ORSAY
N° d'ordre : 5605

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
Centre d'Orsay

THÈSE

présentée pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR EN SCIENCES

Spécialité : Mathématiques

par

Séraphin MEFIRE MBOUAYOUEYOU

Sujet

Couplage éléments finis mixtes-méthodes d'intégrale de frontière pour la résolution des équations de la magnétostatique tridimensionnelle.

Soutenue le 22 décembre 1998 devant la commission d'examen composée de :

MM.	H. Ammari	
	A. Bendali	Rapporteur
	F. Bethuel	
	A. Bossavit	Rapporteur
	J. Laminie	
Mme.	J.E. Roberts	

J'exprime ma très vive gratitude à Monsieur Jacques Laminie, mon directeur de thèse, qui m'a encouragé et soutenu tout au long de ces trois années. Il a fait preuve d'une grande disponibilité et d'une attention constante à mon travail.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur Abderrahmane Bendali pour ses conseils et ses encouragements qui m'ont été extrêmement précieux : nos discussions ont toujours été pour moi une source stimulante de réflexion. Pour avoir rapporté sur cette thèse et pour toute son aide, qu'il soit assuré de ma très profonde reconnaissance.

A Monsieur Alain Bossavit, je souhaite également dire ma sincère gratitude, pour avoir accepté aussi la charge de rapporteur, et pour la disponibilité dont il a fait preuve à cette occasion.

J'exprime ma vive gratitude à Monsieur Fabrice Bethuel qui me fait l'honneur de participer à ce jury.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur Habib Ammari, qui a accepté de participer à ce jury, malgré un emploi du temps que je sais très chargé.

Mes remerciements sont aussi dirigés vers Madame Jean Elisabeth Roberts qui m'a fait l'honneur de se joindre au jury.

J'adresse mes remerciements à tous les membres du laboratoire d'Analyse Numérique et EDP d'Orsay. Merci à Madame Danielle Lemeur pour sa disponibilité et pour l'aide qu'elle m'a apportée dans toutes mes démarches administratives.

Je voudrais remercier toute l'équipe U2R2M d'Orsay et particulièrement Madame Françoise Rioux, Messieurs Bernard Bandelier, Christian Daveau, pour l'intérêt porté à mon travail. Ces remerciements se dirigent aussi vers Monsieur François Alouges.

Je ne saurais oublier de remercier mon compagnon de thèse Eric Simonnet, "L'homme d'Indiana", avec qui j'ai eu des discussions intéressantes tout au long de ces années. Il restera longtemps un ami de confiance.

Je remercie tous les autres compagnons pour l'ambiance agréable qui règne dans les bureaux d'Orsay. Pour leur amitié, merci à Jonathan, Asma Ouldkhal, Hichem Chemka, Narisoa Ramarosy, sans oublier Zhoux dit "Le Dragon", Zhao et mon confrère Khalid Bouras dit "Lion de l'Atlas".

A la famille Maillot, plus particulièrement à Jeanine et Jean-Pierre, j'exprime ma profonde sympathie et reconnaissance pour leur soutien moral. Enfin, il me serait difficile d'oublier Jean-Baptiste dit "Jean Lemod" ainsi que Dominique dit "Monsieur Dom" pour leur amitié et confiance.

A mes parents.

Coupling mixed finite elements and boundary integral methods for solving the three-dimensional magnetostatic equations

Abstract.

This thesis has two aims. The first is concerned with establishing three-dimensional magnetostatic formulations, adapted to the accurate calculation of the physical unknowns (magnetic field and induction). The mathematical and numerical analysis of these formulations is the second aim.

Globally, the proposed formulations are mixed and take into account the non homogeneity of the considered magnetic domain and the homogeneity of the exterior domain. The formulations use a boundary integral method which permits the description of each of the physical entities in the exterior domain. Due to the boundary integral method, two cases must be considered. The first when the magnetic field is coupled by a "connecting" condition with a boundary scalar potential. The second when the magnetic induction is coupled with a boundary vectorial distribution.

For the numerical approximation, the formulations use the mixed finite elements and the boundary finite elements. Nédélec's elements are used for the discretisation of the magnetic field, while the discretisation of the boundary scalar potential is performed using boundary elements. In a similar way, the discretisation of the magnetic induction uses the Raviart-Thomas elements whereas, the boundary edge finite elements are used for the discretisation of the boundary vectorial distribution.

The formulations are implemented in the case of calculation of the magnetic field. The numerical accuracy in the calculation of the magnetic field is observed after a comparison of the obtained results with those of a classical formulation using a scalar potential. Essentially, the accuracy observed concerns the relative and convergence errors obtained from the proposed mixed methods.

Key-words:

Maxwell Equations, Magnetostatic, Boundary Integral Methods, Existence and uniqueness of solutions, Regularity of solutions, Mixed finite elements, Boundary finite elements, Mixed problems, Error estimates, Preconditioning.

Table des matières

Introduction

Les méthodes destinées à la résolution numérique des équations de Maxwell sont nombreuses. Lorsqu'on s'intéresse à ces équations dans le cadre de la magnétostatique, les méthodes de discrétisation par éléments finis sont les plus sollicitées, en particulier celles des "éléments finis mixtes". Une des difficultés rencontrées dans l'analyse numérique de ces équations est due au fait que le système de la magnétostatique est généralement posé dans un domaine non borné, et qu'alors les calculs numériques n'autorisent pas la prise en compte de caractéristiques locales sur un domaine infini. Une manière de résoudre cette difficulté est d'utiliser, dans le cas où le milieu est homogène et isotrope, des formules de représentation intégrale comme dans Bendali [1].

L'évaluation des entités physiques de la magnétostatique tridimensionnelle fait appel à des formulations variationnelles utilisant un potentiel scalaire ou un potentiel-vecteur. Lorsqu'on est motivé par la détermination de l'induction magnétique, la prise en compte d'un problème en potentiel scalaire peut être adéquate dans certains contextes physiques. Toutefois, la détermination avec plus de précision numérique sollicite auparavant une formulation de type col où, outre l'induction magnétique, on distingue une inconnue supplémentaire représentée par une fonction scalaire ; celle-ci visant à mieux renforcer les propriétés physiques de l'induction magnétique. Une telle formulation, sans imposer de conditions au bord de la région magnétique sollicitée, est proposée dans Bossavit [2]. On trouve aussi dans la littérature, une formulation semblable avec des conditions au bord, établie par Stenberg et Trouvé [3]. Dans le cas de la détermination du champ magnétique, plusieurs situations sont envisageables. Comme en IRM, le recours à une formulation variationnelle où le champ est décrit par un potentiel scalaire peut être fait [4]. On peut également comme dans [5], [6], travailler avec une formulation où le champ magnétique est directement considéré comme inconnue ; cette formulation s'établit par une méthode de pénalisation et impose un manque de souplesse dans le calcul effectif du champ magnétique, directement lié au choix du paramètre de pénalisation. Le choix de ce paramètre, fonction des grandeurs caractéristiques du domaine, est encore plus compliqué lorsque la non-linéarité est prise en compte, et mérite alors un choix numérique attentif, sensible à la perméabilité magnétique relative du domaine. Notre but étant de déterminer les grandeurs physiques avec précision, nous avons eu recours à des formulations qui utilisent le champ magnétique (ou l'induction magnétique) comme inconnue principale, et un potentiel-vecteur (ou un potentiel scalaire) comme inconnue auxiliaire.

Le travail que nous présentons repose sur l'élaboration, l'étude mathématique et numérique des problèmes de type col, formulés en champ et induction magnétique, et adaptables aux modèles les plus généraux de la magnétostatique tridimensionnelle [7], [8]. Nous tenons compte de la non-homogénéité du domaine borné et faisons appel à une méthode d'intégrale de frontière pour la description de chaque grandeur physique dans le domaine infini.

Le plan de ce travail est le suivant.

Dans le chapitre introductif, nous faisons un bref rappel sur les équations de la magnétostatique tridimensionnelle et sur quelques définitions, pour ensuite introduire un problème modèle.

Le chapitre 1 est entamé par l'étude d'un problème mixte dont l'inconnue principale est le champ magnétique de réaction dans l'espace tridimensionnel. Nous y expliquons l'intérêt de faire appel à une approche d'intégrale de frontière, qui permet de considérer le champ magnétique de réaction uniquement dans la région magnétique, couplé toutefois, par une condition de raccord sur la frontière de cette région, avec un potentiel scalaire. Le couple ainsi formé permet, conformément à la méthode d'intégrale de frontière, de reconstituer le champ magnétique de réaction dans l'espace entier. Il désigne l'inconnue principale du second problème mixte introduit et étudié par la suite. Avec essentiellement des arguments d'ordre numérique, nous justifions la nécessité de la reformulation du précédent problème en faisant intervenir un potentiel-vecteur de courant. Nous étudions ensuite un troisième problème avec la même inconnue principale que précédemment et un potentiel-vecteur comme seconde inconnue. La fin du chapitre est réservée à l'étude de la régularité du champ magnétique de réaction, alors déterminé en milieu hétérogène.

Nous abordons le chapitre 2 par l'approximation par éléments finis mixtes des problèmes continus introduits au chapitre 1. Nous avons recours aux éléments finis nodaux de surface [1], d'arêtes [9] et de facettes [10]. Le champ magnétique est discrétisé dans l'espace des éléments finis d'arêtes, tandis que le potentiel scalaire couplé avec celui-ci est discrétisé dans l'espace des éléments finis nodaux de surface. Ce choix d'éléments finis, essentiel pour le raccordement à la frontière, est justifié dans la partie concernant la description du champ magnétique. Le premier problème mixte introduit est celui qui sollicite à la fois les éléments finis cités précédemment et les éléments finis de facettes ; nous donnons ensuite une estimation d'erreurs portant sur le champ magnétique de réaction et le potentiel scalaire. Comme dans le cas continu, nous justifions l'introduction et l'étude d'un second problème mixte utilisant un potentiel-vecteur de courant, et faisant intervenir uniquement les espaces des éléments finis nodaux de surface et d'arêtes. Dans la perspective d'une mise en œuvre numérique, un problème discret à résoudre au sens des moindres carrés est considéré ; le champ magnétique couplé au potentiel scalaire discrétisé étant toujours l'inconnue principale. Les nombreux avantages au point de vue numérique d'un tel problème sont ensuite constatés.

Nous nous intéressons au chapitre 3, à la mise en œuvre numérique de deux problèmes décrits en champ magnétique de réaction. Le premier est celui qui doit être considéré au sens des moindres carrés et le second est un problème mixte justifiant d'une commodité dans la mise en œuvre numérique effective. Après avoir présenté la discrétisation de l'opérateur d'intégrale de frontière issu du chapitre 1, nous associons un système matriciel à chacun de ces problèmes alors considéré en milieu hétérogène. En envisageant à la fois des méthodes directes et itératives, nous présentons dans le dernier cas un préconditionneur. Les algorithmes de résolution numérique adoptés sont détaillés et les choix de ceux-ci ensuite commentés. A la fin de ce chapitre, nous décrivons et commentons quelques résultats numériques.

Le chapitre 4 est consacré à la détermination du champ magnétique de réaction lorsque celui-ci est représenté par un potentiel scalaire. Avec le problème modèle présenté au chapitre 0, nous formulons un problème variationnel dont l'inconnue est un potentiel scalaire dans l'espace tridimensionnel. La méthode d'intégrale de frontière présentée au chapitre 1 permet de considérer ce potentiel uniquement dans la région magnétique, couplé toutefois, avec une fonction surfacique. Le couple ainsi formé représente l'inconnue de la formulation établie à partir du problème précédent. La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à la discrétisation de cette formulation, en utilisant seulement les espaces des éléments finis nodaux. Nous terminons par la mise en œuvre numérique de la formulation, alors considérée en milieu hétérogène. Les résultats numériques obtenus ici sont comparés avec ceux présentés au chapitre 3.

Dans le chapitre 5, nous abordons le cas de la détermination de l'induction magnétique, avec une démarche semblable à celle du chapitre 1. Nous commençons par formuler un problème mixte dont l'inconnue principale est l'induction magnétique dans l'espace tridimensionnel. Nous présentons ensuite une approche d'intégrale de frontière qui permet de considérer l'induction magnétique uniquement dans la région magnétique, couplée toutefois, par une condition de raccordement sur la frontière, avec une distribution vectorielle. Les propriétés de l'opérateur d'intégrale de frontière liant l'induction à cette distribution sont alors présentées. C'est avec cet opérateur que nous formulons un second problème mixte équivalent au précédent et dont l'inconnue principale est le couple constitué de l'induction et de la distribution vectorielle surfacique. Nous concluons ce chapitre par l'analyse de ce problème.

Au chapitre 6 nous nous intéressons à la discrétisation du problème en induction magnétique, en utilisant les éléments finis de facettes, de volumes (cf. e.g. [2]) et de surface (cf. [11]) ; l'induction magnétique étant discrétisée dans l'espace des éléments finis de facettes et la distribution vectorielle dans celui des éléments finis de surface. Un problème mixte destiné au calcul de l'induction magnétique est alors introduit puis étudié. Nous présentons pour terminer, la discrétisation de l'opérateur d'intégrale de frontière issu du chapitre 5, par éléments finis de surface.

Chapitre 0

Modélisation en magnétostatique tridimensionnelle

Nous commençons par rappeler certaines notations et définitions utiles, et formulons un problème modèle de magnétostatique tridimensionnelle.

0.1 Généralités

Les problèmes en électromagnétisme classique sont de manière générale gouvernés par les équations de Maxwell. Celles-ci s'écrivent :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} b &= 0\,, && (0.1)\\ \operatorname{rot} e &= -\frac{\partial b}{\partial t}\,, && (0.2)\\ \operatorname{div} d &= \varrho\,, && (0.3)\\ \operatorname{rot} h &= j + \frac{\partial d}{\partial t}\,, && (0.4) \end{aligned}$$

les lois de comportement étant décrites par les relations

$$\begin{aligned} d &= \varepsilon\, e\,, && (0.5)\\ b &= \mu\, h\,. && (0.6) \end{aligned}$$

Avec les sources j et ϱ respectivement appelées[1] *densité de courant* et *densité de charge*, et des conditions initiales, le système $(0.1) - (0.6)$ permet de déterminer h, b, e et d respectivement appelés *champ magnétique*, *induction magnétique*, *champ électrique* et *induction électrique*. L'ensemble de ces champs de vecteurs est essentiellement produit par des courants et des charges. Précisons que les paramètres physiques μ et ε ne sont pas des constantes, mais des fonctions de la position et du milieu où peuvent être considérées

1. Aussi dénommées respectivement : distribution de courant et distribution de charge.

les équations (0.1) – (0.4). Dans le vide, μ et ε sont des constantes respectivement appelées *perméabilité magnétique du vide*[2] égale à μ_0 et *constante diélectrique du vide* $\varepsilon_0 = 1/(c^2\mu_0)$, où c est la vitesse de la lumière. A partir du système (0.3) – (0.4), nous avons la relation suivante, aussi connue sous le nom d'*équation de conservation de la charge* :

$$\operatorname{div} j + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0\,.$$

Il est connu [12], [13], que le système (0.1) – (0.4) se découple en des problèmes indépendants lorsque les sources considérées ne dépendent pas du temps.

0.2 Equations de la magnétostatique

Très souvent dans les applications d'électrotechnique, les dimensions et les constantes de temps des systèmes et des phénomènes étudiés sont telles que, dans tout système d'unités adapté à l'étude, la vitesse de la lumière c est numériquement très grande. Il est alors naturel de souhaiter la considérer comme quantité infinie et de faire un passage à la limite par rapport à c dans le système de Maxwell ; ce qui revient à faire tendre vers zéro l'un des paramètres μ et ε, étant donné que $c = 1/(\mu\,\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$. En fait, le choix du paramètre destiné à tendre vers zéro dépend essentiellement de la nature des sources en présence.

