QUELQUES QUESTIONS DE RATIONALITÉ ET APPLICATIONS

EMMANUEL BREUILLARD

Groupe de travail sur les groupes algébriques

Dans tout l'exposé k désigne un sous-corps d'un corps algébriquement clos K. On note Γ le groupe de Galois $Gal(K|k)$.

On fait aussi l'hypothèse que k est de caractéristique 0. Cela permet de caractériser k comme le sous-corps des invariants de Γ : $k = K^{\Gamma}$.

Les groupes algébriques considérés sont affines.

On commence rappeler la définition d'une k-variété.

1. k-STRUCTURES

1.1. Sur les K-espaces vectoriels et les K-algèbres.

1.1.1. *Définitions.*

Définition 1.1. *Soit V un K-espace vectoriel et V_k un sous k-module de V. On dit que V_k est une **k-structure** de V si l'homomorphisme naturel $V_k \otimes_k K \to V$ est un isomorphisme de K-espaces vectoriels.*

Il revient au même de dire que V_k engendre V en tant que K-ev et que toute famille k-libre d'éléments de V_k est aussi K-libre. Ou encore, cela équivaut (moyennant Zorn bien sûr) à l'existence d'une base du k-ev V_k qui soit aussi une base du K-ev V. Si $k = \mathbb{R}$ et $K = \mathbb{C}$, $V_{\mathbb{R}}$ est une *forme réelle* de V. Si le K-ev V est muni d'une k-structure, l'ensemble V_k est aussi appelé ensemble des **k-points** de V. De même, si A est une K-algèbre, une k-structure sur A est une sous k-algèbre A_k de A qui est une k-structure de A en tant qu'espace vectoriel. Par exemple, $k[X_1, ..., X_n]$ est une k-structure de $K[X_1, ..., X_n]$.

Définition 1.2. *Soit V un K-ev muni d'une k-structure V_k et W un sous-espace de V. On dit que W est **défini sur** k si $W_k = W \cap V_k$ est une k-structure de W.*

C'est équivalent à dire que W_k engendre W en tant que K-ev. Dans ce cas, l'espace quotient V/W est muni d'une k-structure naturelle par l'image de V_k par la projection canonique (image qui s'identifie à V_k/W_k). Reciproquement, comme on le vérifie facilement, si W est un sous-espace de V tel que V_k/W_k est une k-structure de V/W, alors W est défini sur k.

Définition 1.3. *Une application K-linéaire $f : V \to W$ entre deux K-ev munis de k-structures est dite **définie sur** k si $f(V_k) \subseteq W_k$.*

On a la même notion pour les morphismes d'algèbres.

Date: Avril 2000.

1.1.2. *Action du groupe de Galois.* Soit V un K-ev muni d'une k-structure. En écrivant $V = V_k \otimes_k K$, on voit que l'on a une action naturelle du groupe de Galois Γ sur V en faisant agir Γ sur le deuxième facteur. Puisque $k = K^\Gamma$, on constate que l'ensemble des vecteurs invariants est précisément $V_k = V^\Gamma$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 1.1. *Soit V un K-ev muni d'une k-structure et W un sous-espace de V. Alors on a l'équivalence suivante :*

1. *W est défini sur k.*
2. *W est stable sous l'action de Γ.*

Preuve: (1) $\Rightarrow$ (2) est évident. Réciproquement, posons $W_k = W \cap V_k$. Il s'agit de montrer que W_k engendre W. Soit W_0 le K-sous-espace de V engendré par W_k ; il est défini sur k. On suppose donc, par l'absurde, que $W_0 \subsetneq W$. Fixons une base $(e_i)_{i\in I}$ du quotient V/W_0 formée d'éléments de V_k/W_k qui forment eux-mêmes une k-base de V_k/W_k. Choisissons dans W/W_0 un élément w non nul dont l'écriture dans la base $(e_i)_{i\in I}$ possède le plus petit nombre de termes. Quitte à multiplier w par un scalaire non nul de K, et quitte à réindexer la base, on peut supposer que $w = e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$ où $\lambda_2 \notin k$ (car si tous les $\lambda_i \in k$, $w \in W_0$). Mézalor, il existe $\sigma \in \Gamma$ (toujours car $k = K^\Gamma$) tel que $\sigma(\lambda_2) \neq \lambda_2$ et $w - \sigma(w)$ est non nul, dans W/W_0 car W est stable sous l'action de Γ, et son écriture dans la base a moins de n termes : contradiction. q.e.d.

Dans le cas $k = \mathbb{R}$ et $K = \mathbb{C}$, cette dernière proposition dit qu'un sous-espace est une forme réelle si et seulement s'il est stable par conjugaison.

1.2. Sur les variétés affines.

Définition 1.4. *Soit $V = Spec_K(A)$ une variété affine sur K. La donnée d'une k-structure A_k sur A définit une k-structure sur V. On dit que V est une **k-variété affine**.*

Soit V est une k-variété affine. On définit l'ensemble V_k des **k-points** de V comme l'ensemble des points correspondant aux éléments $e_x \in Hom_K(A, K)$ tels que $e_x(A_k) \subseteq k$, c'est-à-dire $Hom_k(A_k, k)$.

