OFFPRINT FROM

Journées de géométrie algébrique d'Angers (juillet 1979)

Algebraic Geometry Angers 1979

Variétés de petite dimension

edited by

Arnaud Beauville

Université d'Angers

SIJTHOFF & NOORDHOFF 1980
Alphen aan den Rijn, The Netherlands
Rockville, Maryland, USA

LA DESCENTE SUR LES VARIETES RATIONNELLES

J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc

Table des matières

I. Introduction

On note k un corps, $\bar{k}$ une clôture séparable et $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Une k-variété algébrique géométriquement intègre X est dite k-rationnelle si son corps des fonctions $k(X)$ est transcendant pur sur k, et elle est dite *rationnelle* si $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$ est $\bar{k}$-rationnelle. Les surfaces cubiques lisses dans $\mathbf{P}^3$, les surfaces fibrées en coniques sur la droite projective $\mathbf{P}^1$, les groupes algébriques linéaires sont, au moins pour k parfait, des exemples familiers de variétés rationnelles.

Dans la description de l'ensemble $X(k)$ des points k-rationnels d'une k-variété rationnelle lisse X, on rencontre plusieurs types de problèmes, qu'on peut grossièrement classer comme suit:

(i) problème de l'existence d'un point k-rationnel; par exemple, si k est un corps de nombres, problème de la validité du principe de Hasse (si X a un point dans chaque complété de k, a-t-elle un point dans k?)

(ii) la k-variété X est-elle k-rationnelle? k-unirationnelle? si k est un corps de nombres, X satisfait-elle l'approximation faible (pour tout ensemble fini Σ de places de k, a-t-on $X(k)$ dense dans $\prod_{v\in\Sigma} X(k_v)$?)?

(iii) quand X n'est pas k-rationnelle avec cependant $X(k) \neq \emptyset$, trouver une description raisonnable de $X(k)$, ou, du moins, définir, et étudier, des relations d'équivalence sur $X(k)$ permettant d'approcher une telle description (R-équivalence, [16], chap. II, §4, engendrée par définition par la relation: $A \sim B$ s'il existe un ouvert U de $\mathbf{P}^1_k$ et un k-morphisme $U \xrightarrow{\varphi} X$ tels que A et B appartiennent à $\varphi[U(k)]$; équivalence de Brauer, [16], chap. VI, §3) et de donner une "mesure" de la non-k-rationalité de X; de ce point de vue, il est également intéressant de considérer, outre $X(k)/R$, le quotient $A_0(X)$ du groupe $Z_0(X)$ des 0-cycles de X par l'équivalence rationnelle.

Pour X une k-variété rationnelle, propre et lisse, le module galoisien Pic $\bar{X}$ est $\mathbf{Z}$-libre de type fini. Ce $\mathfrak{g}$-module, ainsi que le groupe $H^1(\mathfrak{g}, \operatorname{Pic} \bar{X})$ qui est intimement lié au groupe de Brauer de X, ont déjà joué un grand rôle dans les travaux de Manin [16] et Voskresenskiĭ [20]. La première observation à cet égard est la suivante: si X est k-rationnelle, le $\mathfrak{g}$-module Pic $\bar{X}$ est stablement de permutation, i.e. il existe M_1 et M_2 deux $\mathfrak{g}$-modules $\mathbf{Z}$-libres de rang fini admettant chacun une $\mathbf{Z}$-base permutée par $\mathfrak{g}$, tels que $\operatorname{Pic} \bar{X} \oplus M_1 \approx M_2$, ce qui implique $H^1(\mathfrak{g}, \operatorname{Pic} \bar{X}) = 0$. On obtient ainsi des obstructions à la k-rationalité. Par ailleurs, si k est un corps de nombres, Manin ([15], [16] chap. VI) a obtenu grâce au groupe $H^1(\mathfrak{g}, \operatorname{Pic} \bar{X})$ une analyse générale de divers contre-exemples connus au principe de Hasse.

Les Notes [5, 6, 7] exploitent également le module galoisien Pic $\bar{X}$, mais par l'intermédiaire du k-tore dual S_0. On y introduit les torseurs universels, qui sont des torseurs sur X sous S_0 et qui donnent sur $X(k)$ une information plus précise que la simple considération du groupe $H^1(\mathfrak{g}, \operatorname{Pic} \bar{X})$.

Les §§II–IV apportent des compléments et illustrations à la méthode de la descente résumée dans les Notes. Cette méthode ne suffit pas en général au traitement des problèmes (i)–(iii) pour les variétés rationnelles, mais il est possible qu'elle suffise pour les surfaces rationnelles. Ceci aurait de nombreuses conséquences qui sont inventoriées au §V et discutées au §VI à la lumière de quelques résultats récents.

II. La méthode de la descente

A. *L'idée de la méthode*

Soient S un k-tore et X un k-schéma. Etant donné un point P de X, on note $k(P)$ son corps résiduel. Si $\mathcal{T}$ est un torseur (= espace principal homogène) sur X sous S, on note $p_{\mathcal{T}}: \mathcal{T} \to X$ la projection canonique et $[\mathcal{T}]$ la classe de $\mathcal{T}$ dans le groupe de cohomologie étale $H^1(X, S)$, qui classe précisément ces torseurs. L'accouplement

$$X(k) \times H^1(X, S) \longrightarrow H^1(k, S)$$
$$(P, [\mathcal{T}]) \longmapsto [\mathcal{T}_P]$$

(où $\mathcal{T}_P = \mathcal{T} \times_X k(P)$) a la propriété:

$$[\mathcal{T}_P] = 0 \Longleftrightarrow P \text{ appartient à } p_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}(k)).$$