Nous nous situons dans le cadre où existent des densités de charge faibles ou tout simplement nulles, et de fortes densités de courant indépendantes du temps. Ainsi, nous adoptons dans ce contexte : $\varepsilon = 0$. Le système (0.1) – (0.4) se réduit alors à une famille de problèmes où les champs de vecteurs b et h à déterminer ne dépendent plus du temps. Les équations sont :

$$\operatorname{div} b = 0\,, \tag{0.7}$$

$$\operatorname{rot} h = j\,, \tag{0.8}$$

avec la loi de comportement :

$$b = \mu\, h\,. \tag{0.9}$$

Dans la formule (0.8), la densité de courant j est une donnée qui satisfait :

$$\operatorname{div} j = 0\,. \tag{0.10}$$

Comme nous pouvons le constater, dans le système de la magnétostatique, seul l'aspect "magnétique" du système de Maxwell représenté par les entités physiques h et b est conservé, l'aspect "électrique" étant ignoré dans ce modèle. Notons par ailleurs que le coefficient μ apparaissant dans (0.9) est une fonction de la position et peut même dépendre localement de h.

2. Dans le système d'unités MKSA : $\mu_0 = 4\pi\,10^{-7}$ et c la vitesse de la lumière environ $3\,10^8$.

Souvent en pratique, on ne dispose pas d'une source de courant donnée dans tout l'espace, mais uniquement dans une région précise. Considérons un inducteur assimilé à un ouvert borné Ω^s de $\mathbb{R}^3$, de perméabilité magnétique égale à μ_0, et parcouru par une densité de courant j^s indépendante du temps. En imposant à j^s de vérifier la relation (0.10), et une condition au bord de Ω^s, il est possible de déterminer de manière unique le champ magnétique régant dans Ω^s. Ce champ de vecteurs noté[3] h^s vérifie :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} h^s &= j^s \quad \text{dans} \quad \Omega^s \,, \\ \operatorname{div} h^s &= 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3 \,. \end{aligned} \tag{0.11}$$

En fait, pour j^s suffisamment régulier, le champ magnétique source h^s se calcule (de façon directe) en tout point de $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega^s$ via la formule de Biot-Savart [14] :

$$h^s(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega^s} \frac{j^s(\tau) \wedge (x - \tau)}{|x - \tau|^3} d\tau \ ,$$

où $|x|$ désigne la norme euclidienne de $x = (x_1, x_2, x_3)$, dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

La détermination du champ source ne pose donc aucune difficulté lorsqu'on dispose d'une source de courant donnée comme ci-dessus. On note par $b^s = \mu_0 \, h^s$ l'*induction magnétique source*.

0.3 Modèle physique

Nous désignons par Ω un milieu magnétique, assimilé à un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, par $\Omega' = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ le milieu extérieur ($\Omega^s \subset \Omega'$), considéré, de perméabilité magnétique constante égale à celle du vide. Si Ω' est homogène, tel n'est pas le cas de Ω. C'est par exemple le cas où Ω est physiquement constitué de matériaux tels que des dia-magnétiques ($\mu < \mu_0$), para-magnétiques ($\mu > \mu_0$), ou des ferro-magnétiques ($\mu \equiv \mu(|h|)$).

Avec Ω en présence de Ω^s, il y a création d'un champ magnétique aussi appelé *champ magnétique de réaction*; celle-ci étant due à l'aimantation du milieu Ω. Le champ physique (mesurable) h aussi appelé *champ magnétique total* s'écrit :

$$h = H + h^s \ \text{ dans } \ \mathbb{R}^3 \,,$$

où H est le champ magnétique de réaction.

La loi de comportement (0.9) devient :

$$b = \begin{cases} \mu_0 \, h & \text{dans} \quad \Omega' \,, \\ \mu \, h & \text{dans} \quad \Omega \,, \end{cases}$$

3. 's' pour "source".

où μ désigne une fonction scalaire dépendant de la position. Ceci conduit à un modèle assez souple pour rendre compte de phénomènes propres aux matériaux para-magnétiques, par exemple. Pour simplifier, il est admis qu'aucune source de courant autre que j^s n'existe dans l'espace, et j^s sera dorénavant noté j.

Nous serons motivés dans la première partie de ce travail par la détermination d'un champ de vecteurs H dans $\mathbb{R}^3$, s'annulant à l'infini et qui satisfait :

$$\operatorname{div} \mu\,(H + h^s) = 0\,, \tag{0.12}$$

$$\operatorname{rot} H = 0\,. \tag{0.13}$$

Pour en terminer avec ce chapitre, signalons que les matériaux considérés seront aussi caractérisés par leur *perméabilité magnétique relative*[4] $\mu_r = \dfrac{\mu}{\mu_0}$ et par leur réluctance $\nu = \dfrac{1}{\mu}$; celle du vide étant $\nu_0 = \dfrac{1}{\mu_0}$.

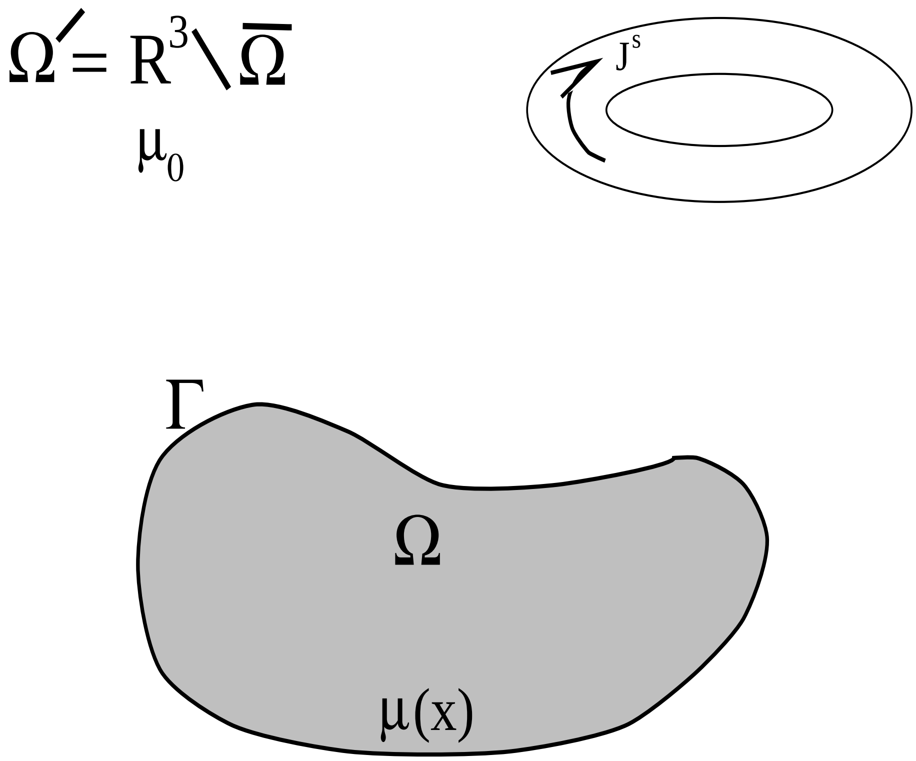


FIG. 1 – *Le problème modélisé*

4. Certains auteurs utilisent plutôt la susceptibilité magnétique dont la formule propre aux para-magnétiques est $\frac{\mu}{\mu_0} - 1$; celle réservée aux dia-magnétiques étant $1 - \frac{\mu}{\mu_0}$. Noter que la perméabilité magnétique relative et la susceptibilité magnétique sont deux quantités sans unités.

Chapitre 1

Problèmes formulés en champ magnétique

Nous nous intéressons tout au long de ce chapitre à l'étude des problèmes variationnels de type col issus du modèle physique présenté dans le chapitre précédent. Cette étude s'appuyera sur une approche spécifique des problèmes de type col et sur une méthode d'intégrale de frontière.

1.1 Introduction

Nous rappelons d'abord l'approche relative à l'étude des problèmes de type col (cf. [15], [16]), puis, fixons quelques notations.

1.1.1 Un principe variationnel abstrait

Soient X et M deux espaces de Hilbert munis respectivement des normes $||\ .\ ||_X$ et $||\ .\ ||_M$. Soient X' et M' leurs duaux, équipés de normes duales $||\ .\ ||_{X'}$ et $||\ .\ ||_{M'}$. Nous noterons par $<\ .\ ,\ .\ >$, le crochet de dualité opérant entre les espaces X et X' ou encore M et M'.

Soient

$$a(\,.\,,.\,)\,:\,X\times X\longrightarrow \mathbb{R},$$

une forme bilinéaire continue et

$$b(\,.\,,.\,)\,:\,X\times M\longrightarrow \mathbb{R},$$

une autre à laquelle nous associons l'opérateur $B\in\mathcal{L}(X;M')$ défini par

$$<B\,v,\eta> =\ b(v,\eta)\ \ \forall\, v\in X,\ \ \forall\,\eta\in M.$$

Considérons le problème variationnel suivant.

Pour l et χ donnés dans X' et M', déterminer $(u,\lambda) \in X \times M$ tel que

$$a(u,v) + b(v,\lambda) = \langle l, v \rangle \quad \forall\, v \in X\,, \tag{1.1}$$

$$b(u,\eta) = \langle \chi, \eta \rangle \quad \forall\, \eta \in M\,. \tag{1.2}$$

Avec χ dans M', définissons le sous-espace

$$V(\chi) = \{v \in X;\ B\,v = \chi\}\,,$$

fermé dans X, et posons

$$V = V(0) = \ker(B)\,.$$

Alors, on a :

Théorème 1.1.1 *Supposons que la forme bilinéaire a soit $V-$elliptique : il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$a(u,u) \geq \alpha\, ||u||_X^2 \quad \forall\, u \in V.$$

En outre, admettons que l'estimation dite "condition de Babuška-Brezzi", soit vérifiée : il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$\inf_{\eta \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v,\eta)}{||v||_X ||\eta||_M} \geq \beta\,.$$

Alors, le problème $(1.1)-(1.2)$ possède une unique solution (u,λ) dans l'espace $X \times M$.

Considérons par ailleurs le problème intermédiaire suivant.

Pour l donné dans X', déterminer u dans $V(\chi)$ tel que

$$a(u,v) = \langle l, v \rangle \quad \forall\, v \in V\,. \tag{1.3}$$

On a aussi :

Corollaire 1.1.1 *Si (u,λ) est solution du problème $(1.1)-(1.2)$, alors u est solution du problème (1.3).*

1.1.2 Quelques notations

Il s'agit ici d'adapter un cadre d'espaces fonctionnels approprié au modèle physique $(0.12)-(0.13)$.

Soient la source de courant

$$j \in H(\mathrm{div}^{\,0}\,;\, \mathbb{R}^3) = \{u \in (L^2(\mathbb{R}^3))^3\,;\, \mathrm{div}\, u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3\}\,,$$

et le champ magnétique source

$$h^s \in H(\mathrm{div}^{\,0}\,;\, \mathbb{R}^3) \cap H(\mathrm{rot}\,;\, \mathbb{R}^3)\,, \tag{1.4}$$

où

$$H(\mathrm{rot}\,;\,\mathbb{R}^3) = \{u \in (L^2(\mathbb{R}^3))^3 \ ;\ \mathrm{rot}\, u \in (L^2(\mathbb{R}^3))^3\}$$

est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\|u\|_{H(\mathrm{rot}\,;\,\mathbb{R}^3)} = \sqrt{\|u\|^2_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3} + \|\,\mathrm{rot}\, u\|^2_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3}}\,.$$

Au même titre que j, nous supposerons désormais que le champ source est une donnée.

Soit également Ω, le milieu magnétique assimilé à un ouvert borné connexe, simplement connexe et Lipschitzien-continu de frontière Γ connexe. La normale sortante sur celle-ci est notée n. Le milieu extérieur $\Omega' = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ est un ouvert connexe et simplement connexe. Ω physiquement constitué de matériaux de type para-magnétique, nous admettrons que, la perméabilité magnétique μ est une fonction de l'espace

$$\{\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^3)\ ;\ \mu(x) \geq \mu_0\ \forall\, x \in \Omega\ ,\ \mu(x) = \mu_0\ \forall\, x \in \Omega'\}\,.$$

Nous considérerons :

$$\mu_0 \ \leq\ \mu\ \leq\ ||\mu||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \ =\ \mu^\star\,. \tag{1.5}$$

Pour μ et un champ de vecteurs h^s tels que ci-dessus, nous cherchons à déterminer un champ de vecteurs H s'annulant à l'infini et satisfaisant dans $\mathbb{R}^3$ le système $(0.12) - (0.13)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,\mu\,(H + h^s) &= 0\,, \\ \mathrm{rot}\, H &= 0\,. \end{aligned}$$

Même si H ne représente pas une entité physique, on détermine partout le champ magnétique total[1] en connaissant en outre h^s. C'est aussi le cas avec l'induction magnétique, dont la détermination est possible via la loi de comportement

$$b = \mu\,(H + h^s)\,.$$

Nous avons opté pour la détermination du champ magnétique de réaction, uniquement dans le but de mieux mettre en évidence les résultats qui seront présentés. L'essentiel de ces résultats demeure inchangé dans le cas de la détermination du champ magnétique total.

1.2 Problème mixte dans $\mathbb{R}^3$

Pour la détermination d'un champ de vecteurs pouvant vérifier $(0.12) - (0.13)$, il est encore nécessaire d'introduire certains espaces fonctionnels adéquats. D'une manière générale, nous désignerons par $(\ .\ ,\ .\ )_X$ le produit scalaire associé à un espace de Hilbert X et $\|\ .\ \|_X$ la norme qui en découle. Aussi, $\tilde{u}$ désignera le prolongé par 0 à $\mathbb{R}^3$, d'une fonction vectorielle (ou scalaire) u de Ω.

1. Somme du champ source et du champ magnétique de réaction.

Posons

$$\mathcal{H} = \{u \in H(\mathrm{rot}\,;\, \mathbb{R}^3)\,;\ \ \mathrm{rot}\, u = 0 \ \text{ dans } \ \Omega'\,,\ \mathrm{div}\, u = 0 \ \text{ dans } \ \Omega'\}$$

l'espace de Hilbert équipé du produit scalaire

$$(u, v)_{\mathcal{H}} = (u, v)_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3} + (\mathrm{rot}\, u, \mathrm{rot}\, v)_{(L^2(\Omega))^3}$$

et de la norme qui en découle

$$||u||^2_{\mathcal{H}} = (u, u)_{\mathcal{H}}\,.$$

Soit

$$H(\mathrm{div}\ ;\ \Omega) = \{u \in (L^2(\Omega))^3\ ;\ \mathrm{div}\, u \in L^2(\Omega)\}\,,$$

l'espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)} = (u, v)_{(L^2(\Omega))^3} + (\mathrm{div}\, u, \mathrm{div}\, v)_{L^2(\Omega)}$$

et de la norme associée

$$||u||^2_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)} = (u, u)_{H(\mathrm{div}\,;\,\Omega)}\,.$$

Notons :

$$H(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Omega) = \{u \in (L^2(\Omega))^3\ ;\ \mathrm{div}\, u = 0 \text{ dans } \Omega\}$$

et considérons le sous-espace fermé dans $(L^2(\Omega))^3$:

$$H_0(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Omega) = \{u \in H(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Omega)\ ;\ u \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

équipé de la norme $||\ .\ ||_{(L^2(\Omega))^3}$.

L'appartenance à $\mathcal{H}$ traite certaines propriétés physiques qui doivent être satisfaites par le champ magnétique de réaction. Cet espace est formé de champs de vecteurs à composante tangentielle continue et de champs de réaction admissibles. Les termes $(u, u)_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3}$, $(\mathrm{rot}\, u, \mathrm{rot}\, u)_{(L^2(\Omega))^3}$ représentent des énergies [17], [13]. Il est ainsi raisonnable de chercher précisément le champ magnétique de réaction dans un tel espace, dont une autre caractérisation des éléments est faite dans la

Remarque 1.2.1 *Pour tout u dans $\mathcal{H}$,* $\mathrm{rot}\, u$ *est un élément de $H(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\mathbb{R}^3)$ et est par conséquent, un champ de vecteurs de saut $[\mathrm{rot}\, u \cdot n]_\Gamma = 0$. Par ailleurs, comme par définition* $\mathrm{rot}\, u = 0$ *dans Ω', il suit que* $(\mathrm{rot}\, u)|_\Omega$ *est un élément de $H_0(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Omega)$.*

Introduisons maintenant l'adhérence de l'espace fonctionnel $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ pour la norme :

$$\|\psi\| \ = \ \|\,\mathrm{grad}\,\psi\|_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3}\,,$$

et notons par $W^1(\mathbb{R}^3)$ cet espace de Hilbert. D'après [18], nous avons aussi :

$$W^1(\mathbb{R}^3) \ = \ \{\psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)\,;\, (1 + r^2)^{\frac{|\alpha|-1}{2}}\, \partial^\alpha \psi \ \in L^2(\mathbb{R}^3)\ ;\ |\alpha| \le 1\ \}\,,$$

avec $r = |x|$.