Définition 1.5. *Soit $f : V \to W$ un morphisme de k-variétés affines. On dit que f est défini sur k, ou est un **k-morphisme**, le comorphisme f_* est défini sur k (au sens du paragraphe précédent).*

De même, on appelle k-isomorphisme un isomorphisme f entre deux k-variétés affines tel que f soit défini sur k. Dans ce cas, son inverse f^{-1} est aussi défini sur k. Deux k-variétés affines sont dites isomorphes s'il existe un k-isomorphisme entre elles. Sur une même variété affine, deux k-structures ne sont bien évidemment pas toujours isomorphes.

On définit de même l'action de Γ sur V de la façon suivante

$$e_{\sigma(x)} = \sigma \circ e_x \circ \sigma^{-1}$$

où le σ de gauche opère sur K et le σ^{-1} de droite opère sur $A = A_k \otimes_k K$ par action sur le deuxième facteur. S'il on note ${}^\sigma a$ cette action, on obtient donc ${}^\sigma a(x) = \sigma(a(\sigma^{-1}(x)))$. Ainsi Γ opère sur V par homéomorphismes (mais pas par automorphismes !). De plus (toujours car $k = K^\Gamma$), V_k (resp. A_k) est précisément l'ensemble des points fixes de Γ.

De même Γ agit sur les morphismes de k-variétés affines par

$${}^\sigma f(x) = \sigma(f(\sigma^{-1}(x)))$$

On vérifie immédiatement que ${}^{\sigma}f$ est un morphisme dès que $f : V \to W$ est un morphisme de k-variétés affines. Et de même, f est défini sur k si et seulement s'il est fixe sous l'action de Γ, c'est-à-dire Γ-équivariant.

Définition 1.6. *Une sous-variété fermée $W = Spec_K(A/I)$ de V (où I est l'idéal des fonctions régulières s'annulant sur W) est dite **k-fermée** si elle est l'ensemble des zéros d'une famille d'éléments de A_k. Elle est dite **définie sur** k si I est défini sur k (au sens du paragraphe précédent).*

Si W est définie sur k, alors la k-structure A_k/I_k de A/I définit une k-structure sur W, qui est la k-structure sur W induite par celle de V.

Une sous-variété définie sur k est bien sûr toujours k-fermée. Comme nous sommes en caractéristique 0, *la réciproque est aussi vraie.* En effet, si W est k-fermée elle est clairement stable par l'action de Γ. Par conséquent l'idéal I des fonctions régulières s'annulant sur W est aussi stable sous l'action de Γ. La proposition précédente permet alors de conclure que I est défini sur k et donc que W est définie sur k. On voit donc qu'une sous-variété W est définie sur k si et seulement si elle est stable sous l'action de Γ. Il suffit même qu'il existe une partie E de W stable par Γ et Zariski dense dans W.

Pour conclure, notons que toute k-variété affine V peut se plonger dans K^n muni de sa k-structure naturelle. Plus précisément en prenant le morphisme de K-algèbres induit par un système fini de générateurs de A constitué d'éléments de A_k on obtient un k-isomorphisme entre V et une sous-variété de K^n définie sur k.

1.3. Sur les variétés algébriques.

Définition 1.7. *Sur une variété algébrique V, une k-structure est la donnée d'une topologie sur V, la k-topologie des k-ouverts, telle que*

1. *Pour tout k-ouvert U de V, une k-structure $k[U]$ est donnée sur $K[U]$.*
2. *Pour tous k-ouverts $U \subseteq V$, la restriction $K[V] \to K[U]$ est définie sur k.*
3. *Il existe un recouvrement fini de V par des k-ouverts affines.*

On dit que V est une k-variété. Cette définition est cohérente avec la définition d'une k-structure sur une variété affine, et toutes les définitions et concepts introduits au paragraphe précédent s'étendent naturellement au cas des k-variétés. En particulier, un morphisme f entre deux k-variétés est défini sur k lorsqu'il est continu pour la k-topologie et que le comorphisme associé à deux k-ouverts U et V tels que $f(U) \subseteq V$ est défini sur k. Une sous-variété W est définie sur k (resp. k-fermée) si son intersection avec tout k-ouvert affine est définie sur k (resp. k-fermée). Les deux notions coïncident ici car $k = K^{\Gamma}$. De même, les k-points V_k de V sont ceux des k-ouverts affines de V.

Les actions du groupe de Galois sur les k-ouverts affines sont compatibles et définissent l'action de Γ sur V. Alors une sous-variété de V est définie sur k si et seulement si elle est stable par Γ (il suffit qu'elle contienne une partie stable dense). Et un point est dans V_k si et seulement s'il est fixé par Γ (on appelle cela le *critère de Galois*). L'action de Γ sur les morphismes entre k-variétés est défini exactement comme au paragraphe précédent, et de même, un morphisme est défini sur k si et seulement s'il est fixé par Γ. En particulier si $f : V \to W$ est défini sur k, alors $\overline{f(V)}$ est définie sur k. De même, si $E \subseteq V_k$ est Zariski dense dans V et $f(E) \subseteq W_k$, alors f est défini sur k.