Soit $\mathcal{T}$ un torseur sur X sous S. Il définit l'application $\theta_{\mathcal{T}}: X(k) \to H^1(k, S)$ par $\theta_{\mathcal{T}}(P) = [\mathcal{T}_P]$. Pour $\alpha \in H^1(k, S)$, notons $p_\alpha: \mathcal{T}_\alpha \to X$ un torseur de classe $[\mathcal{T}] - \alpha$ dans $H^1(X, S)$. On a la relation

$$X(k) = \bigcup_{\alpha \in \operatorname{im} \theta_{\mathcal{T}}} p_\alpha(\mathcal{T}_\alpha(k)) = \bigcup_{\substack{\alpha \in H^1(k, S) \\ \mathcal{T}_\alpha(k) \neq \emptyset}} p_\alpha(\mathcal{T}_\alpha(k)).$$

Lorsque X est propre sur k, l'application $\theta_{\mathcal{T}}$ a de bonnes propriétés (cf. B). Pour X une k-variété rationnelle, propre et lisse, la méthode de la descente consiste à bien choisir S et $\mathcal{T}$ de telle sorte que les k-variétés rationnelles $\mathcal{T}_\alpha$, bien que de dimension plus grande, aient néanmoins une k-géométrie plus simple que X.

Dans le suite on identifie la plupart du temps, implicitement, un torseur et sa classe, ce qui, pour les problèmes considérés ici, ne présente pas d'inconvénient; ainsi, l'expression "torseur unique" signifie "torseur unique à isomorphisme, non unique, près".

B. *Propriétés générales*

L'application $\theta_{\mathcal{T}}$ définie ci-dessus se prolonge en un homomorphisme

$$\theta_{\mathcal{T}}: Z_0(X) \longrightarrow H^1(k, S)$$

tel que $\theta_{\mathcal{T}}(P) = \mathrm{cor}_{k(P)/k}([\mathcal{T}_P])$ pour tout point fermé P de X.

Proposition 1 ([8] prop. 12, p. 198): *Pour X une k-variété propre, l'homomorphisme $\theta_{\mathcal{T}}$ passe au quotient par l'équivalence rationnelle des 0-cycles.*

A fortiori, pour X propre sur k, l'application $\theta_{\mathcal{T}}: X(k) \to H^1(k, S)$ passe au quotient par la R-équivalence.

Proposition 2: *Pour k un corps de type fini sur le corps premier et X une k-variété propre, l'image de l'homomorphisme $\theta_{\mathcal{T}}$ est finie.*

A fortiori, l'application $\theta_{\mathcal{T}}: X(k) \to H^1(k, S)$ a une image finie ([5], proposition 1).

Démonstration: On sait (d'après Nagata, cf. [12] EGA IV 6.12.6, et d'après EGA IV 8.8.3) qu'il existe un anneau régulier A, contenu dans k et de type fini comme $\mathbf{Z}$-algèbre, un A-tore $\tilde{S}$, un A-schéma propre $\tilde{X}$ et un torseur $\tilde{\mathcal{T}}$ sur $\tilde{X}$ sous $\tilde{S}$, tels que $(\tilde{S}, \tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}) \times_A k = (S, X, \mathcal{T})$. Soient P un point fermé de X, puis $K = k(P)$ et B la clôture intégrale de A dans K, qui est finie sur A (d'après Nagata, $\mathbf{Z}$ est excellent, EGA IV 7.8.3). Le k-morphisme $\mathrm{Spec}\, K \to X$ défini par P se prolonge en un A-morphisme $W \to \tilde{X}$, où W est un ouvert régulier de $\mathrm{Spec}\, B$ contenant tous les points de codimension 1 (on utilise la propreté de $\tilde{X}$ sur A et la fermeture du lieu singulier de $\mathrm{Spec}\, B$). Soient F le fermé de $\mathrm{Spec}\, A$, image par le morphisme fini $q: \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ du fermé complémentaire de W dans $\mathrm{Spec}\, B$, puis U l'ouvert complémentaire de F dans $\mathrm{Spec}\, A$ et $q_U: V \to U$ la restriction de q à $V = q^{-1}(U)$. Ainsi, l'ouvert U contient tous les points de codimension 1 de $\mathrm{Spec}\, A$. L'ouvert V, contenu dans W, est régulier. On en déduit ([12] EGA IV 15.4.2) que le morphisme fini q_U est plat. Les propriétés fonctorielles de la trace d'un torseur par un morphisme fini et plat ([1] SGA 4, XVII 6.3.26) montrent alors que $\theta_{\mathcal{T}}(P) = \mathrm{cor}_{K/k}([\mathcal{T}_P])$ est l'image, par l'application $H^1(U, \tilde{S}) \to H^1(k, S)$, de $\mathrm{cor}_{V/U}([\tilde{\mathcal{T}} \times_{\bar{X}} V])$. Comme A est régulier et que U contient tous les points de codimension 1 de Spec A, un théorème de pureté facile (par descente on se ramène aux résultats de pureté pour $H^0(\ ,\mathbf{G}_m)$ et $H^1(\ ,\mathbf{G}_m)$) montre l'égalité $H^1(U, \tilde{S}) = H^1(A, \tilde{S})$. On a ainsi montré que $\theta_{\mathcal{T}}$ envoie $Z_0(X)$ dans l'image de $H^1(A, \tilde{S})$ dans $H^1(k, S)$. Comme $H^1(k, S)$ est de torsion, il suffit, pour établir la proposition, de prouver que $H^1(A, \tilde{S})$ est un groupe de type fini. Or ceci se ramène, par descente galoisienne, à la même assertion pour $H^0(\ ,\mathbf{G}_m)$ et $H^1(\ ,\mathbf{G}_m)$ sur un anneau régulier de type fini sur $\mathbf{Z}$ (Roquette, via le théorème des unités de Dirichlet et celui de Mordell–Weil–Néron).

En résumé, pour X une k-variété propre, les applications $\theta_{\mathcal{T}}$ induisent des applications $X(k)/R \to H^1(k, S)$ et $A_0(X) \to H^1(k, S)$, d'images finies pour k de type fini sur le corps premier.