De l'équation (0.12), nous déduisons l'existence d'un champ de vecteurs v dans $(W^1(\mathbb{R}^3))^3$, tel que

$$\begin{aligned} \mu\,(H + h^s) &= \operatorname{rot} v\,, \\ \operatorname{div} v &= 0\,. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Alors, avec la première relation de (1.6),

$$(\mu H, h')_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3} - (\operatorname{rot} h', v)_{(L^2(\Omega))^3} = -(\mu h^s, h')_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3} \quad \forall\, h' \in \mathcal{H}\,,$$

et d'après (0.13),

$$(\operatorname{rot} H, v')_{(L^2(\Omega))^3} = 0 \quad \forall\, v' \in H_0(\operatorname{div}^0; \Omega)\,.$$

Avec ces équations variationnelles, nous formulons le problème suivant.

Pour h^s et μ vérifiant (1.4) et (1.5), trouver un couple (H, v) dans $\mathcal{H} \times H_0(\operatorname{div}^0; \Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} (\mu\, H, h')_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3} &- (\operatorname{rot} h', v)_{(L^2(\Omega))^3} &= -(\mu\, h^s, h')_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3} \quad &\forall\, h' \in \mathcal{H}\,, \\ &- (\operatorname{rot} H, v')_{(L^2(\Omega))^3} &= 0 \quad &\forall\, v' \in H_0(\operatorname{div}^0; \Omega)\,. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Le problème (1.7) dont le champ magnétique de réaction est désigné comme inconnue principale, est selon son établissement, un problème mixte dérivant du modèle physique (0.12) − (0.13). L'inconnue auxiliaire v de (1.7), qui manque de signification physique[2] précise, jouera un important rôle dans la détermination du champ magnétique de réaction. Pour l'étude de ce problème, nous utilisons le formalisme introduit au § 1.1.1. Posons,

$$a(u, v) = (\mu\, u, v)_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3}\,, \tag{1.8}$$

la forme bilinéaire continue sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$,

$$b(u, v) = -\,(\operatorname{rot} u, v)_{(L^2(\Omega))^3}\,, \tag{1.9}$$

celle continue sur $\mathcal{H} \times H_0(\operatorname{div}^0; \Omega)$, et notons que, l'application $u \in \mathcal{H} \longrightarrow (\mu\, h^s, u)_{(L^2(\Omega))^3}$ est continue.

Considérons le sous-espace fermé dans $\mathcal{H}$, noté

$$V = \{u \in \mathcal{H}\,;\ b(u, v) = 0 \ \ \forall\, v \in H_0(\operatorname{div}^0; \Omega)\}\,.$$

Remarque 1.2.2 *Il suit avec la remarque* 1.2.1 *que ce sous-espace s'écrit encore,*

$$V = \{u \in \mathcal{H}\,;\ \operatorname{rot} u = 0 \ \ \textit{dans}\ \ \mathbb{R}^3\}\,.$$

Il en découle le

Lemme 1.2.1 *La forme bilinéaire continue* a *est* $V-$*elliptique.*

2. Elle n'intervient pas d'ailleurs dans le modèle physique.

1.2.1 Condition de Babuška-Brezzi

Soit

$$H(\mathrm{rot}\,;\Omega) = \{u \in (L^2(\Omega))^3\ ;\ \mathrm{rot}\, u \in (L^2(\Omega))^3\}\,,$$

l'espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H(\mathrm{rot}\,;\Omega)} \;=\; (u,v)_{(L^2(\Omega))^3} + (\mathrm{rot}\, u, \mathrm{rot}\, v)_{(L^2(\Omega))^3}$$

et de la norme qui en découle.

Introduisons l'espace (cf. [19]),

$$W^1(\Omega) = \{u \in (H^1(\Omega))^3\ ;\ \mathrm{div}\, u = 0 \ \text{ dans } \ \Omega,\ u \wedge n = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma\}\,,$$

muni de la norme

$$||u||_{W^1(\Omega)} \;=\; ||\,\mathrm{rot}\, u||_{(L^2(\Omega))^3}\,,$$

aussi équivalente aux normes $||\,.\,||_{(H^1(\Omega))^3}$ et $||\,.\,||_{H(\mathrm{rot}\,;\Omega)}$.

Les propriétés du domaine Ω permettent d'énoncer (cf. [20], [19]) le

Théorème 1.2.1 *Pour tout élément v de $H_0(\mathrm{div}^0\,;\Omega)$, il existe un unique champ de vecteurs u dans $W^1(\Omega)$, tel que*

$$\mathrm{rot}\, u \;=\; v\,.$$

En outre, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$||u||_{H(\mathrm{rot}\,;\Omega)} \;\leq\; C\,||v||_{(L^2(\Omega))^3}\,.$$

Ceci permet d'établir l'estimation donnée dans le

Lemme 1.2.2 *Il existe une constante β strictement positive telle que :*

$$\sup_{u \in \mathcal{H}} \frac{b(u,v)}{||u||_{\mathcal{H}}} \;\geq\; \beta\,||v||_{(L^2(\Omega))^3} \quad \forall\, v \in H_0(\mathrm{div}^{\,0}\,;\Omega)\,.$$

Preuve. Soit v un élément de $H_0(\mathrm{div}^0\,;\Omega)$. Avec le théorème 1.2.1, considérons, un potentiel-vecteur u dans $(H^1(\Omega))^3$ satisfaisant

$$\mathrm{rot}\, u \;=\; v \ \text{ dans } \ \Omega\,, \tag{1.10}$$

$$\mathrm{div}\, u \;=\; 0 \ \text{ dans } \ \Omega\,, \tag{1.11}$$

$$u \wedge n \;=\; 0 \ \text{ sur } \ \Gamma\,, \tag{1.12}$$

et tel que :

$$||u||_{H(\mathrm{rot}\,;\Omega)} \;\leq\; C\,||v||_{(L^2(\Omega))^3}\,, \tag{1.13}$$

où C est une constante strictement positive. En posant

$$\underset{\sim}{u} \;=\; \begin{cases} -u & \text{dans} \quad \Omega\,, \\ 0 & \text{dans} \quad \Omega', \end{cases}$$

on détermine, compte tenu de (1.12), un champ de vecteurs de l'espace $H(\text{rot}\,;\mathbb{R}^3)$. Celui-ci vérifie en outre dans Ω': rot $\underset{\sim}{u} = 0$ et div $\underset{\sim}{u} = 0$. Par conséquent, $\underset{\sim}{u}$ est un élément de $\mathcal{H}$ tel que

$$||\,\underset{\sim}{u}||_{\mathcal{H}} = ||u||_{H(\text{rot}\,;\Omega)}\,. \tag{1.14}$$

Avec (1.10), nous avons

$$b(\,\underset{\sim}{u}, v) \;=\; (\text{rot}\, u, v)_{(L^2(\Omega))^3} \;=\; ||v||^2_{(L^2(\Omega))^3}\ ,$$

et en tenant compte de (1.13),

$$b(\,\underset{\sim}{u}, v) \;\geq\; \frac{1}{C}\,||u||_{H(\text{rot}\,;\Omega)}\,||v||_{(L^2(\Omega))^3}\ .$$

La relation (1.14) permet alors d'écrire

$$b(\,\underset{\sim}{u}, v) \;\geq\; \frac{1}{C}\,||\,\underset{\sim}{u}||_{\mathcal{H}}\,||v||_{(L^2(\Omega))^3}\ ,$$

d'où l'estimation. □

Nous avons le

Théorème 1.2.2

i) Le problème (1.7) *admet une unique solution* (H, v) *dans l'espace* $\mathcal{H} \times H_0(\text{div}^0\,;\,\Omega)$ *;*

ii) H *vérifie les relations* $(0.12) - (0.13)$ *dans le domaine* Ω *et en dehors ;*

iii) enfin, il existe une constante $C(\mu_0, \mu^\star) > 0$ *telle que*

$$||H||_{\mathcal{H}} + ||v||_{(L^2(\Omega))^3} \;\leq\; C(\mu_0, \mu^\star)\,||h^s||_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3}\,.$$

Preuve.

i) D'après le formalisme du § 1.1.1, les lemmes 1.2.1 et 1.2.2 montrent que, le problème (1.7) possède une unique solution (H, v) dans $\mathcal{H} \times H_0(\text{div}^0\,;\,\Omega)$.

ii) Il est immédiat, avec le corollaire 1.1.1, que le champ de vecteurs H est dans l'espace V ; et par conséquent, H satisfait (0.13).

Les relations (1.4), (1.5) et l'appartenance de H à V montrent en outre que H vérifie (0.12) en dehors de Ω. Aussi, avec la première équation variationnelle de (1.7), où on pose $h' = \text{grad}\,\tilde{\psi}$; $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, il est immédiat que H vérifie la même relation dans le domaine.

iii) Dans la deuxième équation variationnelle de (1.7), faisons le choix[3] : $v' = \operatorname{rot} H$, qui permet de constater que

$$||\operatorname{rot} H||_{(L^2(\Omega))^3} = 0\,. \tag{1.15}$$

En posant $h' = H$ dans la première équation variationnelle de (1.7), nous obtenons la relation

$$(\mu\, H, H)_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3} = (\operatorname{rot} H, v)_{(L^2(\Omega))^3} - (\mu\, h^s, H)_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3}\,,$$

qui entraîne avec (1.5) et (1.15) :

$$||H||_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3} \leq \frac{\mu^\star}{\mu_0}\,||h^s||_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3}\,.$$

D'où,

$$||H||_{\mathcal{H}} \leq \frac{\mu^\star}{\mu_0}\,||h^s||_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3}\,. \tag{1.16}$$

Par ailleurs, étant donné que v est élément de $H_0(\operatorname{div}^0; \Omega)$, considérons (comme dans la preuve du lemme 1.2.2) le champ de vecteurs u dans $(H^1(\Omega))^3$ satisfaisant $(1.10) - (1.13)$. Il en découle que le champ de vecteurs $\tilde{u}$ est élément de $\mathcal{H}$ et tel que

$$\operatorname{rot} \tilde{u} = v \ \text{ dans } \ \Omega\,, \tag{1.17}$$

$$||\tilde{u}||_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3} \leq C\,||v||_{(L^2(\Omega))^3}\,, \tag{1.18}$$

où C est une constante strictement positive.

Considérons à nouveau la première équation variationnelle de (1.7), dans laquelle nous prenons $\tilde{u}$ comme fonction-test. Il suit,

$$(\operatorname{rot} \tilde{u}, v)_{(L^2(\Omega))^3} = (\mu\, H, \tilde{u})_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3} + (\mu\, h^s, \tilde{u})_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3}\,.$$

Avec (1.5) et (1.17), nous avons

$$||v||^2_{(L^2(\Omega))^3} \leq \mu^\star\,(||H||_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3} + ||h^s||_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3})||\tilde{u}||_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3}\,.$$

L'inégalité (1.18), entraîne

$$||v||_{(L^2(\Omega))^3} \leq \mu^\star\, C\,(||H||_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3} + ||h^s||_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3})\,.$$

La relation (1.16) permet alors d'obtenir :

$$||v||_{(L^2(\Omega))^3} \leq \mu^\star\, C\,(\frac{\mu^\star}{\mu_0} + 1)\,||h^s||_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3}\,. \tag{1.19}$$

(1.16) et (1.19) permettent d'achever la preuve. □

3. Celui-ci est en effet possible d'après la remarque 1.2.1.

1.3 Une méthode d'intégrale de frontière et ses conditions

Le problème (1.7) étudié ci-dessus ne peut pour l'instant être discrétisé[4] compte tenu du fait qu'il est constitué de fonctions à support dans $\mathbb{R}^3$; il faudrait pour cela mailler l'espace tout entier. Nous proposons, par la méthode qui va être décrite, de passer d'intégrales portant sur $\mathbb{R}^3$ à celles recouvrant uniquement Ω et sa frontière Γ. L'approche générale d'une telle technique est développée dans Bendali [1].

1.3.1 Introduction de la méthode d'intégrale de frontière

Il s'agit ici d'une nouvelle représentation de l'inconnue principale de (1.7). Des équations posées dans Ω' et vérifiées par cette inconnue, nous ferons intervenir, une formule de représentation intégrale de frontière. Une approche semblable est présentée dans Bossavit [21].

Commençons par introduire,

$$W^1(\Omega') = \{\psi \; ; \; (1+r^2)^{\frac{|\alpha|-1}{2}} \, \partial^\alpha \psi \, \in L^2(\Omega') \; ; \; |\alpha| \leq 1 \, \} \, .$$

Les fonctions de cet espace, dont le poids $\dfrac{1}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}}$ fixe le comportement à l'infini, sont localement dans $H^1(\Omega')$. Comme Ω' est un ouvert connexe, $W^1(\Omega')$ coïncide avec l'espace défini comme étant la fermeture de $\mathcal{D}(\overline{\Omega'})$ pour la semi-norme :

$$\|\psi\|_{W^1(\Omega')} = \| \operatorname{grad} \psi\|_{(L^2(\Omega'))^3} \, .$$

Cette fonctionnelle définit alors une norme dans $W^1(\Omega')$ qui est en fait un espace de Hilbert.

Rappelons au passage que, l'application $\psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega'}) \longrightarrow \psi|_\Gamma \in \mathcal{D}(\Gamma)$ se prolonge en une application linéaire continue surjective de $W^1(\Omega')$ dans l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, qui sera muni de la norme :

$$\|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \inf_{\psi \in W^1(\Omega') \; ; \; \psi|_\Gamma = \varphi} \|\psi\|_{W^1(\Omega')} \, .$$

Soit à présent l'espace $\mathcal{H}$ où est recherchée l'inconnue H du problème (1.7). En particulier :

$$\operatorname{rot} H = 0 \;\; \text{dans} \;\; \Omega' \, .$$

Il existe donc, compte tenu du fait que Ω' est simplement connexe, un unique potentiel scalaire ψ dans $W^1(\Omega')$ tel que :

$$H = \operatorname{grad} \psi \;\; \text{dans} \;\; \Omega' \, . \tag{1.20}$$

La structure de l'espace $\mathcal{H}$ permet aussi d'écrire

$$\operatorname{div} H = 0 \;\; \text{dans} \;\; \Omega' \, .$$

4. Du moins, dans le cadre de notre travail.

Il suit alors avec (1.20) que le potentiel scalaire ψ satisfait :

$$\Delta \psi = 0 \text{ dans } \Omega' .$$

Nous aimerions affirmer à ce niveau que, connaître le potentiel scalaire ψ dans Ω', suffirait à la détermination du champ magnétique de réaction dans la même région. En fait, connaître la fonction ψ uniquement sur la frontière Γ suffirait à la détermination de ψ dans Ω', et donc du champ magnétique de réaction dans la même région.

Considérons pour ce faire le problème de Dirichlet extérieur qui, pour une fonction φ donnée dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, consiste à trouver un potentiel ψ vérifiant

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega' , \\ \psi &= \varphi \quad \text{sur} \quad \Gamma . \end{aligned} \tag{1.21}$$

Ce problème admet une unique solution dans l'espace $W^1(\Omega')$.