Lorsque $x \in V_k$, $\mathcal{O}_x$ est muni d'une k-structure naturelle $\mathcal{O}_{x,k}$ et il en est de même pour son idéal maximal $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_{x,k} \otimes_k K$. On obtient ainsi une k-structure sur l'espace tangent $T_x(V) = T_{x,k}(V) \otimes_k K$ (voir le §1 de l'exposé de Jérôme et Joël). De plus, si $f : V \to W$ est un k-morphisme de k-variétés, la différentielle en $x \in V_k$ est une application linéaire définie sur k de $T_x(V)$ dans $T_{f(x)}(W)$.

2. k-GROUPES

2.1. **Généralités, k-actions.** Un groupe algébrique affine G sur le corps K est dit défini sur k si G est une k-variété et si les opérations de multiplication et de passage à l'inverse sont définies sur k. Dans la suite G désigne toujours un groupe algébrique affine défini sur k (on dit aussi k-groupe). Un k-sous-groupe de G est un sous-groupe qui est aussi une sous-variété définie sur k.

L'ensemble G_k des k-points de G est bien sûr un sous-groupe de G. De plus, la composante neutre irréductible G^0 est stable sous l'action de Γ, donc aussi définie sur k. De même, si H est un sous-groupe de G_k, alors $\overline{H}$ est un k-sous-groupe de G.

Nous allons nous contenter d'examiner comment les propriétés classiques des groupes algébriques (plongement dans GL_n, quotient, etc) se précisent dans le cas des k-goupes.

Tout d'abord, on définit une k-action d'un k-groupe G sur une k-variété V, de façon naturelle comme une action $G \times V \to V$ qui est un k-morphisme de k-variétés. On sait (voir l'exposé de Gaëtan) que les orbites de G sont localement fermées dans V. Si $v \in V_k$ $G \times \{v\}$ est définie sur k, donc l'orbite d'un k-point sera une sous-variété de V définie sur k. Même chose pour le stabilisateur. En particulier on en déduit,

Proposition 2.1. *L'image $\phi(G)$ d'un morphisme de k-groupes défini sur k, $\phi : G \to H$, est un k-sous-groupe de H.*

On peut aussi s'intéresser aux orbites de G_k. La première chose à remarquer est que si $v \in V_k$ on a $G_k \cdot v \subseteq (G \cdot v)_k$ mais il n'y a pas égalité en géneral ! (par exemple, considérer le $\mathbb{R}^*$-morphisme de groupes de $\mathbb{C}^*$ dans lui-même donné par $\phi : z \to z^2$) On peut dire plus si k est un corps local (voir plus bas).

Passons maintenant au théorème de Chevalley vu dans l'exposé de Vincent.

2.2. **Le théorème de Chevalley revisité.**

Théorème 2.1. *Soit G un k-groupe et H un k-sous-groupe. Alors, il existe une représentation π de G dans $GL_n(K^n)$ définie sur k et $v \in \mathbb{P}(k^n)$ tels que $H = \{g \in G \mid \pi(g)v = v\}$.*

C'est exactement la même preuve. On considère la représentation régulière gauche de G dans $K[G]$: $\rho(g)f(x) = f(g^{-1}x)$. C'est clairement une k-action linéaire. On sait (cf. la preuve du théorème de plongement dans l'exposé de Joël) que cette représentation est localement finie (tout vecteur est dans une sous-représentation de dimension finie). En particulier, le plus petit sous-espace E de $K[G]$ stable par G, et qui contient un système fini de générateurs dans I_k de l'idéal I des fonctions régulières s'annulant sur H, est de dimension finie. Il est clairement défini sur k. En notant $p = \dim(I \cap E)$, et $F = \Lambda^p(E)$, $D = \Lambda^p(E \cap I)$ on voit que F est défini sur k et stable par l'action induite de G, puis que D est une droite de F qui est définie sur k. Enfin on constate que $H = \{g \in G \mid \Lambda^p\rho(g) \cdot D = D\}$, ce qui achève la preuve.

En prenant pour H le groupe trivial, on en déduit,

Corollaire 2.1. *Tout k-groupe admet un plongement défini sur k dans GL_n.*

Aussi, en considérant l'action induite par π sur l'espace projectif $\mathbb{P}(K^n)$, on obtient une k-action et H est le stabilisateur d'un k-point. L'orbite est donc une sous-variété quasi-projective définie sur k. Ceci permet de munir G/H d'une structure de k-variété quasi-projective. On a toujours le problème de la définition du quotient (voir l'exposé de Sophie) : si X et Y sont deux k-variétés sur lesquelles G opère transitivement par une k-action, et si H est le stabilisateur d'un k-point pour chaque action, existe-t-il un k-isomorphisme G-équivariant entre X et Y ?