Notons que, pour k un corps de nombres, un certain nombre d'arguments de la démonstration ci-dessus se simplifient; de plus, si l'on considère l'application $X(k) \to \mathrm{Br}\, k$ définie par un élément de $H^2(X, \mathbf{G}_m)$, on peut alors utiliser des arguments analogues, en particulier ([1] SGA 4, VII 5.9), pour montrer que son image est finie (comparer avec Manin, [16] chap. VI §4).

C. *Torseurs universels*

On note $S \mapsto \hat{S}$ la dualité qui à un k-tore S associe son $\mathfrak{g}$-module $\hat{S}$ des caractères sur $\bar{k}$, qui est un module galoisien $\mathbf{Z}$-libre de type fini. Etant donné X une k-variété rationnelle, propre et lisse, et S_0 le k-tore dual du $\mathfrak{g}$-module Pic $\bar{X}$, on a défini dans les Notes [5, 6] les *torseurs universels* sur X comme les torseurs sur X sous S_0 dont l'image par l'application $\chi: H^1(X, S_0) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}_0, \mathrm{Pic}\, \bar{X})$ est l'application identité de $\hat{S}_0 = \mathrm{Pic}\, \bar{X}$ (l'application χ associe à un torseur $\mathcal{T}$ sur X sous S_0 et à un caractère $\lambda: \bar{S}_0 \to \bar{\mathbf{G}}_m$ le torseur sur $\bar{X}$ sous $\bar{\mathbf{G}}_m$ déduit de $\bar{\mathcal{T}}$ par λ) et deux tels torseurs universels diffèrent par un unique élément de $H^1(k, S_0)$.

THÉORÈME 1 ([6]): *Etant donné une k-variété X rationnelle, propre et lisse, et $\mathcal{T}^c$ une k-compactification lisse d'un torseur universel sur X, la k-variété $\mathcal{T}^c$ est une variété rationnelle telle que le $\mathfrak{g}$-module* Pic $\bar{\mathcal{T}}^c$ *soit un module de permutation.*

Ainsi, le passage à une k-compactification lisse d'un torseur universel améliore complètement la situation du point de vue du groupe de Picard. On dispose par ailleurs de *descriptions locales* des torseurs universels, qui permettent d'en donner des "équations". Soient X une k-variété rationnelle, propre et lisse, U un ouvert de X tel que Pic $\bar{U} = 0$ (de tels ouverts forment une base d'ouverts de X), et F le fermé complémentaire. Notons respectivement T et M les k-tores duaux des $\mathfrak{g}$-modules $\mathbf{Z}$-libres de type fini $\bar{k}[U]^*/\bar{k}^*$ (où $\bar{k}[U] = \Gamma(\bar{U}, \mathcal{O}_{\bar{X}})$) et $\mathrm{Div}_{\bar{F}} \bar{X}$ (qui est le $\mathfrak{g}$-module de permutation des diviseurs de $\bar{X}$ à support dans $\bar{F}$). De la suite exacte de $\mathfrak{g}$-modules

$$0 \longrightarrow \bar{k}[U]^*/\bar{k}^* \longrightarrow \mathrm{Div}_{\bar{F}}\,\bar{X} \longrightarrow \mathrm{Pic}\,\bar{X} \longrightarrow 0 \tag{1}$$

on tire par dualité la suite exacte de k-tores

$$1 \longrightarrow S_0 \longrightarrow M \longrightarrow T \longrightarrow 1 \tag{2}$$

qui fait de M un torseur sur T sous S_0. Soit σ une $\mathfrak{g}$-section de l'homomorphisme $\bar{k}[U]^* \twoheadrightarrow \bar{k}[U]^*/\bar{k}^* = \hat{T}$, par exemple, pour $P \in U(k)$, la section σ_P donnée par $\sigma_P(\mathrm{cl}\, f) = f/f(P)$. Une telle section σ définit un $\mathfrak{g}$-homomorphisme de $\bar{k}$-algèbres $\bar{k}[T] = \bar{k}[\hat{T}] \to \bar{k}[U]$, donc un k-morphisme φ_σ: $U \to T$ qui, pour $\sigma = \sigma_P$, envoie P sur l'élément neutre de T.

ASSERTION 1: *Etant donné U et σ comme ci-dessus, le torseur sur U sous S_0, déduit via φ_σ: $U \to T$ du torseur M sur T défini par* (2), *est la restriction à U d'un unique torseur universel $\mathcal{T}^\sigma$ sur X. Inversement, tout torseur universel sur X admet une telle description locale sur tout ouvert U tel que* $\mathrm{Pic}\,\bar{U} = 0$. *Pour $\sigma = \sigma_P$, le torseur $\mathcal{T}^\sigma$ n'est autre que le torseur universel $\mathcal{T}^P$ de fibre triviale en P.*

D. *La descente*

Le processus de la descente sur une k-variété rationnelle X, propre et lisse, est décrit en détail dans les Notes [6, 7]. Il est essentiellement résumé dans la décomposition

$$X(k) = \bigcup_{\alpha \in I} p_\alpha(\mathcal{T}_\alpha(k))$$

qui constitue une partition de $X(k)$ définie par les torseurs universels (cf. A): $\mathcal{T}$ désigne un torseur universel et I la partie de $H^1(k, S_0)$ formée des α pour lesquels le torseur universel $\mathcal{T}_\alpha$ a un point k-rationnel. L'existence d'un torseur universel équivaut (cf. [6]) à l'existence d'une $\mathfrak{g}$-rétraction pour l'injection $\bar{k}^* \hookrightarrow \bar{k}(X)^*$. L'existence d'un torseur universel ayant un point k-rationnel équivaut à $X(k) \neq \emptyset$. Lorsqu'il en est ainsi, la décomposition ci-dessus, qui est finie lorsque k est de type fini sur le corps premier (proposition 2), est plus grossière que celle donnée par la R-équivalence et découpe $X(k)$ en classes paramétrées sur k par des k-variétés à k-géométrie plus simple que celle de X (théorème 1). On peut considérer que cette méthode réussit parfaitement lorsque la question suivante a une réponse affirmative:

(Q_1) *Les torseurs universels sur X qui ont un point k-rationnel sont-ils k-rationnels?*