Nous pouvons alors affirmer que, le champ magnétique de réaction H s'écrit dans Ω' conformément à (1.20) où, ψ est unique dans $W^1(\Omega')$ et satisfait le problème extérieur (1.21). Aussi, compte tenu du fait que, H est en particulier un champ de vecteurs de l'espace $H(\mathrm{rot}\,; \mathbb{R}^3)$, le saut de sa trace tangentielle à travers la frontière Γ est nul. Par conséquent, nous avons

$$H \wedge n = \mathrm{grad}\, \psi \wedge n \quad \text{sur} \quad \Gamma . \tag{1.22}$$

Alors, connaître le champ magnétique de réaction H dans la région Ω et sur la frontière Γ suffit à la détermination de ce champ de vecteurs dans l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier. La fonction scalaire φ permettant d'exprimer le champ magnétique de réaction dans le milieu extérieur est appelée *potentiel scalaire de réaction magnétique*. C'est le potentiel surfacique associé au champ magnétique de réaction.

Pour une caractérisation adéquate d'un tel potentiel scalaire, rappelons l'opérateur de Poincaré-Steklov noté ici $\mathcal{P}$, et défini comme suit,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \quad H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) &\longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \varphi &\longmapsto n \cdot \mathrm{grad}\, \psi \end{aligned}$$

où ψ est la solution du problème (1.21). Alors, pour toute autre fonction scalaire φ' considérée dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (trace sur Γ d'une fonction harmonique dans Ω'), nous pouvons écrire en signifiant que $< \; . \, , \; . \; >$ désigne le crochet de dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$:

$$< \mathcal{P}(\varphi), \varphi' > = < n \cdot \mathrm{grad}\, \psi, \varphi' > . \tag{1.23}$$

L'opérateur linéaire et symétrique $\mathcal{P}$ ainsi défini est une isométrie (cf. Bossavit [21], [2]), qui envoie l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans son dual $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. On a également,

$$< \mathcal{P}(\varphi), \varphi > = \; ||\varphi||^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \; = \; ||\, \mathrm{grad}\, \psi||^2_{(L^2(\Omega'))^3} . \tag{1.24}$$

1.3.2 Condition de raccordement sur Γ

Nous sommes maintenant amenés à passer de la détermination d'un champ de vecteurs H dans l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier à la détermination de ce même champ dans Ω, et à celle d'une fonction supplémentaire φ à support sur Γ. Il est clair que la détermination d'un tel champ de vecteurs et celle d'un tel potentiel scalaire ne peuvent se faire de manière indépendante. En effet, H considéré à présent comme un champ de vecteurs à support dans Ω et φ le potentiel scalaire associé, sont directement liés par la relation (1.22) où $\psi = \varphi$ sur Γ. Avec le gradient surfacique, nous avons :

$$H \wedge n = \mathrm{grad}\, \varphi \wedge n \quad \text{sur} \quad \Gamma\,. \tag{1.25}$$

Cette condition, issue de la méthode d'intégrale de frontière, est essentiellement due à la structure de l'espace $\mathcal{H}$, qui contient les champs de vecteurs à composante tangentielle continue sur Γ. Nous ferons par la suite référence à (1.25), sous le nom, **condition de raccordement** sur Γ. Pour l'étude qui va être menée, celle-ci jouera un rôle fondamental.

De l'espace $\mathcal{H}$, nous introduisons l'espace de Hilbert

$$\mathcal{W} = \{(u, \varphi) \in\ H(\mathrm{rot}\,; \Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\ ;\ u \wedge n = \mathrm{grad}\, \varphi \wedge n \quad \text{sur } \Gamma\} \tag{1.26}$$

équipé de la norme

$$||(u, \varphi)||_{\mathcal{W}} = \sqrt{||u||^2_{H(\mathrm{rot}\,;\Omega)} + ||\varphi||^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}}\,.$$

C'est dans cet espace que seront recherchés le champ magnétique de réaction et son potentiel surfacique associé. Dans l'écriture de cet espace, nous faisons apparaître explicitement la condition de raccordement. Par ailleurs, comme la méthode de Galerkin est celle envisagée pour l'étude des problèmes variationnels, les fonctions-test seront aussi considérées dans cet espace et donc aussi soumises à la condition de raccordement.

Introduisons le

Théorème 1.3.1 *Soient les espaces de Hilbert $\mathcal{H}$ et $\mathcal{W}$, équipés respectivement des normes $||\ .\ ||_{\mathcal{H}}$ et $||\ .\ ||_{\mathcal{W}}$. Alors, il existe un isomorphisme (algébrique et topologique) entre ceux-ci, défini par*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{I}_e : & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{W} \\ & H & \longmapsto & (H|_{\Omega}, \varphi)\,. \end{array}$$

Preuve. Soit H un champ de vecteurs de $\mathcal{H}$. Nous savons par ce qui précède qu'il existe un unique potentiel scalaire φ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ permettant de constituer l'élément $(H|_{\Omega}, \varphi)$ de l'espace $\mathcal{W}$.

Soient maintenant H_{Ω} dans $H(\mathrm{rot}\,; \Omega)$ et φ dans l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ vérifiant la condition de raccordement. Désignons par $\psi \in W^1(\Omega')$ le prolongement harmonique de φ, vers l'extérieur, défini par :

$$\begin{array}{rcll} \Delta\, \psi & = & 0 & \text{dans} \quad \Omega'\,, \\ \psi & = & \varphi & \text{sur} \quad \Gamma\,, \end{array}$$

et posons :

$$H_{\Omega'} \;=\; \operatorname{grad}\psi \quad \text{dans } \Omega' .$$

Il vient : $\operatorname{rot} H_{\Omega'} = 0$ et $\operatorname{div} H_{\Omega'} = 0$. En outre,

$$H_\Omega \wedge n = \operatorname{grad}\psi \wedge n \;\text{ sur }\; \Gamma .$$

Etant donné que

$$H \;=\; \begin{cases} H_{\Omega'} & \text{dans} \quad \Omega' , \\ H_\Omega & \text{dans} \quad \Omega , \end{cases}$$

est de saut $[H \wedge n]_\Gamma = 0$, H est bien élément de $\mathcal{H}$. Enfin, nous avons

$$\begin{aligned} ||(H_\Omega, \varphi)||^2_{\mathcal{W}} &= ||H_\Omega||^2_{H(\mathrm{rot}\,;\Omega)} + ||\varphi||^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ &= ||H_\Omega||^2_{H(\mathrm{rot}\,;\Omega)} + ||\operatorname{grad}\psi||^2_{(L^2(\Omega'))^3} \\ &= ||H_\Omega||^2_{H(\mathrm{rot}\,;\Omega)} + ||H_{\Omega'}||^2_{(L^2(\Omega'))^3} \\ &= ||H||^2_{\mathcal{H}} . \end{aligned}$$

Il vient,

$$||\mathcal{I}_e(H)||_{\mathcal{W}} = ||H||_{\mathcal{H}} ,$$

ce qui achève la preuve. □

Avant de remarquer le rôle fondamental de la condition de raccordement dans l'établissement d'une nouvelle formulation variationnelle, nous tenons tout d'abord à constater un autre comportement du champ magnétique de réaction, au niveau de la frontière Γ, né de cette condition.

1.3.3 Condition induite auto-satisfaite sur Γ

La condition de raccordement impose sur la frontière une contrainte sur les dérivées tangentielles du champ magnétique de réaction. Celle-ci est exprimée dans la

Proposition 1.3.1 *Pour tout élément (H, φ) de l'espace $\mathcal{W}$, nous avons :*

$$(\operatorname{rot} H) \cdot n \;=\; 0 \;\; \textit{sur} \;\; \Gamma . \tag{1.27}$$

Preuve. Considérons (H, φ) dans l'espace $\mathcal{W}$. Soit ensuite u une fonction de l'espace $H^2(\Omega)$. Nous avons avec la première formule de Green,

$$< (\operatorname{rot} H) \cdot n, u > = \; (\operatorname{rot} H, \operatorname{grad} u)_{(L^2(\Omega))^3} ,$$

et grâce à la deuxième formule de Green,

$$< (\operatorname{rot} H) \cdot n, u > = < H \wedge n, \operatorname{grad} u > \; .$$

Soit la fonction harmonique ψ dans $W^1(\Omega')$ dont φ désigne la trace sur Γ. Alors, il suit avec la condition de raccordement :

$$< (\mathrm{rot}\, H) \cdot n, u > = < \mathrm{grad}\, \psi \wedge n, \mathrm{grad}\, u > \ .$$

Considérons par ailleurs,

$$P \ : \ H^2(\Omega) \ \longrightarrow \ H^2(\mathbb{R}^3)$$

opérateur linéaire continu tel que $P(u)|_\Omega = u$, et prolongeant u en une fonction scalaire de $H^2(\mathbb{R}^3)$. Il vient ainsi,

$$< (\mathrm{rot}\, H) \cdot n, u > = < \mathrm{grad}\, \psi \wedge n, \mathrm{grad}\, P(u) > ,$$

et avec la deuxième formule de Green,

$$< (\mathrm{rot}\, H) \cdot n, u > = \ (\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, \psi), \mathrm{grad}\, P(u))_{(L^2(\Omega'))^3} - (\mathrm{grad}\, \psi, \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, P(u)))_{(L^2(\Omega'))^3} \ .$$

Nous en déduisons que

$$< (\mathrm{rot}\, H) \cdot n, u > = \ 0 \ \ \forall\, u \in H^2(\Omega)\,,$$

et par densité de $H^2(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, nous concluons

$$(\mathrm{rot}\, H) \cdot n \ = \ 0 \ \ \mathrm{sur} \ \ \Gamma\,.$$

□

Cette nouvelle condition sur Γ, conséquence de la condition de raccordement, est en parfait accord avec la modélisation effectuée ; celle-ci était déjà suggérée par la remarque 1.2.1. Ainsi, contrairement à (1.25), la condition (1.27) est implicite. Elle est automatiquement satisfaite dès que (1.25) est prise en compte.

Remarque 1.3.1 *Désignons par Π^1 et Π^2 les projections de l'application $\mathcal{I}_e$ définies aussi : pour tout élément H de $\mathcal{H}$,*

$$\Pi^1(\mathcal{I}_e(H)) \ = \ H|_\Omega\,, \quad \Pi^2(\mathcal{I}_e(H)) \ = \ \varphi\,,$$

où φ est le potentiel surfacique associé à H. Nous avons,

$$\Pi^1 \circ \mathcal{I}_e(\mathcal{H}) \ \ \subsetneqq \ \ H(\mathrm{rot}\,;\Omega) \quad \mathit{et} \quad \Pi^2 \circ \mathcal{I}_e(\mathcal{H}) \ \ = \ \ H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\,.$$

Le fait que la première projection de $\mathcal{I}_e$ ne coïncide pas avec l'espace $H(\mathrm{rot}\,;\Omega)$ est une conséquence directe de la condition induite (1.27). Ceci impose donc une restriction sur les champs de vecteurs pouvant être considérés dans l'espace $H(\mathrm{rot}\,;\Omega)$, car ceux-ci doivent être soumis à cette condition. En revanche, aucune restriction n'est imposée sur les fonctions de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

La méthode présentée dans cette section permettra, à partir du problème (1.7), d'établir une formulation variationnelle essentiellement constituée d'intégrales ne portant que sur Ω et sa frontière Γ.

1.4 Problème mixte formulé avec la méthode d'intégrale de frontière

1.4.1 Formulation du problème

Nous nous proposons ici de reformuler le problème (1.7) en un problème variationnel faisant intervenir des inconnues à supports dans Ω et sur Γ.

Considérons l'inconnue H du problème (1.7). Par le théorème 1.3.1, il existe un couple $(H|_\Omega, \varphi)$ dans $\mathcal{W}$, où φ est la trace sur Γ d'une fonction harmonique ψ de $W^1(\Omega')$ vérifiant les relations (1.20) $-$ (1.23). Traitons de même la fonction-test h'. Alors, il existe un couple $(h'|_\Omega, \varphi') \in \mathcal{W}$, où φ' désigne la trace de la fonction harmonique ψ' dans $W^1(\Omega')$ vérifiant aussi les mêmes relations. Considérons maintenant la première équation du problème (1.7) et écrivons avec la formule (1.20) :

$$\begin{aligned} (\mu\, H, h')_{(L^2(\Omega))^3} \quad + \quad \mu_0\, (\operatorname{grad} \psi, \operatorname{grad} \psi')_{(L^2(\Omega'))^3} \quad - \quad (\operatorname{rot} h', v)_{(L^2(\Omega))^3} \ = \\ -\ (\mu\, h^s, h')_{(L^2(\Omega))^3} \quad - \quad \mu_0\, (h^s, \operatorname{grad} \psi')_{(L^2(\Omega'))^3} \,. \end{aligned}$$

En appliquant la première formule de Green au terme $(\operatorname{grad} \psi, \operatorname{grad} \psi')_{(L^2(\Omega'))^3}$ de cette relation, et en utilisant (1.21) et (1.23), il suit :

$$(\operatorname{grad} \psi, \operatorname{grad} \psi')_{(L^2(\Omega'))^3} \ = < \mathcal{P}(\varphi), \varphi' > \ .$$

De même, avec la première formule de Green et (1.4), nous obtenons

$$(h^s, \operatorname{grad} \psi')_{(L^2(\Omega'))^3} \ = < h^s \cdot n, \varphi' > \ .$$

Ainsi, la première équation de (1.7) s'écrit encore :

$$\begin{aligned} (\mu\, H, h')_{(L^2(\Omega))^3} \quad + \quad \mu_0 < \mathcal{P}(\varphi), \varphi' > \quad - \quad (\operatorname{rot} h', v)_{(L^2(\Omega))^3} \ = \\ -\ (\mu\, h^s, h')_{(L^2(\Omega))^3} \quad - \quad \mu_0 < h^s \cdot n, \varphi' > \qquad \forall\, (h', \varphi') \in \mathcal{W}\,. \end{aligned} \tag{1.28}$$

La deuxième équation de (1.7) ne faisant pas intervenir d'intégrales sur Ω' demeure inchangée. Avec cette équation et (1.28), nous pouvons introduire la nouvelle formulation variationnelle définie comme suit.

Pour h^s et μ vérifiant (1.4) et (1.5), trouver un couple (H, φ) dans $\mathcal{W}$ et un champ de vecteurs v dans $H_0(\operatorname{div}^0; \Omega)$ tels que

$$\begin{aligned} (\mu\, H, h')_{(L^2(\Omega))^3} \quad + \quad \mu_0 < \mathcal{P}(\varphi), \varphi' > \quad - \ (\operatorname{rot} h', v)_{(L^2(\Omega))^3} \ = \\ -\ (\mu\, h^s, h')_{(L^2(\Omega))^3} \quad - \quad \mu_0 < h^s \cdot n, \varphi' > \quad \forall\, (h', \varphi') \in \mathcal{W}\,, \\ -\ (\operatorname{rot} H, v')_{(L^2(\Omega))^3} \ = \ 0 \qquad\qquad \forall\, v' \in H_0(\operatorname{div}^0; \Omega)\,. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Nous constatons que, contrairement à (1.7), (1.29) porte sur des fonctions à support dans Ω et sur Γ. Notons par ailleurs que l'espace où est déterminé le champ de vecteurs v est inchangé.

1.4.2 Etude du problème

Nous consacrons cette partie à l'étude du problème (1.29). Posons,

$$\underline{a}((u,\varphi),(w,\phi)) = (\mu\, u, w)_{(L^2(\Omega))^3} + \mu_0 < \mathcal{P}(\varphi), \phi >, \tag{1.30}$$

la forme bilinéaire définie sur $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$,

$$\underline{b}((u,\varphi), v) = -(\mathrm{rot}\, u, v)_{(L^2(\Omega))^3}, \tag{1.31}$$

celle définie sur $\mathcal{W} \times H_0(\mathrm{div}^{\,0}; \Omega)$, et

$$\underline{l}((u,\varphi)) = -(\mu\, h^s, u)_{(L^2(\Omega))^3} - \mu_0 < h^s \cdot n, \varphi > \tag{1.32}$$

la forme linéaire définie sur $\mathcal{W}$.