2.3. **Quotients.** La réponse est oui bien sûr, et la preuve est la même. Il faut seulement vérifier que les morphismes que l'on considère sont bien définis sur k. Comme on est en caractéristique nulle, la preuve est plus rapide et je vais la rappeler ici.

Disons qu'une k-variété X est un **k-espace homogène** relativement à G, où en abrégé k-espace, si G opère transitivement par une k-action α sur X. On note G_x le stabilisateur du point x. La *propriété universelle* à considérer est logiquement la suivante :

On dit que X est un k-quotient de G par H s'il existe $x \in X_k$ tel que $H = G_x$ et si quel que soit le k-espace Y et $y \in Y_k$ tel que $H \subseteq G_y$, il existe un k-morphisme $\phi : X \to Y$ G-équivariant et tel que $\phi(x) = y$.

Tout k-espace X tel que $H = G_x$ pour un certain $x \in X_k$ est en fait un quotient. En effet, considérons un k-espace Y comme ci-dessus et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ \alpha_x & \nearrow & \uparrow p_1 \\ G & \rightarrow & X \times Y \\ \beta_y & \searrow & \downarrow p_2 \\ & & Y \end{array}$$

où $\alpha_x(g) = g \cdot x$ et $\alpha_y(g) = g \cdot y$. Soit Z l'image de G dans $X \times Y$. C'est une sous-variété définie sur k. La projection $p : Z \to X$ est un k-morphisme bijectif, et donc injectif et dominant. Puisqu'on est en caractéristique nulle, c'est un morphisme birationnel et il existe un ouvert non vide U de X tel que la restriction de p à $p^{-1}(U)$ soit un isomorphisme sur U (cf. l'exposé de Sophie, ou Hm 4:7). Mais par G-équivariance de p, on obtient des isomorphismes $p^{-1}(g \cdot U) \to g \cdot U$ pour tout $g \in G$ et donc pour un recouvrement ouvert de X. Il en résulte que p^{-1} est un morphisme. Donc p est un isomorphisme défini sur k. Et $\phi = p_2 \circ p^{-1}$ est le k-morphisme G-équivariant qui convient.

2.4. **Décomposition de Jordan.** On note seulement que si $g \in G_k$ alors la partie unipotente et la partie semi-simple de g sont aussi dans G_k par unicité de la décomposition et d'après le critère de Galois. De plus G_u est une sous-variété fermée définie sur k (puisque qu'elle est donnée par des conditions du type $(g - id)^n = 0$ dans GL_n, voir l'exposé de Joël).

2.5. **Quand k est un corps local.** Si k est un corps local (i.e. localement compact et non discret), pour toute variété V, on dispose sur V_k d'une autre topologie que la topologie de Zariski : la topologie usuelle, ou de Hausdorff, celle induite par la topologie de k. Elle est plus fine que la topologie de Zariski, et les k-morphismes induisent des applications continues sur V_k. De plus la topologie de Hausdorff sur $(V \times W)_k$ est précisément la topologie produit des topologies de Hausdorff de V_k et W_k. Il en résulte que G_k est un groupe topologique (à la différence de G : un groupe algébrique infini n'est jamais un groupe topologique pour la topologie de Zariski, puisque qu'un groupe topologique est séparé si et seulement si ses points sont fermés...). Puisque G est une variété lisse, G_k est une variété k-analytique et donc aussi un groupe de Lie sur k (cf. Sr 2:4:1).

Revenons au problème des orbites de G_k abordé plus haut. On a le résultat suivant, facile mais très important :

Théorème 2.2. (BERNSTEIN-ZELEVINSKI) *On considère un corps local k de caractéristique nulle, un k-groupe G, et une k-action de G sur une k-variété V. Soit $v \in V_k$, alors $G_k \cdot v$ est ouvert et fermé dans $(G \cdot v)_k$ pour la topologie de Hausdorff. En particulier, les orbites de G_k dans V_k sont localement fermées pour la topologie de Hausdorff.*

***Preuve* :** Puisque $G \cdot v$ est localement fermé dans V (pour la topologie de Zariski), $(G \cdot v)_k$ est localement fermé dans V_k pour la topologie de Hausdorff (plus fine). Donc il suffit de montrer que $G_k \cdot v$ est ouvert dans $(G \cdot v)_k$. Puisque $G \cdot v$ est une variété algébrique lisse, $(G \cdot v)_k$ est une variété k-analytique. Soit $\phi : G \to G \cdot v$ $\phi(g) = g \cdot v$. Pour tout $g \in G$ l'application tangente $T_g\phi : T_gG \to T_{g\cdot v}(G \cdot v)$ est bien sûr surjective et définie sur k. Il en résulte que la restriction $\widetilde{\phi} : G_k \to (G \cdot v)_k$ est une application submersive entre variétés k-analytiques. Elle est donc ouverte (cf. Sr 2:3:10). q.e.d.