Dans le cas d'un corps de nombres, la descente se précise ainsi: on peut se limiter au cas où X a un point dans chaque complété de k (sinon $X(k)=\emptyset$); si, pour chaque torseur universel $\mathcal{T}$ sur X, il existe une place v de k avec $\mathcal{T}(k_v)=\emptyset$, la décomposition ci-dessus montre que $X(k)$ est vide; cette obstruction au principe de Hasse, dont le calcul ne requiert qu'un nombre fini de vérifications, équivaut en fait ([7], théorème) à l'obstruction associée par Manin au groupe $H^1(\mathfrak{g}, \operatorname{Pic} \bar{X})$. Si cette obstruction est vide, il existe donc un nombre fini non nul de torseurs universels $\mathcal{T}_\alpha$ ayant un point dans chaque complété de k. La question qui se pose alors est de savoir si l'un de ces $\mathcal{T}_\alpha$ au moins a un point k-rationnel. D'après le théorème 1, l'obstruction de Manin au principe de Hasse sur les k-compactifications lisses des $\mathcal{T}_\alpha$ est vide. On est ainsi amené à poser la question suivante:

(Q$_2$) *Les k-compactifications lisses des torseurs universels sur X satisfont-elles le principe de Hasse?*

De même, l'analyse des contre-exemples à l'approximation faible donnée dans [7] soulève la question suivante, plus faible que **(Q$_1$)**:

(Q$_3$) *Les torseurs universels sur X qui ont un point k-rationnel satisfont-ils l'approximation faible?*

La question **(Q$_1$)** n'a en général pas de réponse affirmative pour $\dim X \geq 3$ (cf. [6]): l'intersection lisse X de deux quadriques dans $\mathbf{P}^5_{\mathbf{R}}$ avec coordonnées (x, y, z, t, u, v) définie par

$$x^2+y^2+z^2=uv$$
$$x^2+2y^2+t^2=(u-v)(u-2v)$$

est $\mathbf{C}$-rationnelle, $\operatorname{Pic} X_{\mathbf{C}}$ est le $\mathfrak{g}$-module trivial $\mathbf{Z}$ et pourtant $X(\mathbf{R})$ a deux composantes connexes réelles; cette dernière propriété vaut donc pour toute $\mathbf{R}$-compactification lisse d'un torseur universel sur X et celle-ci ne peut être $\mathbf{R}$-rationnelle.

III. L'exemple des tores

Nous décrivons ici, de façon plus détaillée que dans [5], comment la méthode de la descente donne les résultats qualitatifs sur la R-équivalence sur les tores, par une méthode différente de celle utilisée dans [8].

Soient T un k-tore et X une k-compactification lisse de T: d'après Brylinski [3], il en existe toujours une (et même équivariante). Soit F le fermé complémentaire de T dans X. Comme $\operatorname{Pic} \bar{T}=0$ et $\hat{T}=\bar{k}[T]^*/\bar{k}^*$, on a la suite exacte de Voskresenskiĭ (cf. (1))

$$0 \longrightarrow \hat{T} \longrightarrow \operatorname{Div}_{\bar{F}} \bar{X} \longrightarrow \operatorname{Pic} \bar{X} \longrightarrow 0 \tag{3}$$

et la suite duale de k-tores

$$1 \longrightarrow S_0 \longrightarrow M \longrightarrow T \longrightarrow 1. \tag{4}$$

Comme le $\mathfrak{g}$-module $\mathrm{Div}_{\bar F} \bar X$ est de permutation, M est un k-tore quasi-trivial; ainsi, M est k-rationnelle, $M(k)/R = \{0\}$ et $H^1(k, M) = 0$. La suite (4) donne la suite exacte de groupes

$$M(k) \longrightarrow T(k) \xrightarrow{\partial} H^1(k, S_0) \longrightarrow 0. \tag{5}$$

La description locale des torseurs universels donnée en II.C s'applique ici en prenant $U = T$. Pour $P \in T(k)$, il existe donc un k-morphisme $\varphi_P\colon T \to T$ tel que le torseur sur T sous S_0 déduit par le changement de base φ_P du torseur M sur T défini par (4) soit la restriction du torseur universel $\mathscr{T}^P$ de fibre triviale en P. Comme la section $\sigma_P\colon \hat T = \bar k[T]^*/\bar k^* \to \bar k[T]^*$ associe au caractère f la fonction $x \mapsto f(x-P)$ et que $\bar k[T] = \bar k[\hat T]$, le morphisme φ_P n'est autre que la translation par $-P$. Pour $P = O$ l'élément neutre de $T(k)$, on voit ainsi que le diagramme

$$\begin{tikzcd} T(k) \arrow[dr, "\partial"] \arrow[d, hook, "i"'] & \\ X(k) \arrow[r, "\theta_{\mathscr{T}^O}"'] & H^1(k, S_0) \end{tikzcd}$$

commute. Comme X est propre sur k, la proposition 1 montre que $\theta_{\mathscr{T}^O}$ passe au quotient par la R-équivalence; il en est donc de même de ∂. Par ailleurs, deux éléments de $T(k)$ de même image par ∂ diffèrent, d'après (5), d'un élément de $M(k)$, et sont donc R-équivalents. Ainsi, $T(k)/R \xrightarrow{\approx} H^1(k, S_0)$ et on a le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} T(k)/R \arrow[dr, "\approx", "\partial"'] \arrow[d, hook] & \\ X(k)/R \arrow[r, "\theta"'] & H^1(k, S_0). \end{tikzcd}$$

De plus, pour k de type fini sur le corps premier, la proposition 2 montre que l'image de $\theta = \theta_{\mathscr{T}^O}$ est finie: ainsi, $T(k)/R$ et $H^1(k, S_0)$ sont alors finis. Pour k quelconque, l'assertion 1, la surjectivité de ∂ et le calcul ci-dessus de φ_P montrent que tout torseur universel $\mathscr{T}$ sur X est une variété k-rationnelle: $\mathscr{T}$ étant donné, il existe $P \in T(k)$ tel que $\mathscr{T}_T \cong M \times_T T$ avec pour flèche structurale $T \to T$ la translation par $-P$; ainsi $\mathscr{T}_T$ est une k-variété k-isomorphe à M, qui est k-rationnelle. En caractéristique 0, on peut établir ([8], proposition 13, p. 203) l'égalité $T(k)/R = X(k)/R$; la décomposition de $X(k)$ donnée en II.D décrit alors exactement la R-équivalence.

