{I_{2n}} K_{2n}\, dz_1 \ldots dz_n\, d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1} \\ K_{2n} = H(z_1)H(z_1+\xi_1)H(z_2+\xi_1)H(z_2+\xi_2)\ \ldots\ H(z_n+\xi_{n-1})H(z_n+\xi) \end{cases} \tag{9.13}$$

(*) Nous donnons seulement $\hat{\varphi}_+$. L'expression de $\hat{\varphi}_-$ est bien sûr analogue.

$$(9.14)\quad \begin{cases} \hat{W}_{2n+1}(z,\xi) = -\int_{I_{2n+1}} K_{2n+1}\, dz_1 \ldots dz_n\, d\xi_1 \ldots d\xi_n \\ K_{2n+1} = H(z_1)H(z_1+\xi_1)H(z_2+\xi_1)H(z_2+\xi_2) \ldots H(z_n+\xi_{n-1})H(z_n+\xi_n)H(z-\xi+\xi_n) \end{cases}$$

et avec des multichemins d'intégrations symboliquement caractérisables par :

$$(9.15)\quad \begin{cases} I_{2n} = \{ z_o < z_1 < z_2 < \ldots z_n < z-\xi \;;\; 0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots \xi_{n-1} < \xi \} \\ I_{2n+1} = \{ z_o < z_1 < z_2 < \ldots z_n < z-\xi \;;\; 0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots \xi_n < \xi \} \end{cases}$$

Ces expressions, valables pour z voisin de z_o, et ξ voisin de 0, sont faciles à majorer et à prolonger, en z comme en ξ.

La méthode s'étend à tous les potentiels analytiques. Elle permet de montrer la croissance exponentielle (*) en ξ (**) pour des potentiels très généraux, par exemple :

$$(9.16)\qquad W(q) = \sum_{i=1}^{N} P_i(q)\, e^{Q_i(q)} \qquad (P_i, Q_i \in \mathbb{C}[q])$$

D'où la possibilité de resommer par Laplace les transformées de Borel en x et de donner ainsi un contenu <u>exact</u> aux méthodes dites semi-classiques ("programme de VOROS").

Equation de Schrödinger à plusieurs dimensions.

La résurgence en x s'étend-elle aux équations de Schrödinger à plusieurs dimensions et à potentiel analytique ? Le terrain paraît à peu près inexploré, mais tous les espoirs semblent permis. Voir [P1] et [P2]. Si toutefois ceux-ci se démentaient, la mécanique quantique cesserait d'apparaître comme la principale source de résurgence "en x" et il y aurait sans doute lieu de revenir sur les termes de "résurgence quantique" et de "paramètre planckien" pour leur en substituer de plus adéquats.

Résurgence rigide.

Les résurgences équationnelle et de synthèse sont des cas particulier de résurgence <u>souple</u> : elles donnent lieu à des équations de résurgence dont les coefficients peuvent varier continument. Au contraire, la résurgence quantique est de type <u>rigide</u>: les équations (5.18) et (5.33) par exemple comportent toujours des coefficients entiers ou rationnels invariables. La résurgence quantique n'est d'ailleurs pas le seul cas de résurgence rigide : pour d'autres exemples importants, voir [E3] §§5.7 et 11.7.

(*) et même tempérée, pour de bonnes normalisations.

(**) sur toute droite exempte de singularités.

§10. REFERENCES.

[Br] A.D. BRJUNO, Invariants analytiques d'une équation différentielle (Dokl. Akad. Nauk SSSR, janvier 1983 - L'auteur nous annonce une version anglaise révisée).

[E1] J. ECALLE, Les fonctions résurgentes, Tome 1 (Les algèbres de fonctions résurgentes. Pub. Math. Orsay, 1981).

[E2] J. ECALLE, les fonctions résurgentes, Tome 2 (Les fonctions résurgentes appliquées à l'itération. Pub. Math. Orsay, 1981).

[E3] J. ECALLE, Les fonctions résurgentes, Tome 3 (L'équation du pont et la classification analytique des objets locaux - à paraître aux Pub. Math. Orsay, 1985).

[E4] J. ECALLE, Les fonctions résurgentes, Tome 4 (Résurgence quantique - en préparation.

[E5] J. ECALLE, Les fonctions résurgentes, Tome 5 (Problèmes de synthèse - en préparation).

[E6] J. ECALLE, Les champs de vecteurs locaux résonnants de $\mathbb{C}^{\nu}$: classification analytique (Exposé à Strasbourg en novembre 1983. Pub. IRMA, RCP 27).

[E7] J. ECALLE, Classification analytique des systèmes et équations différentiels à plusieurs niveaux (Dans ce même recueil).

[Ma] B. MALGRANGE, Travaux d'Ecalle et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques (Exposé Bourbaki n°564, novembre 1980, LN 901, Springer, 1981, p.55-70).

[MR1] J. MARTINET et J.P. RAMIS, Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre (Pub. Math. IHES, vol.55, 1982, p.63-164)

[MR2] J. MARTINET et J.P. RAMIS, Classification des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre (Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., Ser.4, t.16, p.571-621).

[P1] F. PHAM, Calcul microdifférentiel complexe et méthode semi-classique (Exposé à la 36° rencontre entre physiciens théoriciens et mathématiciens, RCP n°25, IRMA Strasbourg 1983).

[P2] F. PHAM, Transformées de Laplace des microsolutions de systèmes holonomes (L'Enseignement Mathématique, t.30, 1984, p.57-84).

[Si] Y. SIBUYA, Global theory of a second ordre linear ordinary differential operator with a polynomial coefficient (North Holland, 1975).

[V1] A. VOROS, The return of the quartic oscillator. The complex WKB method (Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol.29, n°3, 1983, p.211-338).

[V2] A. VOROS, Problème spectral de Sturm-Liouville. Le cas de l'oscillateur quartique (Exposé Bourbaki n°602, 1982-83, publié par Astérisque, Soc. Math. de France, 1983).