Ce théorème constitue une différence essentielle entre les actions de groupes algébriques et celles des groupes de Lie quelconques. En effet, les orbites $G_k \cdot v$ (qui sont naturellement des sous-variétés k-analytiques immergées dans V_k) sont en fait de vraies sous-variétés k-analytiques de V_k. D'autre part si H est le stabilisateur de v dans G, on a vu que H est défini sur k. On voit que H_k est le stabilisateur de v dans G_k. Alors, puisque les orbites sont localement fermées, l'application orbitale induit un homéomorphisme (même un difféomorphisme k-analytique) :

$$G_k/H_k \backsimeq G_k \cdot v$$

En particulier, la dynamique des actions de groupes algébriques est beaucoup plus simple que celle des groupes de Lie en général : on a pas de phénomène comme l'enroulement dense d'une orbite autour du tore par exemple. En théorie ergodique, le fait d'avoir des orbites localement fermées équivaut à ce que toute mesure ergodique (i.e. telle que tout borélien invariant soit de mesure nulle ou pleine) soit supportée par une orbite, c'est un pas de plus vers la classification des mesures boréliennes sur V_k invariantes par l'action de G_k.

De plus, si on prend $V = G/H$ muni de sa k-structure quotient, on voit que la variété k-analytique quotient G_k/H_k s'identifie à une sous-variété de $(G/H)_k$. Mais bien sûr, elle peut être strictement incluse dans $(G/H)_k$ comme on l'a déjà remarqué. De même, si $\phi : G \to G'$ est un k-morphisme de k-groupes, alors $\phi(G_k)$ est localement fermé dans G'_k et donc fermé.

Une autre propriété importante des orbites de G_k lorsque k est local, est la finitude du nombre d'orbites incluses dans $(G \cdot v)_k$. (cf. Bl-Sr 6:4 pour la preuve)

Théorème 2.3. *(*Borel-Serre*) On considère un corps local k de caractéristique nulle, un k-groupe G, et une k-action de G sur une k-variété V. Soit $v \in V_k$, alors $(G \cdot v)_k$ est constitué d'un nombre fini d'orbites de G_k.*

Avant de passer aux groupes algébriques réels et complexes, mentionnons une dernière propriété importante des k-groupes.

2.6. **Zariski densité de G_k.** On a le théorème suivant :

Théorème 2.4. *(*Chevalley*) Soit k de caractéristique nulle et G un k-groupe Zariski connexe. Alors G_k est Zariski dense dans G.*

En fait le résultat est encore valable si k est infini et parfait, ou k infini et G réductif. C'est un résultat difficile dont la preuve nécessiterait un exposé entier. Cependant, dans le cas où k est local de caractéristique nulle, un simple argument de dimension prouve le théorème. En effet, l'algèbre de Lie du groupe de Lie G_k s'identifie aux k-points de l'algèbre de Lie de G : $Lie(G_k) = (Lie(G))_k$. Par suite (voir l'exposé de Jérôme et Joël) $\dim_k G_k = \dim G$, où le terme de gauche est la dimension de la variété k-analytique G_k et celui de droite la dimension de la variété algébrique G. Alors, s'il on note $G' = \overline{G_k}$

l'adhérence de Zariski de G_k, G' est un k-sous-groupe de G et $\dim G' = \dim_k(G')_k \geq \dim_k G_k = \dim G$. Puisque G est irréductible, c'est que $G' = G$.

3. Groupes algébriques réels et complexes et groupes de Lie

Dans ce paragraphe, nous prenons $k = \mathbb{R}$ et $K = \mathbb{C}$. Dans ce cas, tout groupe algébrique G sur $\mathbb{C}$ a aussi une structure de groupe de Lie complexe, et si c'est un $\mathbb{R}$-groupe, $G_{\mathbb{R}}$ est un groupe de Lie réel.

Définition 3.1. *On appelle groupe algébrique réel, tout groupe $G_{\mathbb{R}}$ où G est un $\mathbb{R}$-groupe algébrique complexe.*

Il est bien connu (cf. [Sh]) qu'une variété complexe irréductible est connexe pour la topologie de Hausdorff. De même, si V est une $\mathbb{R}$-variété complexe, on sait que $V_{\mathbb{R}}$ a un nombre fini de composantes connexes. Appliqués aux groupes algébriques, ces résultats montrent que la composante neutre d'un groupe algébrique réel est d'indice fini (pas toujours 1, penser à $GL_n(\mathbb{R})$) et que :

Proposition 3.1. *Les composantes irréductibles d'un groupe algébrique complexe coïncident avec ses composantes connexes (pour la topologie usuelle).*