En résumé, le torseur M sur T sous S_0 défini par (4) calcule la R-équivalence sur $T(k)$ et celle-ci est finie pour k de type fini sur le corps premier. La méthode que nous venons d'utiliser pour obtenir ce résultat est fondée sur l'existence d'un prolongement de ce torseur M en un torseur sur la k-variété *propre* et lisse X et ce prolongement nous est ici donné comme un torseur universel; mais, au moins en caractéristique 0, les propositions 8 et 9 de [8] assurent en fait a priori l'existence d'un tel prolongement.

On peut enfin dire que dans le cas des k-compactifications lisses de tores, la méthode de la descente réussit parfaitement: la question $(\mathbf{Q}_1)$ a une réponse affirmative, la question $(\mathbf{Q}_2)$ aussi, mais de façon triviale, car tout torseur universel a alors un point k-rationnel.

IV. L'exemple des surfaces de Châtelet

L'objet de ce paragraphe est de décrire explicitement les torseurs universels sur certaines surfaces rationnelles parmi lesquelles les surfaces de Châtelet [4] et de donner ainsi une interprétation des résultats de Châtelet du point de vue de la descente (à comparer avec l'interprétation de Manin [16], chap. VI §5, qui utilise le groupe de Brauer).

Soit k un corps de caractéristique différente de 2. On considère $a \in k^*$ non carré, $K = k(\sqrt{a})$ et $G = \mathrm{Gal}(K/k) = \mathbf{Z}/2$. On note par $\sim$ la conjugaison de K/k. On désigne par $R\mathbf{G}_m$ le k-tore dual du $\mathfrak{g}$-module $\mathbf{Z}[G]$ et par $R^1\mathbf{G}_m$ le k-tore dual du $\mathfrak{g}$-module $\mathbf{Z}[G]/\mathbf{Z}$: c'est aussi le noyau de la norme $N: R\mathbf{G}_m \to \mathbf{G}_m$.

Soient n un entier ≥ 2 et $\{e_1, \ldots, e_{2n-1}\}$ des éléments de k distincts deux à deux. Soient X_1 la k-surface définie dans $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{A}^1$, avec coordonnées $(y, z, t; \lambda)$, par l'équation

$$y^2 - az^2 = (\lambda - e_1) \ldots (\lambda - e_{2n-1})t^2$$

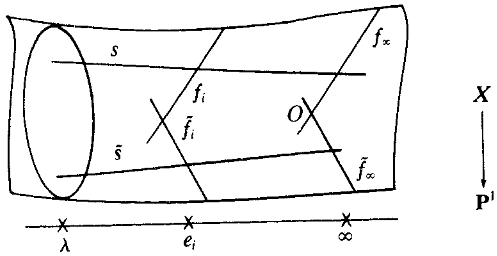
et X_2 la k-surface définie dans $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{A}^1$, avec coordonnées $(Y, Z, T; \mu)$, par l'équation

$$Y^2 - aZ^2 = \mu(1 - e_1\mu) \ldots (1 - e_{2n-1}\mu)T^2.$$

Soit alors X la k-surface propre et lisse obtenue par recollement de X_1 et X_2 via

$$\begin{aligned} X_1 - \{\lambda \neq 0\} &\longrightarrow X_2 - \{\mu \neq 0\} \\ (y, z, t; \lambda) &\longmapsto (\lambda^{-n}y, \lambda^{-n}z, t; \lambda^{-1}). \end{aligned}$$

Les projections sur $\mathbf{A}^1$ se recollent en un k-morphisme $X \to \mathbf{P}^1$ qui fait de X



une k-surface fibrée en coniques au-dessus de $\mathbf{P}^1$. Cette fibration possède sur K des sections s et $\tilde{s}$ définies par $(y, z, t; \lambda) = (\pm\sqrt{a}, 1, 0; \lambda)$. Elle a $2n$ fibres dégénérées $f_i + \tilde{f}_i$ pour $i = 1, \ldots, 2n-1, \infty$ en les points $\lambda = e_1, \ldots, e_{2n-1}, \infty$.

Soit U l'ouvert complémentaire du k-fermé F union de s, $\tilde{s}$, et des f_i, $\tilde{f}_i$, pour $i \neq 2n-1$. On a Pic $\bar{U} = 0$. La suite exacte (1) s'écrit ici

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{2n-2} \mathbf{Z}\alpha_i \xrightarrow{\ \rho\ } \bigoplus_{i=1}^{2n-2} [\mathbf{Z}(f_i - f_\infty) \oplus \mathbf{Z}(\tilde{f}_i - \tilde{f}_\infty)] \oplus \mathbf{Z}f_\infty \oplus \mathbf{Z}\tilde{f}_\infty \oplus \mathbf{Z}s \oplus \mathbf{Z}\tilde{s}$$
$$\longrightarrow \operatorname{Pic} \bar{X} \longrightarrow 0$$

où α_i est la classe de la fonction $\lambda - e_i$, qui a pour diviseur $f_i + \tilde{f}_i - f_\infty - \tilde{f}_\infty$. L'homomorphisme de k-tores dual de ρ s'identifie au k-morphisme

$$(R\mathbf{G}_m)^{2n-2} \times (R\mathbf{G}_m)^2 \longrightarrow \mathbf{G}_m^{2n-2}$$
$$(x, y) \longmapsto N(x).$$