Proposition 1.4.1 *Les formes $\underline{a}$, $\underline{b}$ et $\underline{l}$ sont continues : il existe des constantes C_1, C_2, $C_3 > 0$ telles que*

$$|\underline{a}((u,\varphi),(w,\phi))| \leq C_1 \,||(u,\varphi)||_{\mathcal{W}}\, ||(w,\phi)||_{\mathcal{W}} \quad \forall\,(u,\varphi),(w,\phi) \in \mathcal{W},$$

$$|\underline{b}((u,\varphi), v)| \leq C_2 \,||(u,\varphi)||_{\mathcal{W}}\, ||v||_{(L^2(\Omega))^3} \quad \forall\,(u,\varphi) \in \mathcal{W},\ \forall\, v \in H_0(\mathrm{div}^{\,0}; \Omega),$$

et

$$|\underline{l}((u,\varphi))| \leq C_3 \,||(u,\varphi)||_{\mathcal{W}}.$$

Preuve. Avec la forme bilinéaire $\underline{a}$, nous avons,

$$|\underline{a}((u,\varphi),(w,\phi))| \leq \mu^\star \,||u||_{(L^2(\Omega))^3}\, ||w||_{(L^2(\Omega))^3} + \mu_0 \,||\mathcal{P}(\varphi)||_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\, ||\phi||_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Le fait que $\mathcal{P}$ est une isométrie permet d'écrire

$$|\underline{a}((u,\varphi),(w,\phi))| \leq \mu^\star \,||u||_{(L^2(\Omega))^3}\, ||w||_{(L^2(\Omega))^3} + \mu_0 \,||\varphi||_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\, ||\phi||_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)},$$

d'où

$$|\underline{a}((u,\varphi),(w,\phi))| \leq \mu^\star \,||(u,\varphi)||_{\mathcal{W}}\, ||(w,\phi)||_{\mathcal{W}} + \mu_0 \,||(u,\varphi)||_{\mathcal{W}}\, ||(w,\phi)||_{\mathcal{W}}.$$

Nous obtenons ainsi

$$|\underline{a}((u,\varphi),(w,\phi))| \leq 2\mu^\star \,||(u,\varphi)||_{\mathcal{W}}\, ||(w,\phi)||_{\mathcal{W}}.$$

D'autre part,

$$|\underline{b}((u,\varphi), v)| \leq ||\,\mathrm{rot}\, u||_{(L^2(\Omega))^3}\, ||v||_{(L^2(\Omega))^3}.$$

Alors,

$$|\underline{b}((u,\varphi),v)| \;\le\; ||(u,\varphi)||_{\mathcal{W}}\, ||v||_{(L^2(\Omega))^3}\,.$$

Enfin,

$$|\underline{l}((u,\varphi))| \;\le\; \mu^\star\, ||h^s||_{(L^2(\Omega))^3}\, ||u||_{(L^2(\Omega))^3} \;+\; \mu_0\, ||h^s\cdot n||_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\, ||\varphi||_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

i.e.,

$$|\underline{l}((u,\varphi))| \;\le\; (\mu^\star\, ||h^s||_{(L^2(\Omega))^3} \;+\; \mu_0\, ||h^s\cdot n||_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)})\, ||(u,\varphi)||_{\mathcal{W}}\,,$$

ce qui achève la preuve. □

Avec ces nouvelles notations, (1.29) s'écrit aussi : trouver $((H,\varphi),v)$ dans l'espace $\mathcal{W}\times H_0(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} \underline{a}((H,\varphi),(h',\varphi')) \;+\; \underline{b}((h',\varphi'),v) \;&=\; \underline{l}((h',\varphi')) && \forall\,(h',\varphi')\in\mathcal{W}\,,\\ \underline{b}((H,\varphi),v') \;&=\; 0 && \forall\, v'\in H_0(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Omega)\,. \end{aligned}$$

Il admet pour inconnue principale le couple (H,φ), où le champ de vecteurs H représente le champ magnétique de réaction à support dans Ω et la fonction φ désigne le potentiel scalaire de réaction magnétique sur Γ. Contrairement au champ de vecteurs v, le couple (H,φ) représente ici l'inconnue physique[5].

Remarque 1.4.1 *L'application* $(u,\varphi)\in\mathcal{W}\;\longrightarrow\;\mathrm{rot}\,u\in H_0(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Omega)$ *est bien définie. En fait, pour tout élément* (u,φ) *de* $\mathcal{W}$*, la proposition* 1.3.1 *indique que* $\mathrm{rot}\,u$ *est un élément de l'espace* $H_0(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Omega)$*. Nous constatons que, la condition de raccordement permet d'assurer le lien entre les espaces* $\mathcal{W}$ *et* $H_0(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Omega)$*.*

Introduisons le sous-espace de $\mathcal{W}$,

$$\underline{V} = \{(u,\varphi)\in\mathcal{W}\;;\;\underline{b}((u,\varphi),v)=0\;\;\forall\,v\in H_0(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Omega)\}\,.$$

Remarque 1.4.2 $\underline{V}$ *s'écrit encore :*

$$\underline{V} = \{(u,\varphi)\in\mathcal{W}\;;\;\mathrm{rot}\,u\;=\;0\;\;\textit{dans}\;\;\Omega\}\,.$$

En fait, la nouvelle écriture de $\underline{V}$ est une conséquence directe de la remarque 1.4.1. Ceci permet d'introduire l'énoncé suivant.

Lemme 1.4.1 *Il existe une constante* $\alpha>0$ *telle que*

$$\underline{a}((u,\varphi),(u,\varphi)) \;\ge\; \alpha\,||(u,\varphi)||^2_{\mathcal{W}}\;\;\forall\,(u,\varphi)\in\underline{V}\,.$$

5. Bien que le champ de vecteurs H ne représente pas une entité physique, tout comme la fonction scalaire φ associée, nous désignons dans la suite par (H,φ) l'inconnue physique.

Preuve. Soit (u,φ) un élément de $\underline{V}$. Alors, il vient avec (1.5) et (1.24) respectivement,

$$\underline{a}((u,\varphi),(u,\varphi)) \;\geq\; \mu_0\,(||u||^2_{(L^2(\Omega))^3} \,+\, ||\varphi||^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}) \,.$$

i.e.,

$$\underline{a}((u,\varphi),(u,\varphi)) \;\geq\; \mu_0\,(||u||^2_{H(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} \,+\, ||\varphi||^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}) \,,$$

ce qui achève la preuve. □

Comme nous pouvons le constater, la $\underline{V}-$ellipticité de la forme bilinéaire $\underline{a}$ découle tout simplement de la $V-$ellipticité de la forme bilinéaire a définie en (1.8).

Afin de conclure la première partie de l'étude du problème (1.29), nous introduisons les énoncés suivants.

Proposition 1.4.2 *Soient les formes bilinéaires b et $\underline{b}$ définies respectivement sur $\mathcal{H}\times H_0(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Omega)$ et $\mathcal{W}\times H_0(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Omega)$. Alors, pour tout champ de vecteurs v dans $H_0(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Omega)$, nous avons*

$$\sup_{u\in\mathcal{H}} \frac{b(u,v)}{||u||_{\mathcal{H}}} \;=\; \sup_{(u|_\Omega,\varphi)\in\mathcal{W}} \frac{\underline{b}((u|_\Omega,\varphi),v)}{||(u|_\Omega,\varphi)||_{\mathcal{W}}} \,.$$

Preuve. Soit v un élément de l'espace $H_0(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Omega)$. Soit u un champ de vecteurs de $\mathcal{H}$. Avec le théorème 1.3.1, il existe une unique fonction φ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ telle que, $(u|_\Omega,\varphi)$ appartienne à l'espace $\mathcal{W}$. En outre,

$$||u||_{\mathcal{H}} \;=\; ||(u|_\Omega,\varphi)||_{\mathcal{W}} \,. \tag{1.33}$$

Par ailleurs, nous avons, par définition de b et $\underline{b}$,

$$b(u,v) \;=\; \underline{b}((u|_\Omega,\varphi),v) \,,$$

ce qui permet d'écrire,

$$\sup_{u\in\mathcal{H}} \frac{b(u,v)}{||u||_{\mathcal{H}}} \;=\; \sup_{u\in\mathcal{H}} \frac{\underline{b}((u|_\Omega,\varphi),v)}{||u||_{\mathcal{H}}} \,.$$

Avec (1.33), il vient

$$\sup_{u\in\mathcal{H}} \frac{b(u,v)}{||u||_{\mathcal{H}}} \;=\; \sup_{(u|_\Omega,\varphi)\in\mathcal{W}} \frac{\underline{b}((u|_\Omega,\varphi),v)}{||(u|_\Omega,\varphi)||_{\mathcal{W}}} \,.$$

□

Nous pouvons maintenant établir l'estimation suivante, qui permettra de conclure quant au caractère bien-posé du problème (1.29).

Proposition 1.4.3 *Il existe une constante β strictement positive telle que,*

$$\sup_{(u,\varphi)\,\in\,\mathcal{W}} \frac{\underline{b}((u,\varphi),v)}{||(u,\varphi)||_{\mathcal{W}}} \;\geq\; \beta\,||v||_{(L^2(\Omega))^3} \quad \forall\, v\in H_0(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Omega) \,.$$

Preuve. Soit v un élément de $H_0(\mathrm{div}^0\,;\,\Omega)$. Nous savons par le lemme 1.2.2 que, pour un tel champ de vecteurs, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sup_{u \in \mathcal{H}} \frac{b(u,v)}{||u||_{\mathcal{H}}} \;\geq\; C\,||v||_{(L^2(\Omega))^3}\,,$$

où b est la forme bilinéaire définie en (1.9). Alors, d'après la proposition 1.4.2,

$$\sup_{(u|_\Omega,\varphi)\in\mathcal{W}} \frac{\underline{b}((u|_\Omega,\varphi),v)}{||(u|_\Omega,\varphi)||_{\mathcal{W}}} \;\geq\; C\,||v||_{(L^2(\Omega))^3}\,,$$

d'où l'estimation. □

Comme nous pouvons le remarquer, cette preuve utilise directement le lien entre les espaces $\mathcal{H}$ et $\mathcal{W}$. Nous donnons dans ce qui suit une autre preuve de la proposition 1.4.3 en utilisant les mêmes arguments que pour le lemme 1.2.2. L'isomorphisme exhibé par le théorème 1.3.1 est alors explicitement ignoré, contrairement à ce qui précède.

Une autre preuve de la proposition 1.4.3. Soit v un élément de $H_0(\mathrm{div}^0\,;\,\Omega)$. Soit, comme dans la preuve du lemme 1.2.2, un champ de vecteurs u dans $(H^1(\Omega))^3$ satisfaisant $(1.10)-(1.13)$. Il en suit avec (1.12), que le couple $(\,\underset{\sim}{u},0) = (-u,0)$ est bien un élément de $\mathcal{W}$ et tel que:

$$||(\,\underset{\sim}{u},0)||_{\mathcal{W}} \;=\; ||u||_{H(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)}\,. \tag{1.34}$$

La formule (1.10) permet d'écrire:

$$\underline{b}((\,\underset{\sim}{u},0),v) = ||v||^2_{(L^2(\Omega))^3}\,,$$

et tenant compte de (1.13), il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\underline{b}((\,\underset{\sim}{u},0),v) \;\geq\; \frac{1}{C}\,||u||_{H(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)}\,||v||_{(L^2(\Omega))^3}\,.$$

Il en découle alors avec (1.34),

$$\underline{b}((\,\underset{\sim}{u},0),v) \;\geq\; \frac{1}{C}\,||(\,\underset{\sim}{u},0)||_{\mathcal{W}}\,||v||_{(L^2(\Omega))^3}\,,$$

d'où l'estimation. □

Nous avons donc le

Théorème 1.4.1

i) (1.29) *admet une solution unique* $((H,\varphi),v)$ *dans l'espace* $\mathcal{W}\times H_0(\mathrm{div}^0\,;\,\Omega)$ *et*

ii) il existe une constante $C(\mu_0,\mu^\star) > 0$ *telle que*

$$||(H,\varphi)||_{\mathcal{W}} + ||v||_{(L^2(\Omega))^3} \;\leq\; C(\mu_0,\mu^\star)\,(||h^s||_{(L^2(\Omega))^3} \;+\; ||h^s\cdot n||_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)})\,.$$

Preuve.

i) La $\underline{V}$−ellipticité de la forme bilinéaire $\underline{a}$ annoncée dans le lemme 1.4.1 et la condition de Babuška-Brezzi, assurée par la proposition 1.4.3, montrent (d'après le formalisme du § 1.1.1) que le problème (1.29) possède une unique solution dans l'espace $\mathcal{W} \times H_0(\operatorname{div}^0 ; \Omega)$.

ii) Dans la deuxième équation variationnelle de (1.29), faisons le choix (qui est possible d'après la proposition 1.3.1) : $v' = \operatorname{rot} H$. Il vient,

$$||\operatorname{rot} H||_{(L^2(\Omega))^3} = 0 \,. \tag{1.35}$$

Ensuite, avec $h' = H$ et $\varphi' = \varphi$ dans la première équation variationnelle, nous avons la relation :

$$\begin{aligned} (\mu\, H, H)_{(L^2(\Omega))^3} \quad + \quad \mu_0 < \mathcal{P}(\varphi), \varphi > \quad = \\ (\operatorname{rot} H, v)_{(L^2(\Omega))^3} \quad - \quad (\mu\, h^s, H)_{(L^2(\Omega))^3} \quad - \quad \mu_0 < h^s \cdot n, \varphi > , \end{aligned}$$

qui permet ensuite d'établir compte tenu des relations (1.5), (1.35) et du lemme 1.4.1 :

$$||H||^2_{(L^2(\Omega))^3} + ||\varphi||^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \;\le\; \frac{\mu^\star}{\mu_0}\, ||h^s||_{(L^2(\Omega))^3}\, ||H||_{(L^2(\Omega))^3} + ||h^s \cdot n||_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\, ||\varphi||_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \,.$$

Ainsi,

$$||(H, \varphi)||^2_{\mathcal{W}} \;\le\; \frac{\mu^\star}{\mu_0}\, ||h^s||_{(L^2(\Omega))^3}\, ||H||_{H(\operatorname{rot};\,\Omega)} + ||h^s \cdot n||_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\, ||\varphi||_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \,,$$

d'où l'estimation :

$$||(H, \varphi)||_{\mathcal{W}} \;\le\; \frac{\mu^\star}{\mu_0}\, ||h^s||_{(L^2(\Omega))^3} \;+ ||h^s \cdot n||_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \,. \tag{1.36}$$

Par ailleurs, v étant élément de $H_0(\operatorname{div}^0 ; \Omega)$, considérons, comme dans la preuve du lemme 1.2.2, le champ de vecteurs u dans $(H^1(\Omega))^3$ qui vérifie (1.10) − (1.13). Avec (1.12), formons un élément $(u, 0)$ de $\mathcal{W}$, pris ensuite comme function-test dans la première équation variationnelle de (1.29). Il vient

$$(\operatorname{rot} u, v)_{(L^2(\Omega))^3} = (\mu\, H, u)_{(L^2(\Omega))^3} + (\mu\, h^s, u)_{(L^2(\Omega))^3} \,,$$

ce qui permet d'écrire avec (1.5) et (1.10),

$$||v||^2_{(L^2(\Omega))^3} \;\le\; \mu^\star \,(||H||_{(L^2(\Omega))^3} \;+\; ||h^s||_{(L^2(\Omega))^3})\, ||u||_{(L^2(\Omega))^3} \,.$$

Il en découle, en tenant compte de (1.13), l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$||v||_{(L^2(\Omega))^3} \;\le\; C\, \mu^\star \,(||H||_{(L^2(\Omega))^3} \;+\; ||h^s||_{(L^2(\Omega))^3}) \,. \tag{1.37}$$

Les estimations (1.36) et (1.37) permettent alors d'achever la preuve. □

Il est par ailleurs important de bien préciser le lien entre le problème physique et le problème (1.29). En fait, ce lien peut se constater de deux façons. Il se fait de manière constructive (ou encore par équivalence), en constatant d'abord la

Proposition 1.4.4 *Soit* (H, v) *dans* $\mathcal{H} \times H_0(\mathrm{div}^0; \Omega)$ *la solution du problème* (1.7). *Alors, il existe un potentiel scalaire* φ *tel que* $((H|_\Omega, \varphi), v) \in \mathcal{W} \times H_0(\mathrm{div}^0; \Omega)$ *soit solution du problème* (1.29).