On peut voir directement ce dernier fait de la façon suivante. Il suffit bien sûr de voir que les deux composantes neutres (irréductible et connexe) coïncident, ou encore de montrer que si G est irréductible, il est connexe (la réciproque, vraie, est évidente). Remarquons d'abord que, d'après la classification des groupes commutatifs, l'assertion est claire dans le cas commutatif. Ensuite, considérons des générateurs $\xi_1, ..., \xi_n$ de $Lie(G)$ et les sous-groupes à un paramètre associés $S_1, ..., S_n$. Clairement les adhérences de Zariski $\overline{S_1}, ..., \overline{S_n}$ sont des sous-groupes de G irréductibles et commutatifs, donc connexes. Par suite, le sous-groupe $H =< \overline{S_1}, ..., \overline{S_n} >$ qu'elles engendrent est connexe. Nous allons voir que $G = H$. D'après l'un des tout premiers résultats vu dans l'exposé de Gaëtan (lemme 1), H est un sous-groupe irréductible de G. Par conséquent son algèbre de Lie (qui contient les générateurs ξ_i) coïncide avec celle de G, d'où $\dim H = \dim G$ et donc $G = H$ par irréductibilité de G. q.e.d.

Une question naturelle est celle de savoir quand un groupe de Lie est isomorphe à un groupe algébrique (réel ou complexe). Les groupes de Lie compacts réels ont toujours des orbites compactes (donc localement fermées sauf pathologie), et ils ont toujours un nombre fini de composantes connexes. En fait, ils sont tous algébriques.

Proposition 3.2. *Tout groupe de Lie compact réel est un groupe algébrique réel.*

Preuve **:** Tout d'abord, il faut savoir que tout groupe de Lie compact G est linéaire (c'est-à-dire admet une représentation continue et fidèle dans un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie). C'est une conséquence du théorème de Peter-Weyl, qui, entres autres, dit qu'un groupe de Lie compact réel est isomorphe à un sous-groupe fermé de $U(n, \mathbb{C})$. On peut donc supposer que le groupe G est inclus dans $GL_n(\mathbb{R})$.

Considérons son action dans $M_n(\mathbb{R})$. Les orbites sont compactes. Donc, étant données deux orbites distinctes, on peut trouver une fonction continue valant 1 sur l'une et -1 sur l'autre. En approximant par des polynômes (Stone-Weierstrass), on peut trouver une fonction polynomiale f sur $M_n(\mathbb{R})$ strictement positive sur une orbite et strictement négative sur l'autre. Alors en intégrant par rapport à la probabilité de Haar de G on obtient une fonction polynomiale g

$$g(x) = \int_G f(gx)dg$$

Et g est constante sur chaque orbite avec des constantes différentes pour les deux orbites considérées. Par suite, chaque orbite (et en particulier G) est l'ensemble des zéros d'une famille de fonctions polynomiales sur $M_n(\mathbb{R})$. q.e.d.

En revanche, un groupe de Lie complexe compact et algébrique est fini, car une variété affine infinie n'est jamais compacte pour la topologie usuelle. En fait, il est facile de voir que tout groupe de Lie complexe compact est abélien.

De même, on a la remarque importante suivante :

Proposition 3.3. *Tout groupe de Lie réel connexe, semi-simple et à centre trivial est isomorphe à la composante neutre d'un groupe algébrique réel.*

Preuve **:** Soit H un tel groupe, $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ la complexification de $\mathfrak{h}$. Alors le groupe $G = Aut(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ est un sous-groupe algébrique complexe de $GL(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ défini sur $\mathbb{R}$ (les relations à vérifier sont linéaires, et le groupe est clairement stable par conjugaison). On remarque que les éléments de $Lie(G_{\mathbb{R}}) = Lie(Aut(\mathfrak{h}))$ s'identifient aux dérivations de $\mathfrak{g}$. Mais $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple, donc toutes les dérivations sont intérieures. Par suite, $Lie(Aut(\mathfrak{h})) = Lie(Ad(H))$ où $Ad(H)$ est le sous-groupe de Lie immergé (connexe car H est connexe) dans $Aut(\mathfrak{h})$ image de H par Ad. Il s'ensuit que $Ad(H) = Aut(\mathfrak{h})^0 = G^0_{\mathbb{R}}$ et $Ad(H)$ est un sous-groupe de Lie fermé. Cependant $Ker(Ad) = Z(H) = \{e\}$ car H est connexe. D'où $H \simeq Ad(H) = G^0_{\mathbb{R}}$. q.e.d.

En fait, on montre que tout groupe de Lie semi-simple complexe et connexe est algébrique (et admet une unique structure algébrique). On perçoit l'importance de la théorie des groupes algébriques pour la classification des groupes de Lie.

4. Le théorème de densité de Borel et une application aux formes quadratiques

En guise d'application des considérations ci-dessus, on va donner une preuve du théorème de densité de Borel et montrer comment il permet de traduire un problème de théorie des nombres en une question relevant des systèmes dynamiques...

4.1. **Réseaux.** Soit G un groupe de Lie réel. On note dg une mesure de Haar à droite sur G. Si Γ est un sous-groupe discret de G, la projection $\pi : G \to G/\Gamma$ est un revêtement G-équivariant entre les deux variétés et les différents relèvements d'un petit ouvert de G/Γ dans G ont tous le même volume pour dg. Il existe donc une unique mesure sur G/Γ localement égale à dg : on la note μ.