Pour chaque $(c_i) \in (k^*)^{2n-2}$, la famille $\{c_i(\lambda - e_i)\}$, pour $i = 1, \ldots, 2n-2$, définit une $\mathfrak{g}$-section de la projection $\bar{k}[U]^* \to \bar{k}[U]^*/\bar{k}^* \approx \mathbf{Z}^{2n-2}$, et toute $\mathfrak{g}$-section est de ce type. La description locale des torseurs universels (II.C) montre alors que la restriction de tout torseur universel à U admet des équations du type suivant:

$$0 \neq \lambda - e_i = c_i(u_i^2 - av_i^2) \qquad i = 1, \ldots, 2n-2$$
$$y^2 - az^2 = (\lambda - e_1) \ldots (\lambda - e_{2n-1})$$
$$0 \neq x_j^2 - aw_j^2 \qquad j = 1, 2$$

dans l'espace affine de coordonnées $(\lambda, y, z, u_i, v_i, x_j, w_j)$. Si l'on se restreint de plus à l'ouvert $\lambda \neq e_{2n-1}$, on obtient le produit de $(R\mathbf{G}_m)^2$ par la variété $X((c_i))$ d'équations

$$0 \neq \lambda - e_i = c_i(u_i^2 - av_i^2) \qquad i = 1, \ldots, 2n-1 \tag{6}$$

dans l'espace affine de coordonnées (λ, u_i, v_i) avec $c_{2n-1} = \prod_{i=1}^{2n-2} c_i$.

La question ($\mathbf{Q}_1$) est ainsi très proche ici de la question de savoir si les variétés $X((c_i))$ qui ont un point k-rationnel sont k-rationnelles. Pour $n = 2$, Châtelet a montré [4] que $X(1, 1)$ est k-rationnelle, ce qui implique alors, au moins en caractéristique 0, que les $X((c_i))$ qui ont un point k-rationnel sont k-stablement k-rationnelles; dans ce cas, la descente réussit encore très bien: les classes pour la R-équivalence sur $X(k)$ coïncident avec les fibres de l'application $\theta_{\mathcal{T}^O}$ associée au torseur universel trivial au point double O de la fibre à l'infini; cette application est définie sur $U(k)$ par

$$\begin{aligned} U(k) &\longrightarrow H^1(k, S_0) = (k^*/N(K^*))^2 \\ (y, z, t; \lambda) &\longmapsto (\lambda - e_1, \lambda - e_2) \end{aligned}$$

et son image est finie quand k est de type fini sur le corps premier.

La question ($\mathbf{Q}_2$) pour les surfaces X considérées dans ce paragraphe se ramène à la question de la validité du principe de Hasse pour les variétés $X((c_i))$: pour $n = 2$, on retrouve une question de Manin ([16] chap. VI, fin du §5). La question ($\mathbf{Q}_3$) pour ces surfaces X se ramène à la question de la validité de l'approximation faible pour les variétés $X((c_i))$ qui ont un point dans k.

V. Questions sur les surfaces rationnelles

Nous dressons ici une liste de questions naturelles sur les surfaces rationnelles qui se trouvent dériver pour la plupart de l'une des questions ($\mathbf{Q}_1$), ($\mathbf{Q}_2$), ($\mathbf{Q}_3$).

On considère une k-surface rationnelle X, propre et lisse. On suppose en outre $X(k) \neq \emptyset$ dans les questions (**a**)–(**j**). On note $\tilde{A}_0(X)$ le sous-groupe de $A_0(X)$ formé des classes des 0-cycles de degré 0 et $\varphi : \tilde{A}_0(X) \to H^1(k, S_0)$ la restriction, indépendante de $\mathcal{T}$, de l'homomorphisme $\theta_{\mathcal{T}}$ défini par un torseur universel $\mathcal{T}$.

($\mathbf{a}_1$) X est-elle k-unirationnelle?

($\mathbf{a}_2$) Pour k infini, $X(k)$ est-il Zariski-dense dans X?

(**b**) Si $\operatorname{Pic} \bar{X}$ est un $\mathfrak{g}$-module stablement de permutation, existe-t-il des entiers m et n tels que $X \times_k \mathbf{A}_k^m$ soit k-birationnelle à $\mathbf{A}_k^n$?

($\mathbf{c}_1$) Si $\operatorname{Pic} \bar{X}$ est un facteur direct d'un $\mathfrak{g}$-module de permutation, existe-t-il une k-variété rationnelle Y telle que $X \times_k Y$ soit k-rationnelle?

($\mathbf{c}_2$) Sous la même hypothèse sur $\operatorname{Pic} \bar{X}$, a-t-on $X(k)/R$ trivial?

($\mathbf{c}_3$) Sous la même hypothèse sur $\operatorname{Pic} \bar{X}$, a-t-on $\tilde{A}_0(X)$ trivial?

Pour les trois questions ($\mathbf{d}_i$) suivantes, on considère en outre un point $O \in X(k)$ et le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} X(k)/R \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "\theta"] & \\ \tilde{A}_0(X) \arrow[r, "\varphi"'] & H^1(k, S_0) \end{tikzcd}$$

où θ est induite par $\theta_{\mathcal{T}^0}$ et où i associe à $P \in X(k)$ la classe du 0-cycle $P - O$.

(d$_1$) θ est-elle injective?

(d$_2$) i est-elle injective?

(d$_3$) φ est-elle injective?

(e$_1$) A-t-on, pour k de dimension cohomologique ≤ 1, $X(k)/R = \{O\}$?

(e$_2$) Sous la même hypothèse sur k, a-t-on $\tilde{A}_0(X) = 0$?

(f) Chaque classe pour la R-équivalence sur $X(k)$ est-elle paramétrée par les points à valeurs dans k d'une k-variété k-rationnelle?

(g$_1$) Pour k de type fini sur le corps premier, $X(k)/R$ est-il fini?

(g$_2$) Sous la même hypothèse sur k, a-t-on $\tilde{A}_0(X)$ fini?

(h) Pour k local, les classes pour la R-équivalence sur $X(k)$ sont-elles ouvertes pour la topologie définie par celle de k? En particulier, pour $k = \mathbf{R}$, ces classes coïncident-elles avec les composantes connexes réelles?