Inversement, soit $((H_\Omega, \varphi), v)$ *dans* $\mathcal{W} \times H_0(\mathrm{div}^0; \Omega)$ *la solution de* (1.29). *Alors, il existe un couple de champs de vecteurs* $(H, v) \in \mathcal{H} \times V$ *solution de* (1.7).

Preuve. Soit (H, v) dans l'espace $\mathcal{H} \times H_0(\mathrm{div}^0; \Omega)$ la solution du problème (1.7). Alors nous savons, depuis la formulation du problème (1.29), qu'il existe un potentiel scalaire φ dans l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ tel que $((H|_\Omega, \varphi), v) \in \mathcal{W} \times H_0(\mathrm{div}^0; \Omega)$ soit solution de ce problème.

Supposons maintenant $((H_\Omega, \varphi), v) \in \mathcal{W} \times H_0(\mathrm{div}^0; \Omega)$ solution du problème (1.29). Alors, le champ de vecteurs,

$$H = \begin{cases} H_\Omega & \text{dans} \quad \Omega\,, \\ \mathrm{grad}\,\psi & \text{dans} \quad \Omega'\,, \end{cases} \tag{1.38}$$

où ψ est la fonction harmonique prolongeant φ dans Ω', est un élément $\mathcal{H}$. Soit maintenant $((h'_\Omega, \varphi'), v')$ une fonction-test dans l'espace $\mathcal{W} \times H_0(\mathrm{div}^0; \Omega)$. En posant de même

$$h' = \begin{cases} h'_\Omega & \text{dans} \quad \Omega\,, \\ \mathrm{grad}\,\psi' & \text{dans} \quad \Omega'\,, \end{cases} \tag{1.39}$$

où ψ' désigne la fonction harmonique qui prolonge φ' dans Ω', nous construisons une fonction-test dans l'espace $\mathcal{H}$. D'après (1.29), (H, v) est solution du problème (1.7). $\square$

Comme les problèmes (1.7) et (1.29) sont équivalents, il suit du théorème 1.2.2 *ii*), que (1.29) résout bien le problème physique.

Le lien entre ces problèmes peut aussi s'établir de manière directe :

Corollaire 1.4.1 *Soit* $((H_\Omega, \varphi), v)$ *dans* $\mathcal{W} \times H_0(\mathrm{div}^0; \Omega)$ *la solution du problème* (1.29). *Alors, il existe un champ de vecteurs* H *prolongeant* H_Ω *et qui vérifie, dans le domaine et en dehors, le système* (0.12) – (0.13).

Preuve. Soit $((H_\Omega, \varphi), v)$ la solution du problème (1.29). Nous savons (d'après le formalisme du paragraphe 1.1.1) que (H_Ω, φ) est dans l'espace $\underline{V}$ et est aussi la solution du problème variationnel

$$\begin{aligned} (\mu\, H_\Omega, h'_\Omega)_{(L^2(\Omega))^3} \quad &+ \quad \mu_0 \, < \mathcal{P}(\varphi), \varphi' > \quad = \\ -\ (\mu\, h^s, h'_\Omega)_{(L^2(\Omega))^3} \quad &- \quad \mu_0 \, < h^s \cdot n, \varphi' > \quad \forall\, (h'_\Omega, \varphi') \in \underline{V}\,. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Comme en (1.38), nous formons avec (H_Ω, φ) le champ de vecteurs H, élément de V. Et donc H satisfait (0.13).

L'appartenance de H à V permet aussi de constater que H vérifie en dehors de Ω la relation (0.12). Par ailleurs, comme en (1.39), formons avec (h'_Ω, φ') le champ de vecteurs h' qui est un élément de V. Il découle alors de (1.40), que H est solution dans V, du problème

$$(\mu\, H, h')_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3} \;=\; -(\mu\, h^s, h')_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3} \quad \forall\, h' \in V\,. \tag{1.41}$$

Ceci permet alors de noter avec $h' = \mathrm{grad}\, \tilde{\psi}$; $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, que H vérifie dans Ω la relation (0.12). □

Cet énoncé met bien en évidence le fait que l'inconnue principale du problème (1.29), permet de reconstituer l'inconnue du problème physique.

Conformément à notre démarche, le problème (1.29) étudié dans cette section peut être approché numériquement, contrairement à (1.7).

1.5 Problème intermédiaire

Bien que le problème (1.29) puisse alors être discrétisé, nous nous proposons de le reformuler, en un problème variationnel qui présentera des intérêts certains au point de vue numérique.

A l'aide du théorème 1.2.1, nous utiliserons un potentiel-vecteur de courant, pour décrire l'inconnue auxiliaire de (1.29). Ce potentiel-vecteur est alors déterminé dans un espace favorable à une discrétisation plus aisée que celle de $H_0(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Omega)$.

1.5.1 Formulation et étude du problème

Introduisons l'espace de potentiel-vecteurs,

$$W \;=\; \{w \in H(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)\;;\; \mathrm{div}\, w = 0 \;\text{ dans }\; \Omega\;;\; w \wedge n = 0 \;\text{ sur }\; \Gamma\}\,, \tag{1.42}$$

qui sera équipé de la norme suivante, compte tenu des propriétés de Ω (cf. § 1.1.2) :

$$||w||_W \;=\; ||w||_{H(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)}\,.$$

S'il est vrai que W tient aussi compte de la condition de divergence nulle, ses éléments sont cependant soumis à plus de régularité que ceux de $H_0(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Omega)$. Notons par ailleurs qu'il est bien plus pratique de discrétiser, numériquement, un tel espace contrairement à $H_0(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Omega)$.

Remarque 1.5.1 *Pour tout élément w de W, nous avons (cf. e.g. [19]) :*

$$||\,\mathrm{rot}\, w||_{(L^2(\Omega))^3} \;\geq\; C\, ||w||_{(L^2(\Omega))^3}\,,$$

où C est une constante strictement positive.

Considérons le problème (1.29). Au champ de vecteurs v, associons conformément au théorème 1.2.1, le potentiel-vecteur w dans W. De même, à la fonction-test v', associons le potentiel-vecteur w' dans W. Alors, à partir de (1.29), nous formulons le problème suivant.

Pour h^s et μ vérifiant (1.4) et (1.5), trouver un couple (H,φ) dans $\mathcal{W}$ et un potentiel-vecteur w dans l'espace W, tels que

$$\begin{aligned}
(\mu\, H, h')_{(L^2(\Omega))^3} \quad &+ \quad \mu_0 \, < \mathcal{P}(\varphi), \varphi' > \quad - \; (\mathrm{rot}\, h', \mathrm{rot}\, w)_{(L^2(\Omega))^3} \; = \\
-\; (\mu h^s, h')_{(L^2(\Omega))^3} \quad &- \quad \mu_0 \, < h^s \cdot n, \varphi' > \quad \forall\, (h',\varphi') \in \mathcal{W}\,, \\
-\; (\mathrm{rot}\, H, \mathrm{rot}\, w')_{(L^2(\Omega))^3} \quad &= \quad 0 \qquad\qquad\qquad\quad \forall\, w' \in W\,.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Le problème (1.43), tout comme (1.29), admet pour inconnue principale l'inconnue physique représentée par le couple (H,φ).

Posons,

$$\underline{\underline{a}}((u,\varphi),(v,\phi)) = (\mu\, u, v)_{(L^2(\Omega))^3} + \mu_0 \, < \mathcal{P}(\varphi), \phi > , \tag{1.44}$$

la forme bilinéaire définie sur $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$,

$$\underline{\underline{b}}((u,\varphi),w) = -\,(\mathrm{rot}\, u, \mathrm{rot}\, w)_{(L^2(\Omega))^3}\,, \tag{1.45}$$

celle définie sur $\mathcal{W} \times W$, et

$$\underline{\underline{l}}((u,\varphi)) = -\,(\mu\, h^s, u)_{(L^2(\Omega))^3} - \mu_0 \, < h^s \cdot n, \varphi > \tag{1.46}$$

la forme linéaire définie sur $\mathcal{W}$.

Proposition 1.5.1 *Les formes* $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$ *et* $\underline{\underline{l}}$ *sont continues : il existe des constantes* C_1, C_2, $C_3 > 0$ *telles que*

$$|\, \underline{\underline{a}}((u,\varphi),(v,\phi))| \;\le\; C_1\, ||(u,\varphi)||_{\mathcal{W}}\, ||(v,\phi)||_{\mathcal{W}} \;\; \forall\, (u,\varphi),(v,\phi) \in \mathcal{W}\,,$$

$$|\, \underline{\underline{b}}((u,\varphi),w)| \;\le\; C_2\, ||(u,\varphi)||_{\mathcal{W}}\, ||w||_{W} \;\; \forall\, (u,\varphi) \in \mathcal{W}\,, \forall\, w \in W\,,$$

et

$$|\, \underline{\underline{l}}((u,\varphi))| \;\;\le\;\; C_3\, ||(u,\varphi)||_{\mathcal{W}}\,.$$

Preuve. La forme bilinéaire $\underline{\underline{a}}$ étant identique à la forme bilinéaire continue définie en (1.30), elle est aussi continue sur $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$. Il en est de même de la forme linéaire $\underline{\underline{l}}$ identique à la forme linéaire continue définie en (1.32). Considérons maintenant la forme bilinéaire $\underline{\underline{b}}$. Clairement,

$$|\, \underline{\underline{b}}((u,\varphi),w)| \;\le\; ||\,\mathrm{rot}\, u||_{(L^2(\Omega))^3}\, ||\,\mathrm{rot}\, w||_{(L^2(\Omega))^3}\,.$$

Nous avons ainsi,

$$| \, \underline{\underline{b}}((u,\varphi),w)| \;\leq\; ||(u,\varphi)||_{\mathcal{W}} \, ||w||_{W} \, .$$

$\square$

Avec la forme bilinéaire $\underline{\underline{b}}$, introduisons

$$\underline{\underline{V}} = \{(u,\varphi) \in \mathcal{W} \; ; \; \underline{\underline{b}}((u,\varphi),w) = 0 \;\; \forall \, w \in W\} \, .$$

Lemme 1.5.1 *Le sous-espace* $\underline{\underline{V}}$ *de* $\mathcal{W}$ *coïncide avec*

$$\underline{\underline{V}}(0) = \{(u,\varphi) \in \mathcal{W} \; ; \; \mathrm{rot}\, u = 0 \;\; \textit{dans} \;\; \Omega\} \, .$$

Preuve. Il est immédiat que tout élément de $\underline{\underline{V}}(0)$ est aussi celui de $\underline{\underline{V}}$. Considérons maintenant (u,φ) dans $\underline{\underline{V}}$. Etant donné que celui-ci est un élément de $\mathcal{W}$, il vient avec la proposition 1.3.1 que, $\mathrm{rot}\, u$ est dans l'espace $H_0(\mathrm{div}^{\,0}\, ; \,\Omega)$. D'après le théorème 1.2.1, il existe alors un potentiel-vecteur $\underset{\sim}{w}$ dans W, tel que

$$\mathrm{rot}\; \underset{\sim}{w} \;=\; \mathrm{rot}\, u \, ,$$

ce qui permet d'écrire

$$\underline{\underline{b}}((u,\varphi), \; \underset{\sim}{w}) \;=\; -||\, \mathrm{rot}\, u||^2_{(L^2(\Omega))^3} \, .$$

Ensuite, comme par hypothèse

$$\underline{\underline{b}}((u,\varphi), \; \underset{\sim}{w}) \;=\; 0 \, ,$$

il suit que (u,φ) est bien un élément de l'espace $\underline{\underline{V}}(0)$. $\square$

Le lemme 1.5.1 met ainsi en évidence le fait que les sous-espaces $\underline{V}$ et $\underline{\underline{V}}$ de $\mathcal{W}$ sont identiques bien que les formes bilinéaires $\underline{b}$ et $\underline{\underline{b}}$ soient différentes. En plus du fait que les formes bilinéaires $\underline{a}$ et $\underline{\underline{a}}$ coïncident, ceci permet d'introduire le

Lemme 1.5.2 *La forme bilinéaire* $\underline{\underline{a}}$ *est* $\underline{\underline{V}}-$*elliptique.*

Etablissons la

Proposition 1.5.2 *Il existe une constante* $\beta > 0$ *telle que,*

$$\sup_{(u,\varphi)\,\in\,\mathcal{W}} \frac{\underline{\underline{b}}((u,\varphi),w)}{||(u,\varphi)||_{\mathcal{W}}} \;\geq\; \beta \, ||w||_{W} \quad \forall \, w \in W \, .$$

Preuve. Soit w un potentiel-vecteur de W. En considérant $(\underset{\sim}{u},\varphi)$ où

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{u} \;\; &= \;\; -w \quad \text{dans} \quad \Omega \, , \\ \varphi \;\; &= \;\; 0 \quad\;\; \text{sur} \quad\; \Gamma \, , \end{aligned}$$

nous définissons un élément de $\mathcal{W}$ tel que :

$$||(\underset{\sim}{u},\varphi)||_{\mathcal{W}} \;=\; ||w||_W\,. \tag{1.47}$$

Nous avons par ailleurs,

$$\underline{\underline{b}}((\underset{\sim}{u},\varphi),w) = ||\operatorname{rot} w||^2_{(L^2(\Omega))^3}\,,$$

ce qui permet ensuite d'écrire avec la remarque 1.5.1,

$$\underline{\underline{b}}((\underset{\sim}{u},\varphi),w) \;\geq\; C\,||w||^2_W\,,$$

où C est une constante strictement positive. Enfin, la relation (1.47) montre que

$$\underline{\underline{b}}((\underset{\sim}{u},\varphi),w) \;\geq\; C\,||(\underset{\sim}{u},\varphi)||_{\mathcal{W}}\,||w||_W\,,$$

ce qui achève la preuve. □

Nous avons le

Théorème 1.5.1

- *Le problème* (1.43) *admet une solution unique* $((H,\varphi),w)$ *dans l'espace* $\mathcal{W}\times W$ *et*
- *il existe une constante* $C(\mu_0,\mu^\star)>0$ *telle que*

$$||(H,\varphi)||_{\mathcal{W}} + ||w||_W \;\leq\; C\,(\mu_0,\mu^\star)\,(||h^s||_{(L^2(\Omega))^3} \;+\; ||h^s\cdot n||_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)})\,.$$

Le premier point de cet énoncé se justifie par le lemme 1.5.2 et la proposition 1.5.2, tandis que, le second point s'établit en utilisant les arguments déjà évoqués dans la preuve du théorème 1.4.1 *ii*).

Le lien entre (1.29) et (1.43) est exprimé comme dans la

Proposition 1.5.3 *Soit* $((H,\varphi),v)\in\mathcal{W}\times H_0(\operatorname{div}^0;\Omega)$ *solution du problème* (1.29). *Alors, il existe un potentiel-vecteur* w *dans l'espace* W *tel que* $((H,\varphi),w)$ *soit solution du problème* (1.43).

Réciproquement, soit $((H,\varphi),w)\in\mathcal{W}\times W$ *la solution de* (1.43). *Alors, il existe un champ de vecteurs* v *dans* $H_0(\operatorname{div}^0;\Omega)$ *tel que* $((H,\varphi),v)$ *soit solution de* (1.29).

Preuve. Soit $((H,\varphi),v)$ solution du problème (1.29). Par construction, le problème (1.43) admet une solution.

Considérons maintenant $((H,\varphi),w)$ la solution dans $\mathcal{W}\times W$ du problème (1.43). Alors, le champ de vecteurs

$$v \;=\; \operatorname{rot} w$$

est dans l'espace $H_0(\operatorname{div}^0;\Omega)$. De même, avec une fonction-test w' dans l'espace W, nous posons :

$$v' \;=\; \operatorname{rot} w'\,.$$

De (1.43), nous avons prouvé que $((H, \varphi), v)$ est solution du problème (1.29). □

(1.29) et (1.43) sont donc deux problèmes variationnels équivalents. Si nous avons étudié (1.43) à part, c'est dans le souci de montrer que celui-ci peut être considéré, de manière indépendante par rapport à (1.29), pour la détermination de l'inconnue physique, comme nous l'indique le

Corollaire 1.5.1 *Soit* $((H_\Omega, \varphi), w) \in \mathcal{W} \times W$ *la solution du problème* (1.43). *Alors, il existe un champ de vecteurs* H *prolongeant* H_Ω *qui vérifie* $(0.12)-(0.13)$ *dans le domaine et en dehors.*

1.6 Régularité du champ magnétique

Nous nous intéressons dans cette section à la régularité de la solution des problèmes variationnels (1.7), (1.29) et (1.43). Bien que cette régularité soit importante pour l'étude d'erreurs qui sera faite plus loin, le lecteur pourra néanmoins faire abstraction de cette section, quasiment indépendante des chapitres suivants.