Définition 4.1. *On appelle réseau de G tout sous-groupe discret Γ de G tel que l'espace homogène G/Γ soit de volume fini pour μ.*

Par exemple, si $G = \mathbb{R}^n$ un sous-groupe discret est un réseau s'il engendre tout l'espace. Aussi, si G/Γ est compact, alors il est clair qu'il est de volume fini pour μ (dans ce cas, on dit que Γ est un réseau uniforme).

Si G possède un réseau, alors G est *unimodulaire*, c'est-à-dire que dg est aussi invariante à gauche. En effet, si τ_g désigne la translation à gauche par g, l'image de dg par τ_g est encore une mesure de Haar à droite, donc est proportionnelle à dg par un coefficient δ_g (qu'on appelle le module de g^{-1}), soit $(\tau_g)_*\mu = \delta_g \mu$. Il suffit alors d'écrire $\mu(G/\Gamma) = (\tau_g)_*\mu(G/\Gamma) = \delta_g \mu(G/\Gamma)$ d'où $\delta_g = 1$ c'est-à-dire que dg et μ sont invariantes à gauche.

En fait, on montre qu'il existe une unique (à un scalaire près) mesure invariante à gauche sur G/Γ : c'est pourquoi on continue d'appeler μ une mesure de Haar sur G/Γ.

4.2. **Le théorème de densité de Borel.** Donnons tout de suite l'énoncé :

Théorème 4.1. *(*Borel*) Soit G un $\mathbb{R}$-groupe irréductible. On suppose que $G_{\mathbb{R}}$ est sans facteur compact (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de $\mathbb{R}$-sous-groupe distingué $G' \neq G$ tel que $G_{\mathbb{R}}/G'_{\mathbb{R}}$ soit compact). Alors tout réseau de $G_{\mathbb{R}}$ est Zariski dense.*

Il est clair que l'hypothèse faite sur G est nécessaire pour obtenir la conclusion souhaitée. De plus, d'après la remarque faite plus haut, on voit que ce théorème s'applique aux groupes de Lie réels semi-simples connexes à centre trivial. Avant de passer à la preuve, on va d'abord montrer un lemme, qui a un intérêt en soi.

Lemme 4.1. *(*Furstenberg*) Soit k un corps local de caractéristique nulle. Soit ν une probabilité sur $\mathbb{P}(k^n)$ et G_ν le stabilisateur de ν pour l'action de $PGL(k^n)$. Alors soit G_v est compact, soit il existe deux sous-variétés linéaires projectives strictes V et W telles que ν soit supportée par $V \cup W$.*

***Preuve*:** G_ν est fermé bien entendu. S'il n'est pas relativement compact, on peut trouver une suite (g_n) dans G_ν qui converge vers g dans $\mathbb{P}(End(k^n))$ non inversible. Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que $g_n(\ker g)$ converge (dans la Grassmannienne) vers un sous-espace non trivial V_0 de k^n. Pour tout $x \in \mathbb{P}(k^n)$, on voit que si $x \in \mathbb{P}(\ker g)$ alors les valeurs d'adhérence de la suite $g_n(x)$ sont toutes dans $V = \mathbb{P}(V_0)$ et si $x \notin \mathbb{P}(\ker g)$ alors $g_n(x) \to g(x) \in \mathbb{P}(Img) = W$. Mézalor, pour toute fonction test ϕ continue à support dans $\mathbb{P}(k^n) - (V \cup W)$ on obtient, par convergence dominée,

$$\int_{\mathbb{P}(k^n)} \phi d\nu = \int_{\mathbb{P}(k^n)} \phi \circ g_n d\nu \to 0$$

Ce qui prouve que le support de ν est inclus dans $V \cup W$. q.e.d.

Ce lemme, a quelques conséquences immédiates, dont voici l'une d'elles

Corollaire 4.1. *$SL_n(k)$ n'est pas moyennable ($n \geq 2$).*

En effet, une probabilité $SL_n(k)$-invariante sur $\mathbb{P}(k^n)$ est nécessairement de support $\mathbb{P}(k^n)$ tout entier car $SL_n(k)$ agit transitivement. De plus $PSL_n(k)$ n'est pas relativement compact.

En fait, un groupe de Lie réel connexe semi-simple et à centre trivial est moyennable si et seulement s'il est compact.

Une autre conséquence du lemme est la preuve du théorème de Borel.