Dans les questions suivantes, k est un corps de nombres et Ω désigne l'ensemble des places de k.

(i) L'adhérence de $X(k)$ dans le produit topologique $\prod_{v \in \Omega} X(k_v)$ est-elle ouverte?

(j$_1$) L'obstruction à l'approximation faible définie dans [7] est-elle la seule?

(j$_2$) Si $H^1(\mathfrak{g}, \operatorname{Pic} \bar{X}) = 0$, l'approximation faible vaut-elle pour X?

(k$_1$) L'obstruction de Manin au principe de Hasse ([15], [16] chap. VI §1) est-elle la seule?

(k$_2$) Si $H^1(\mathfrak{g}, \operatorname{Pic} \bar{X}) = 0$, le principe de Hasse vaut-il pour X?

ASSERTION 2: *Au moins pour k de caractéristique* 0, *une réponse affirmative à* (Q$_1$) *implique une réponse affirmative aux questions* (a)–(i) *à l'exclusion près de* (d$_3$) *et* (g$_2$); *pour* (i), *il suffit d'une réponse affirmative à* (Q$_3$); *une réponse affirmative à* (Q$_2$) (*resp. à* (Q$_2$) *et* (Q$_3$)) *implique une réponse affirmative à* (k) (*resp.* (j)).

Ainsi, la méthode de la descente donne-t-elle une présentation unifiée de questions sur les surfaces rationnelles, déjà posées pour la plupart par divers auteurs (Manin, Iskovskikh, Swinnerton-Dyer).

VI. Quelques résultats récents

Nous passons en revue les questions précédentes à la lumière d'un certain nombre de résultats récents. Au moins en caractéristique 0, toutes les questions (a)–(k) sont invariantes k-birationnellement. On peut donc espérer obtenir, pour certaines de ces questions, une réponse par une analyse cas par cas, grâce au résultat suivant d'Iskovskikh, qui parachève une classification due à Enriques et Manin:

Théorème 2 (Iskovskikh [14]): *Soient k un corps quelconque, X une k-surface rationnelle, propre et lisse. Alors, X est k-birationnelle à une k-surface de l'un des types suivants*:

(1) *une k-surface de Del Pezzo de degré n avec $1 \le n \le 9$;*

(2) *une k-surface fibrée en coniques.*

On sait par ailleurs que les surfaces de Del Pezzo de degrés 5 et 7 sont toujours k-rationnelles, du moins pour k infini. De plus, si X est une surface de Del Pezzo de degré 6, 8 ou 9, $\operatorname{Pic} \bar{X}$ est toujours un $\mathfrak{g}$-module stablement de permutation, X est k-rationnelle dès que $X(k) \neq \emptyset$ et, si k est un corps de nombres, elle vérifie le principe de Hasse. Les surfaces de Del Pezzo de degré 4 sont les intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbf{P}^4$. Celles de degré 3 sont les surfaces cubiques lisses dans $\mathbf{P}^3$. Parmi les surfaces fibrées en coniques pour k de caractéristique différente de 2, des exemples intéressants sont donnés par les équations affines

$$y^2 - az^2 = P(\lambda)$$

où $a \in k^*$ et où P est un polynôme sans facteur multiple.

(a$_1$) Pour les surfaces de Del Pezzo de degré ≥ 2 ayant un point dans k, on sait presque toujours montrer ([16] Chap. IV, §7) que ce sont des variétés k-unirationnelles. Pour les surfaces fibrées en coniques, la question reste largement ouverte, de même (**a$_2$**), sauf pour $k = \mathbf{R}$ (Iskovskikh [13]).

(b) Soit X une k-surface rationnelle, propre et lisse, avec $X(k) \neq \emptyset$, telle que $\operatorname{Pic} \bar{X}$ soit le $\mathfrak{g}$-module trivial $\mathbf{Z}^n$: on peut montrer, au moins pour k parfait, que X est alors k-rationnelle (ceci ne vaut plus pour $\dim X \geq 3$, cf. fin du §II).

(c$_3$), **(d$_3$)**, **(e$_2$)**, **(g$_2$)** Pour toute k-surface rationnelle X, propre et lisse, Bloch a défini et étudié [2], par des méthodes de K-théorie, un homomorphisme

$$\Phi: \tilde{A}_0(X) \longrightarrow H^1(k, S_0)$$

dont on peut montrer qu'il coïncide avec la restriction φ de l'homomorphisme $\theta_{\mathcal{T}}$ défini par un torseur universel $\mathcal{T}$ quelconque (II.B). Les résultats de Bloch [2] impliquent d'après [9] l'énoncé suivant:

Théorème 3: *Soient k de caractéristique $\neq 2$ et X une k-surface fibrée en coniques telle que $X(k) \neq \emptyset$. L'homomorphisme Φ est alors injectif.*

On en déduit, en utilisant entre autres la proposition 2, une réponse affirmative aux quatre questions ci-dessus pour une telle surface. La finitude de $\tilde{A}_0(X)$ est déjà dans [2] pour k corps de nombres.

($\mathbf{d_1}$), ($\mathbf{d_2}$), ($\mathbf{e_1}$), ($\mathbf{g_1}$) Soit X une surface de Del Pezzo de degré 4 sur k de caractéristique 0 avec $X(k) \neq \emptyset$. Une telle surface est k-birationnelle à une surface fibrée en coniques. Une analyse précise des courbes tracées sur X a permis à Swinnerton-Dyer d'obtenir le résultat suivant:

THÉORÈME 4 (Swinnerton-Dyer [19]): *Pour une telle surface de Del Pezzo de degré* 4, *l'application naturelle* $X(k)/R \to A_0(X)$ *est injective et son image est l'ensemble des éléments de degré* 1.

D'où une réponse affirmative dans ce cas aux quatre questions ci-dessus.

($\mathbf{e_1}$) On a le résultat suivant:

THÉORÈME 5 (Swinnerton-Dyer [18]): *Soit X une surface cubique lisse dans* $\mathbf{P}^3_k$ *définie sur le corps fini k. Alors* $X(k)/R = \{0\}$.