Il est bien connu que s'agissant, d'un problème variationnel associé à un problème aux limites sur un ouvert borné, la géométrie de cet ouvert et en particulier la régularité de sa frontière, sont un facteur important dans l'étude de la régularité de la solution. En plus des hypothèses déjà fixées sur Ω au § 1.1.2, nous supposerons ici que Γ est une surface régulière. Outre la géométrie du milieu magnétique Ω, sa constitution physique (notamment la nature des matériaux qui le forment), jouera un rôle essentiel dans l'étude que nous envisageons de mener. Bien qu'il existe plusieurs possibilités de concevoir cette constitution physique, nous nous limiterons au cas où Ω est considéré comme étant un milieu hétérogène. La nature des matériaux constituant Ω dictera alors la régularité de la fonction scalaire μ apparaissant comme une donnée dans les problèmes variationnels (1.7), (1.29) et (1.43).

1.6.1 Régularité de la solution du problème (1.7)

Indépendamment de la constitution physique du milieu Ω, nous nous appuierons systématiquement sur l'étude de la régularité de la solution du problème physique $(0.12) - (0.13)$ afin de mettre en évidence celle de la solution du problème (1.7).

Commençons par distinguer le cas où Ω est homogène et donc la perméabilité magnétique définie par :

$$\mu(x) = \begin{cases} \mu_0 & \text{si } x \in \Omega', \\ \mu_1 & \text{si } x \in \Omega \end{cases} \tag{1.48}$$

où $\mu_1 > \mu_0$ est une constante.

Introduisons ensuite l'énoncé préliminaire donné par le

Lemme 1.6.1 *Si un champ de vecteurs H satisfait* $(0.12)-(0.13)$ *avec μ donné comme en* (1.48), *alors, il existe un potentiel scalaire ψ dans $W^1(\mathbb{R}^3)$ tel que :*

$$\begin{aligned}
\Delta\psi &= 0 \quad \textit{dans} \quad \Omega', && (1.49)\\
\Delta\psi &= 0 \quad \textit{dans} \quad \Omega, && (1.50)\\
(\operatorname{grad}\psi\cdot n)|_{ext\Omega} &= \eta\,(\operatorname{grad}\psi\cdot n)|_{int\Omega} - \alpha\,[\mu\, h^s\cdot n]_\Gamma, && (1.51)\\
[\psi]_\Gamma &= 0 && (1.52)
\end{aligned}$$

avec

$$\eta = \frac{\mu_1}{\mu_0} \quad \textit{et} \quad \alpha = \frac{1}{\mu_0}.$$

Inversement, si ψ désigne la solution du problème $(1.49)-(1.52)$*, alors le champ de vecteur $H = \operatorname{grad}\psi$ satisfait* $(0.12)-(0.13)$.

Preuve. Soit H solution de $(0.12)-(0.13)$. Le lemme de Poincaré global permet de déduire de (0.12) l'existence d'un potentiel scalaire ψ dans $W^1(\mathbb{R}^3)$ (satisfaisant donc automatiquement (1.52)), tel que

$$H = \operatorname{grad}\psi. \tag{1.53}$$

Ensuite, en tenant compte de (1.48) et du fait que h^s est à divergence nulle dans $\mathbb{R}^3$, nous obtenons en écrivant distinctement (0.13) dans Ω' et Ω :

$$\operatorname{div} H = 0,$$

ce qui permet de constater avec (1.53) que le potentiel scalaire ψ vérifie (1.49) et (1.50). Par ailleurs, en écrivant autrement le fait que le champ de vecteurs $\mu\,(H + h^s)$ est à divergence nulle dans $\mathbb{R}^3$, il suit avec (1.53) :

$$[(\mu\,(\operatorname{grad}\psi + h^s))\cdot n]_\Gamma = 0.$$

Ainsi, nous constatons que le potentiel scalaire ψ satisfait bien (1.51), avec les constantes indiquées.

Enfin, en considérant la solution ψ dans $W^1(\mathbb{R}^3)$ du problème $(1.49)-(1.52)$ où est posé $H = \operatorname{grad}\psi$, on montre aisément, que H vérifie $(0.12)-(0.13)$. □

Comme nous venons de le constater, le problème $(0.12)-(0.13)$, équivalent au problème $(1.49)-(1.52)$, s'interprête comme un problème extérieur pour un diélectrique parfait. Cette première remarque nous guidera dans la preuve de l'énoncé suivant où nous utilisons l'espace de Hilbert (m entier strictement positif) :

$$W^m(\Omega') = \{\psi\,;\, (1+r^2)^{\frac{|\alpha|-1}{2}}\,\partial^\alpha\psi \in L^2(\Omega'),\ \forall\,|\alpha|\le m\,\}.$$

Théorème 1.6.1 *Soient*

- *μ une fonction scalaire définie comme en* (1.48) *et*

- $h^s \in (H^m(\mathbb{R}^3))^3 \cap H(\operatorname{div}^0; \mathbb{R}^3)$ *avec* $m \geq 1$.

Alors, le problème (1.7) *admet une unique solution* (H, v) *où*

- $H|_{\Omega'} \in (W^m(\Omega'))^3$,
- $H|_{\Omega} \in (H^m(\Omega))^3$ *et*
- $v \in (H^{m+1}(\Omega))^3 \cap H_0(\operatorname{div}^0; \Omega)$.

Preuve. Soit $m \geq 1$ fixé. Comme h^s et μ vérifient respectivement les hypothèses (1.4) et (1.5), il découle du théorème 1.2.2 que le problème (1.7) admet une solution unique (H, v) dans l'espace $\mathcal{H} \times H_0(\operatorname{div}^0; \Omega)$. Par suite, le théorème 1.2.2 *ii*) affirme que le champ de vecteurs H est la solution du problème (0.12) – (0.13), ce dernier étant équivalent (conformément au lemme 1.6.1) au problème (1.49) – (1.52) dont la formulation variationnelle s'écrit :

$$\text{trouver } \psi \text{ dans } W^1(\mathbb{R}^3) \text{ tel que } \forall\, \kappa \in W^1(\mathbb{R}^3),$$

$$\eta\,(\operatorname{grad}\psi, \operatorname{grad}\kappa)_{(L^2(\Omega))^3} + (\operatorname{grad}\psi, \operatorname{grad}\kappa)_{(L^2(\Omega'))^3} = -\alpha < [\mu\, h^s \cdot n]_\Gamma, \kappa|_\Gamma > .$$

La régularité de la solution de ce problème dépend de celle de la fonction $[\mu\, h^s \cdot n]_\Gamma$. Comme $h^s \in (H^m(\mathbb{R}^3))^3$, il suit avec un théorème de trace (cf. e.g. [22]) que : $[\mu\, h^s \cdot n]_\Gamma \in H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Ensuite, avec Nédélec-Planchard [23], nous en déduisons que : l'application

$$\begin{array}{ccc} H^{m-1/2}(\Gamma) & \longrightarrow & H^{m+1}(\Omega) \\ [\mu\, h^s \cdot n]_\Gamma & \longmapsto & \psi|_\Omega \end{array}$$

est continue, tout comme

$$\begin{array}{ccc} H^{m-1/2}(\Gamma) & \longrightarrow & W^{m+1}(\Omega') \\ [\mu\, h^s \cdot n]_\Gamma & \longmapsto & \psi|_{\Omega'} \end{array}$$

où ψ est la solution du problème ci-dessus.

La relation (1.53) permet alors de constater que le champ de vecteurs H satisfait

$$\begin{aligned} H|_{\Omega'} &\in (W^m(\Omega'))^3, \\ H|_{\Omega} &\in (H^m(\Omega))^3. \end{aligned}$$

Intéressons-nous ensuite à la régularité du champ de vecteurs v. Le problème vérifié par celui-ci :

$$\left\{ \begin{array}{rclll} \operatorname{rot} v & = & \mu\,(H + h^s) & \text{dans} & \Omega\ , \\ \operatorname{div} v & = & 0 & \text{dans} & \Omega\ , \\ v \cdot n & = & 0 & \text{sur} & \Gamma \end{array} \right.$$

se présente comme un problème aux limites où le champ de vecteurs H apparaît comme une des données. Clairement, comme (par hypothèses et par régularité de H) nous avons $\mu\,(H + h^s)$ dans l'espace $(H^m(\Omega))^3$, il suit (cf. e.g. [20]) que : $v \in (H^{m+1}(\Omega))^3$. $\square$

En milieu hétérogène, il s'agit d'étendre les précédents résultats lorsque Ω est formé par des matériaux paramagnétiques Ω_i $(1 \leq i \leq M)$, séparés par des hypersurfaces Σ_i aussi régulières que Γ :

$$\Omega = (\bigcup_{i=1}^{M} \Omega_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{M-1} \Sigma_i)\,.$$

La perméabilité alors décrite :

$$\mu(x) \;=\; \begin{cases} \mu_0 & \text{si } x \in \Omega'\,, \\ \mu_i & \text{si } x \in \Omega_i \end{cases} \tag{1.54}$$

où $\mu_i \neq \mu_j$ si $i \neq j$, et $\mu_i > \mu_0$, présente un saut non nul sur Γ et Σ_i.

Comme dans le cas homogène, une remarque préliminaire à faire est de formuler le problème de transmission équivalent à $(0.12) - (0.13)$. Celui-ci consiste en la détermination d'un potentiel scalaire ψ dans $W^1(\mathbb{R}^3)$ tel que :

$$\Delta\psi \;=\; 0 \quad \text{dans} \quad \Omega'\,, \tag{1.55}$$

$$\Delta\psi \;=\; 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_i\,, \tag{1.56}$$

$$(\operatorname{grad}\psi\cdot\nu_i)|_{\mathrm{ext}\Omega_i} \;=\; \gamma\,(\operatorname{grad}\psi\cdot\nu_i)|_{\mathrm{int}\Omega_i} - \beta\,[\mu\, h^s\cdot\nu]_{\Sigma_i}\,, \tag{1.57}$$

$$(\operatorname{grad}\psi\cdot n)|_{\mathrm{ext}\Omega_i} \;=\; \eta\,(\operatorname{grad}\psi\cdot n)|_{\mathrm{int}\Omega_i} - \alpha\,[\mu\, h^s\cdot n]_{\Gamma}\,, \tag{1.58}$$

$$[\psi]_{\Sigma_i} \;=\; 0\,, \tag{1.59}$$

$$[\psi]_{\Gamma} \;=\; 0 \tag{1.60}$$

où ν_i désigne la normale à Σ_i.

$$\eta = \frac{\mu_i}{\mu_0} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1}{\mu_0}$$

dans le cas $\Sigma_i \cap \Gamma \neq \emptyset$; et si $\Sigma_i \cap \Sigma_j \neq \emptyset$:

$$\gamma = \frac{\mu_j}{\mu_i} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{\mu_i}\,.$$

Le problème $(1.55){-}(1.60)$ s'identifie à un problème extérieur pour plusieurs diélectriques parfaits où les conditions de transmission sur Σ_i sont données par (1.57) et (1.59) ; celles sur Γ étant exprimées par (1.58) et (1.60).

Les arguments cités dans le cas homogène et les techniques détaillées dans [23] suffisent pour en déduire que l'application

$$\begin{array}{ccc} H^{m-1/2}(\Gamma) & \longrightarrow & W^{m+1}(\Omega') \\ [\mu\, h^s \cdot n]_\Gamma & \longmapsto & \psi|_{\Omega'} \end{array}$$

est continue, tout comme

$$\begin{array}{ccc} H^{m-1/2}(\Sigma_i) & \longrightarrow & H^{m+1}(\Omega) \\ [\mu\, h^s \cdot n]_{\Sigma_i} & \longmapsto & \psi|_{\Omega_i} \end{array}$$

où ψ est la solution du problème $(1.55) - (1.60)$.

Ceci permet alors de constater que dans le cas hétérogène, nous avons aussi la version du théorème 1.6.1 :

Remarque 1.6.1 *Avec,*

- μ *une fonction scalaire satisfaisant* (1.54) *et*
- $h^s \in (H^m(\mathbb{R}^3))^3 \cap H(\mathrm{div}\,^0\,; \mathbb{R}^3)$, $m \geq 1$,

la solution (H, v) *du problème* (1.7) *peut être considérée telle que :*

- $H|_{\Omega'} \in (W^m(\Omega'))^3$,
- $H|_{\Omega_i} \in (H^m(\Omega_i))^3$, $1 \leq i \leq M$ *et*
- $v|_{\Omega_i} \in (H^{m+1}(\Omega_i))^3$, $1 \leq i \leq M$.

1.6.2 Régularité de la solution des problèmes (1.29) et (1.43)

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré que le champ magnétique de réaction possède la même régularité que le champ magnétique source, dans chaque matériau homogène formant Ω. Il ne s'agit pas ici d'une modification de ces résultats, mais d'une nouvelle écriture de ceux-ci.

Intéressons-nous d'abord au cas homogène où nous établissons le

Corollaire 1.6.1 *Soient*

- μ *une fonction donnée comme en* (1.48) *et*
- $h^s \in (H^m(\mathbb{R}^3))^3 \cap H(\mathrm{div}\,^0\,; \mathbb{R}^3)$ *avec* $m \geq 1$.

Alors, la solution $((H_\Omega, \varphi), v)$ *du problème* (1.29) *est telle que :*

- $(H_\Omega, \varphi) \in ((H^m(\Omega))^3 \times H^{m+\frac{1}{2}}(\Gamma)) \cap \mathcal{W}$ *et*

- $v \in (H^{m+1}(\Omega))^3 \cap H_0(\mathrm{div}^0\,;\,\Omega)$.

Preuve. Soit $m \geq 1$ fixé. Comme par hypothèse h^s et μ vérifient respectivement (1.4) et (1.5), il suit du théorème 1.4.1 que, le problème (1.29) admet une unique solution $((H_\Omega, \varphi), v)$ dans $\mathcal{W} \times H_0(\mathrm{div}^0\,;\,\Omega)$. En posant ensuite

$$H = \begin{cases} \mathrm{grad}\,\psi & \text{dans} \quad \Omega', \\ H_\Omega & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases}$$

où $\psi \in W^1(\Omega')$ désigne le prolongement harmonique de la fonction scalaire φ, le champ de vecteurs ainsi défini satisfait (0.12) − (0.13), d'après le corollaire 1.4.1.

Alors, avec la preuve du théorème 1.6.1, nous en déduisons que $v \in (H^{m+1}(\Omega))^3$, $H_\Omega \in (H^m(\Omega))^3$ et $\varphi \in H^{m+\frac{1}{2}}(\Gamma)$. □

Le précédent énoncé permet à son tour d'établir la régularité de la solution du problème (1.43), comme nous l'indiquons dans la preuve du

Corollaire 1.6.2 *Considérons*

- μ *une fonction donnée comme en* (1.48) *et*
- $h^s \in (H^m(\mathbb{R}^3))^3 \cap H(\mathrm{div}^0\,;\,\mathbb{R}^3)$ *avec* $m \geq 1$.

Alors, la solution $((H_\Omega, \varphi), w)$ *du problème* (1.43) *est telle que :*

- $(H_\Omega, \varphi) \in ((H^m(\Omega))^3 \times H^{m+\frac{1}{2}}(\Gamma)) \cap \mathcal{W}$ *et*
- $w \in (H^{m+2}(\Omega))^3 \cap W$.