***Preuve du théorème*:** Soit H l'adhérence de Zariski de Γ. C'est un $\mathbb{R}$-sous-groupe de G. D'après le théorème de Chevalley, il existe un $\mathbb{R}$-morphisme $\pi : G \to PGL(\mathbb{C}^n)$ tel que $H = \{g \in G, \pi(g)v = v\}$ pour un certain $v \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$. Comme Γ fixe v, on obtient une probabilité $G_{\mathbb{R}}$-invariante ν sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ en prenant l'image de la probabilité de Haar sur $G_{\mathbb{R}}/\Gamma$. Quitte à passer à une sous-représentation, on peut supposer que $G \cdot v$ engendre $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$. Comme $G_{\mathbb{R}}$ est Zariski dense, $G_{\mathbb{R}} \cdot v$ engendre $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$, si bien que le support de ν (qui contient $G_{\mathbb{R}} \cdot v$ par construction) n'est pas inclus dans la réunion de deux sous-variétés projectives strictes. Donc par le lemme qui précède, $\pi(G_{\mathbb{R}})$ est relativement compact. Mais $\pi(G_{\mathbb{R}})$ est fermé dans $PGL(\mathbb{R}^n)$ (cf. §2.5.) donc compact. On conclut par hypothèse, que $\pi(G_{\mathbb{R}}) = \{e\}$, soit $G_{\mathbb{R}} \subseteq H$, et donc $H = G$. q.e.d.

On remarque que cette preuve convient pour le même énoncé modifié en remplaçant $\mathbb{R}$ par k et $\mathbb{C}$ par K où k est un corps local de caractéristique nulle (résultat dû à Wang).

4.3. **Une application aux formes quadratiques.** Soit q une forme quadratique réelle, indéfinie, non dégénérée et à au moins trois variables. On suppose que q n'est pas proportionnelle à une forme à coefficients entiers. Il a été conjecturé dans les années 30 (Oppenheim) que sous ces conditions, q admettait des valeurs arbitrairement petites aux points entiers, c'est-à-dire

$$\inf \{|q(x)| \mid x \in \mathbb{Z}^n - \{0\}\} = 0$$

La conjecture est restée ouverte pendant presque 60 ans, avant qu'on ne fasse la remarque suivante. Soit $H = SO(q)$ le groupe spécial orthogonal de q. Il agit naturellement sur l'ensemble des réseaux unimodulaires de $\mathbb{R}^n$ (i.e. de covolume 1 pour la mesure de Lebesgue), qui n'est autre que $SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})$. Il suffit de voir qu'il existe une suite $h_k \in H$ telle que chaque terme de la suite de réseaux $(h_k \cdot \mathbb{Z}^n)_k$ ait un point non nul x_k de plus en plus proche de 0, car alors $q(h_k(x_k)) = q(x_k) \underset{k\to\infty}{\to} 0$. En fait, s'il on n'a pas un tel phénomène, c'est que l'orbite de $\mathbb{Z}^n$ par H *reste bornée* dans la variété $SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})$ (effectivement, on ne peut pas extraire de sous-suite convergente). Reste à montrer que c'est impossible. Tout d'abord, si l'orbite est compacte, alors elle est homéomorphe au quotient par le stabilisateur,

$$H \cdot \mathbb{Z}^n \simeq H/(H \cap SL_n(\mathbb{Z}))$$

Et donc, le sous-groupe discret $H \cap SL_n(\mathbb{Z})$ est un réseau uniforme de H. Il est donc Zariski dense par le théorème de densité de Borel (H est clairement algébrique réel, et il n'a pas de facteur compact ; il est même simple si la signature n'est pas $(2,2)$). Ceci entraîne que H est défini sur $\mathbb{Q}$: en effet pour tout $\sigma \in Gal(\mathbb{C}|\mathbb{Q})$ $\sigma(H \cap SL_n(\mathbb{Z})) = H \cap SL_n(\mathbb{Z})$ donc $H = \overline{H \cap SL_n(\mathbb{Z})} \subseteq \sigma(H)$, puis $H = \sigma(H)$ et on applique le critère de Galois. Mais $\sigma(H) = SO(\sigma(q))$, donc $\sigma(q)$ est proportionnelle à q, ce qui entraîne aisément que q est proportionnelle à une forme à coefficients entiers : contradiction.

Reste le cas où l'orbite est bornée mais non compacte. C'est Margulis qui l'a résolu en 1987, mettant un terme définitif au problème initial, en démontrant que toute orbite bornée de H est compacte. Sa preuve, faite en dimension 3 puisque cela suffit pour l'application à la conjecture, est élémentaire mais difficile.

Pour conclure, voici, une fois n'est pas coutume, une petite bibliographie.

[Be] Y. Benoist, polycopié (demandez lui !)

[Bl] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, W.A. Benjamin, Inc, 1969

[Bl-Sr] A. Borel et J.P. Serre, *Théorèmes de finitude en cohomologie galoisienne*, Comm. Math. Helv. 39 (1964) pp. 111-164

[Bu] N. A'Campo et M. Burger, *Réseaux arithmétiques et commensurateur d'après G.A. Margulis*, Invent. Math. 116, 1-25 (1994)

[Fu] H. Furstenberg, *A note on Borel's density theorem*, Proc. AMS 55 (1976) pp 209-212

[Hm] J. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Springer-Verlag, 1975

[Sh] I. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1974

[Sr] J.P. Serre, *Lie Algebras and Lie Groups*, LNM 1500 Springer-Verlag, 1992