(h) La réponse est affirmative pour une surface cubique (Manin [16], chap. II, §6). Pour $k = \mathbf{R}$, des résultats d'Iskovskikh [13] impliquent une réponse affirmative pour les **R**-surfaces fibrées en coniques.

(i) Soit X une surface cubique lisse sur un corps de nombres k. Un argument de Swinnerton-Dyer montre que l'adhérence de $X(k)$ dans tout produit fini de $X(k_v)$ est ouverte.

($\mathbf{k_1}$) Soit X une k-compactification lisse de la k-surface fibrée en coniques d'équation affine

$$y^2 - az^2 = \prod_{i=1}^{r} P_i(\lambda) \tag{7}$$

où $a \in k^*$ et où les P_i sont des polynômes irréductibles de degré pair, étrangers deux à deux. La méthode de la descente conduit à la question suivante: les k-compactifications lisses des k-variétés (lisses) définies par les équations affines

$$0 \neq P_i(\lambda) = c_i(u_i^2 - av_i^2) \quad i = 1, \ldots, r \tag{8}$$

où les c_i appartiennent à k^* et où les variables sont (λ, u_i, v_i) satisfont-elles le principe de Hasse? Si la réponse à cette question est affirmative, la réponse à **($\mathbf{k_1}$)** pour X l'est aussi. C'est par cette démarche qu'on obtient (Coray et les auteurs) le résultat particulier suivant:

THÉORÈME 6 ([11]): *L'obstruction de Manin est la seule obstruction au principe de Hasse pour un k-modèle propre et lisse de la surface d'équation*

$$y^2 - az^2 = P_1(\lambda)P_2(\lambda)$$

où P_1 *et* P_2 *sont deux polynômes du second degré irréductibles premiers entre eux.*

(j_1) Pour X comme en (7), la question (j_1) aurait une réponse affirmative si les variétés du type (8) satisfaisaient, outre le principe de Hasse, l'approximation faible. On retrouve ainsi des questions déjà rencontrées à propos des équations (6), ce qui invite à poser la question générale suivante: soient k un corps de nombres, puis, pour $i = 1, \ldots, r$, des éléments a_i de k^* et des polynômes irréductibles $P_i \in k[\lambda]$; *les k-variétés d'équations affines*

$$0 \neq P_i(\lambda) = u_i^2 - a_i v_i^2 \qquad i = 1, \ldots, r$$

satisfont-elles le principe de Hasse et l'approximation faible?

Pour $k = \mathbf{Q}$, on peut montrer [10] que l'hypothèse (H) de Schinzel [17] (extrapolation hardie du théorème de la progression arithmétique) donne une réponse affirmative à cette dernière question.

BIBLIOGRAPHIE

[1] [SGA 4] M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier: Théorie des Topos et Cohomologie étale des schémas. Lecture Notes in Math. n^{os} *270, 305*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer 1972–73.

[2] S. Bloch: On the Chow group of certain rational surfaces (preprint).

[3] J.-L. Brylinski: Décomposition simpliciale d'un réseau, invariante par un groupe fini d'automorphismes. C.R. Acad. Sci. Paris 288, série A (1979) 137–139.

[4] F. Châtelet: Points rationnels sur certaines courbes et surfaces cubiques. Enseignement Math. *5* (1959) 153–170.

[5] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc: Torseurs sous des groupes de type multiplicatif. C.R. Acad. Sci. Paris 282, série A, (1976) 1113–1116.

[6] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc: Variétés de première descente attachées aux variétés rationnelles. C.R. Acad. Sci. Paris 284, série A, (1977) 967–970.

[7] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc: La descente sur une variété rationnelle définie sur un corps de nombres. C.R. Acad. Sci. Paris 284, série A, (1977) 1215–1218.

[8] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc: La *R*-équivalence sur les tores. Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4^e série, *10* (1977) 175–229.

[9] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc: Remarques sur "On the Chow group of certain rational surfaces" par S. Bloch (en préparation).

[10] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc: Sur le principe de Hasse et l'approximation faible, et sur une hypothèse de Schinzel, à paraître dans Acta Arithm. *41*.

[11] J.-L. Colliot-Thélène, D. Coray et J.-J. Sansuc: Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles (prépublication).

[12] [EGA IV] A. Grothendieck et J. Dieudonné: Eléments de Géométrie Algébrique. Publications mathématiques I.H.E.S. *24, 28*, Paris 1965–66.

[13] V.A. Iskovskikh: Surfaces rationnelles munies d'un pinceau de courbes rationnelles.

Mat. Sbornik, *74* (116), (1967) 608–638 (trad. ang. Math. USSR-Sbornik, *3*, (1967) 563–587).

[14] V.A. ISKOVSKIKH: Modèles minimaux des surfaces rationnelles sur un corps quelconque, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math. *43*, (1979) 19–43.

[15] Y.I. MANIN: Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne, Actes du Congrès intern. math. Nice, *1*, (1970) 401–411.

[16] Y.I. MANIN: Formes cubiques, Nauka, Moscou 1972 (trad. ang., North-Holland, Amsterdam 1974).

[17] A. SCHINZEL et W. SIERPIŃSKI: Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers. Acta Arithm. *4*, (1958) 185–208. Corrig. ibid. *5*, (1959) 259.

[18] H.P.F. SWINNERTON-DYER: Universal equivalences for cubic surfaces over finite and local fields (preprint Rome 1979).

[19] H. P. F. SWINNERTON-DYER: Rational equivalence and R-equivalence on cubic surfaces (preprint).

[20] V.E. VOSKRESENSKIĬ: Tores algébriques, Nauka, Moscou 1977.

Jean-Louis Colliot-Thélène
C.N.R.S. Mathématiques
Bâtiment 425, Université de Paris-Sud
F-91405 Orsay, France

Jean-Jacques Sansuc
E.N.S., 45 rue d'Ulm
F-75230 Paris Cedex 05, France