Preuve. Cet énoncé s'établit en tenant compte du lien (cf. proposition 1.5.3) entre les problèmes (1.29) et (1.43). En effet, considérant la solution $((H_\Omega, \varphi), w)$ de (1.43), nous déterminons la solution $((H_\Omega, \varphi), v)$ de (1.29), en posant : $v = \mathrm{rot}\, w$. □

Notons enfin que dans le cas de l'hétérogénéité de Ω, on obtient encore les résultats donnés dans les corollaires 1.6.1 et 1.6.2, où ceux-ci sont alors écrits dans chaque milieu homogène Ω_i.

1.7 Conclusions

Après avoir introduit un problème mixte dont le champ magnétique de réaction dans $\mathbb{R}^3$ est l'inconnue principale, nous avons ensuite présenté une approche d'intégrale de frontière permettant de reformuler ce problème en, une formulation faisant intervenir un couplage entre le champ magnétique de réaction dans Ω et un potentiel scalaire surfacique. Celle-ci décrite en (1.29), a été par la suite, traduite en termes de potentiel-vecteur de courant pour introduire le problème (1.43).

L'approche variationnelle présentée dans ce chapitre, est adaptable au cas où on écrit les différents problèmes en champ magnétique total (comme inconnue physique). Notons par ailleurs que le champ magnétique de réaction déterminé par (1.29) et (1.43) est un champ de vecteurs à rotationnel nul, car nous avons simplifié le modèle physique, en supposant qu'aucune densité de courant autre que j n'existe dans l'espace. Dans le cas général, il suffit de considérer une densité de courant supplémentaire (créée par l'interaction entre l'inducteur Ω^s et le milieu magnétique Ω), qui apparaît alors comme une autre donnée des problèmes (1.29) et (1.43). Notons pour terminer que, si nous nous sommes restreints lors de l'étude de la régularité du champ magnétique aux cas où le milieu magnétique est homogène ou hétérogène, de tels contextes physiques sont cependant bien courants dans la pratique. Nous en envisagerons d'ailleurs dans le chapitre portant sur les simulations numériques.

Chapitre 2

Approximation par éléments finis mixtes des problèmes et analyse

Ce chapitre est réservé à la discrétisation des problèmes continus introduits précédemment. Avec les éléments finis mixtes qui seront utilisés, nous procèderons aux approximations conformes des différents espaces fonctionnels intervenant dans les formulations (1.29) et (1.43). Dans un paragraphe qui sera essentiellement consacré à la description de l'inconnue physique, il s'agira précisément de satisfaire une condition de raccordement entre le champ magnétique discrétisé et son potentiel surfacique associé ; en espérant déduire de celle-ci, une autre condition frontalière portant sur le champ magnétique, comme dans le cas continu. A (1.29) et (1.43), nous associerons un problème mixte, suivi d'une analyse correspondante. Les problèmes discrets alors introduits, utilisent un espace de dimension finie, nécessitant la discrétisation de la condition de divergence nulle. Nous constaterons, avec une technique de reformulation profondément liée à la structure des éléments finis employés, qu'il est bien plus simple de considérer des problèmes équivalents. Ceux-ci s'affranchissent en effet de plusieurs exigences numériques. Auparavant, nous ferons des rappels sur certains espaces des éléments finis pour fixer quelques notations utilisées dans les chapitres suivants.

2.1 Introduction

Les éléments finis considérés ici sont aussi connus sous le nom d'"éléments de Whitney". Ceux-ci inventés vers 1957 [24], ont été redécouverts par les numériciens à partir de 1975 en relation avec la recherche d'éléments finis "mixtes" [9], [10].

Nous commençons par présenter la triangulation du domaine et celui de sa frontière. Ensuite, nous faisons des rappels très brefs sur les différents types d'éléments finis en introduisant les espaces de dimension finie correspondants. Pour en terminer avec ce paragraphe, nous rappelerons une approche générale, formulée pour l'étude des problèmes mixtes discrets.

2.1.1 Maillage du domaine et de sa frontière

Nous considérons une triangulation de Ω comme un recouvrement $\mathcal{T}_h^1$ par une union finie de tétraèdres K :

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h^1} K$$

qui sont d'intérieurs non vides et tels que leur intersection est

- soit vide,
- soit réduite à un sommet,
- soit réduite à une arête ou à
- une facette.

En outre, pour tout élément K de $\mathcal{T}_h^1$, nous définissons par

- $h_K = \sup_{(x,y) \in K^2} |x - y|$ son diamètre et
- $\rho_K = \sup_{S \subset K} \operatorname{diam}(S)$ sa rondeur, où S désigne une sphère inscrite dans K et $\operatorname{diam}(S)$, son diamètre.

Nous admettrons que la triangulation $\mathcal{T}_h^1$ est régulière. Ainsi, pour tout élément K de $\mathcal{T}_h^1$, nous avons :

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq C\,,$$

où C est une constante fixée. Nous définissons par

$$h = \sup_{K \in \mathcal{T}_h^1} h_K\,,$$

le pas de $\mathcal{T}_h^1$ et noterons par rapport à cette triangulation :

- NS le nombre de sommets,
- NA le nombre d'arêtes,
- NF le nombre de facettes et
- NK le nombre d'éléments.

Avec les éléments de $\mathcal{T}_h^1$ ayant au moins une facette sur Γ, nous considérons une triangulation, notée $\mathcal{T}_h^2$, et définie comme une union finie de triangles T :

$$\Gamma = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h^2} T\,,$$

qui sont d'intérieurs non vides et tels que leur intersection est

- soit vide,

- soit réduite à un sommet ou à
- une arête.

Alors, un élément T d'une telle triangulation est tout simplement la trace sur la frontière Γ d'un tétraèdre K de $\mathcal{T}_h^1$. Nous admettons que la triangulation $\mathcal{T}_h^2$ ainsi définie est aussi régulière. Notons avec $\mathcal{T}_h^2$:

- ns le nombre de sommets,
- na le nombre d'arêtes et
- nf le nombre d'éléments.

Enfin, retenons que, Ω est considéré comme un ouvert borné simplement connexe, convexe et polyédrique de $\mathbb{R}^3$. Sa surface Γ est polyédrique, fermée et connexe.

2.1.2 Eléments finis d'arêtes de Nédélec

Nous rappelons ici une classe d'éléments finis proposée par Nédélec [9]. Soit K un élément de $\mathcal{T}_h^1$. Considérons P_k l'espace des polynômes sur $\mathbb{R}^3$ de degré inférieur ou égal à k, et le sous-espace $\tilde{P}_k$, des polynômes homogènes de degré k. Désignons par A_k, l'ensemble des degrés de liberté sur le tétraèdre K, défini comme suit :

- pour toute arête l, soient les moments

$$\int_l u \cdot t\, q\, ds \quad \forall\, q \in P_{k-1}$$

où t désigne le vecteur unitaire tangent de l ;

- pour toute facette f, soient les moments

$$\int_f (u \wedge n_f \cdot q)\, d\sigma \quad \forall\, q \in (P_{k-2})^3$$

où n_f désigne la normale à f ;

- soient enfin les moments

$$\int_K u \cdot q\, dx \quad \forall\, q \in (P_{k-3})^3 \,.$$

Considérons ensuite les sous-espaces vectoriels

$$S^k \;=\; \{u \in (\tilde{P}_k)^3 \;;\; u \cdot x = 0\,,\; x = (x_1, x_2, x_3)\}\,,$$

$$R^k \;=\; (P_{k-1})^3 \oplus S^k \,.$$

Alors, il résulte de [9] que le triplet (K, R^k, A_k) est un élément fini unisolvant et conforme dans l'espace $H(\mathrm{rot}\,;\Omega)$. On a la relation :

$$\dim R^k \;=\; \mathrm{card} A_k \;=\; \frac{k(k+2)(k+3)}{2}\,.$$

L'espace de dimension finie qui approche $H(\mathrm{rot}\,;\Omega)$ est défini comme suit :

$$\mathcal{H}_h \;=\; \{u_h \in H(\mathrm{rot}\,;\Omega)\;;\; u_h|_K \in R^k \;\;\forall\, K \in \mathcal{T}_h^1\}\,. \tag{2.1}$$

On a :

$$\dim \mathcal{H}_h \;=\; kNA + k(k-1)NF + \frac{k(k-1)(k-2)}{2}NK\,.$$

Dans le cas du degré minimal des polynômes, l'élément fini est alors donné par le triplet (K, R^1, A_1) où

- R^1 (aussi noté R dans la suite) est l'ensemble des déplacements rigides d'un solide, défini comme suit

$$R \;=\; \{u \in (P_1)^3\;;\; u = a + b \wedge x\;;\; a, b \in (P_0)^3\,,\; x = (x_1, x_2, x_3)\}$$

- et A_1 (aussi noté A dans la suite) est l'ensemble des six moments suivants

$$\int_l u \cdot t\, dl \;\;\forall\, u \in R$$

où l est une arête de K, de vecteur unitaire tangent t.

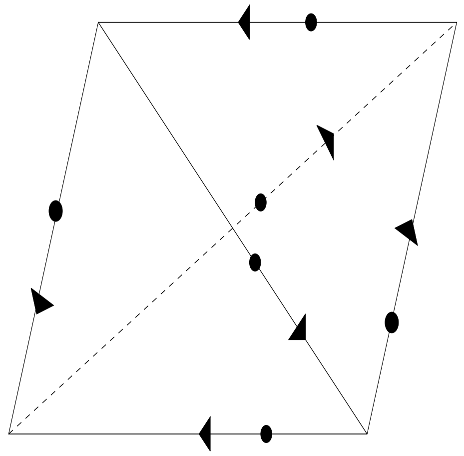


FIG. 2.1 – *Degrés de liberté de l'élément fini d'arêtes.*

Cet élément fini est symbolisé par la figure 2.1.

L'espace de dimension finie approchant $H(\mathrm{rot}\,;\Omega)$ est donné comme en (2.1), où alors $k = 1$. Un élément de cet espace est déterminé par les degrés de liberté pris sur toutes les arêtes de $\mathcal{T}_h^1$.

2.1.3 Eléments finis de facettes

Nous rappelons ici l'élément fini qui sert à construire les sous-espaces de $H(\mathrm{div}\,)$, (cf. [10], [9]). Considérons un élément K de $\mathcal{T}_h^1$, et désignons par B_k, l'ensemble formé par :

- les moments sur les facettes f de normale n_f :

$$\int_f u \cdot n_f \, q \, d\sigma \quad \forall \, q \in P_{k-1}$$

- et les moments

$$\int_K u \cdot q \, dx \quad \forall \, q \in (P_{k-2})^3 \, .$$

Introduisons ensuite l'espace vectoriel

$$D^k \;=\; (P_{k-1})^3 \oplus \tilde{P}_{k-1} \cdot x \; ; \; x = (x_1, x_2, x_3) \, .$$

Alors, il résulte que l'élément fini (K, D^k, B_k) est unisolvant et conforme dans l'espace $H(\mathrm{div}\; ; \Omega)$. On a la relation :

$$\dim D^k \;=\; \mathrm{card} B_k \;=\; \frac{k(k+1)(k+3)}{2} \, .$$

L'espace de dimension finie qui approche $H(\mathrm{div}\; ; \Omega)$ est :

$$U_h \;=\; \{ v_h \in H(\mathrm{div}\; ; \Omega) \; ; \; v_h|_K \in D^k \;\; \forall \, K \in \mathcal{T}_h^1 \} \, . \tag{2.2}$$

On a

$$\dim U_h \;=\; \frac{k(k+1)}{2} NF + \frac{(k+1)k(k-1)}{2} NK \, .$$

Dans le cas du degré minimal des polynômes, l'élément fini est donné par le triplet (K, D^1, B_1) où

- D^1 (encore noté D dans la suite) est défini comme suit

$$D \;=\; \{ v = a + c\, x \; ; \; c \in P_0 \, , a \in (P_0)^3 \, , x = (x_1, x_2, x_3) \}$$

- et B_1 est l'ensemble des quatre moments suivants

$$\int_f u \cdot n_f d\sigma \quad \forall \, u \in D$$

  où f est une facette du tétraèdre.

Cet élément fini est symbolisé par la figure 2.2.

L'espace de dimension finie approchant $H(\mathrm{div}\; ; \Omega)$ est alors donné comme en (2.2), avec $k = 1$. Un élément de cet espace est déterminé par les degrés de liberté pris sur toutes les facettes de $\mathcal{T}_h^1$.

Bien que les éléments finis rappelés ci-dessus soient d'ordre quelconque, nous nous limiterons, au cas de l'ordre minimal dans l'établissement de certains énoncés.

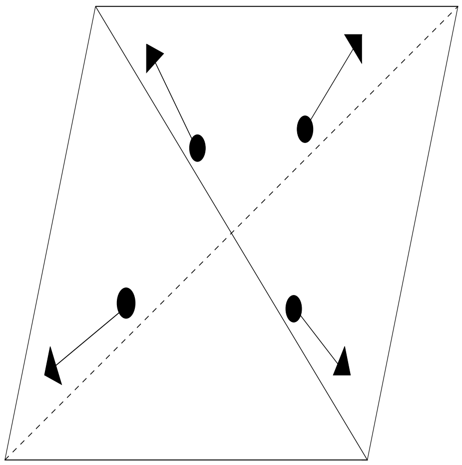


FIG. 2.2 – *Degrés de liberté de l'élément fini de facettes.*

2.1.4 Un principe variationnel abstrait

L'approche générale (cf. [20], [25]) rappelée ici, épouse en approximation numérique, le formalisme aussi introduit au chapitre 1, § 1.1.1. Nous reconsidérons donc ici, les notations introduites au § 1.1.1. Au problème (1.1) − (1.2) on associe une formulation discrète ensuite étudiée.

Soient X_h et M_h deux espaces de dimension finie tels que

$$X_h \subset X, \quad M_h \subset M.$$

Considérons, le problème variationnel associé à (1.1) − (1.2), reformulé dans les espaces X_h et M_h.

Pour l et χ donnés dans X' et M', trouver un couple $(u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h$ tel que

$$a(u_h, v_h) + b(v_h, \lambda_h) = < l, v_h > \quad \forall\, v_h \in X_h\,, \tag{2.3}$$

$$b(u_h, \eta_h) = < \chi, \eta_h > \quad \forall\, \eta_h \in M_h\,. \tag{2.4}$$

Avec $\chi \in M'$, définissons le sous-espace[1] de X_h,

$$V_h(\chi) = \{v_h \in X_h\,;\; b(v_h, \eta_h) = < \chi, \eta_h > \;\forall\, \eta_h \in M_h\}$$

et posons ensuite :

$$V_h = V_h(0)\,.$$

Associons aussi à (1.3) le problème discret défini comme suit.

1. L'analogue de $V(\chi)$ introduit dans le cas continu.

Pour l donné dans X', trouver u_h dans $V_h(\chi)$, tel que

$$a(u_h, v_h) = < l, v_h > \quad \forall\, v_h \in V_h\,. \tag{2.5}$$

Le problème (2.5) peut être perçu comme une approximation externe du problème (1.3) étant donné que $V_h(0)$ n'est pas forcément un sous-espace de $V(0)$.

On note la

Remarque 2.1.1 *Si (u_h, λ_h) est solution du problème $(2.3)-(2.4)$, alors $u_h \in V_h(\chi)$ et est solution du problème (2.5).*

On a aussi le

Théorème 2.1.1

- *Admettons que*

  i) $V_h(\chi) \neq \emptyset$

  ii) et qu'en outre, la forme bilinéaire a soit V_h-elliptique : il existe une constante $\alpha^\star$ strictement positive et indépendante de h telle que,

  $$a(u_h, u_h) \geq \alpha^\star\, ||u_h||_X^2 \quad \forall\, u_h \in V_h\,.$$

  Alors, le problème (2.5) admet une solution unique $u_h \in V_h(\chi)$ et il existe une constante C_1 strictement positive et indépendante de h telle que,

  $$||u - u_h||_X \,\leq\, C_1\,(\inf_{v_h \in V_h(\chi)} ||u - v_h||_X \,+\, \inf_{\eta_h \in M_h} ||\lambda - \eta_h||_M)\,.$$

- *Supposons la condition ii) satisfaite et que l'estimation dite "condition Inf-Sup" soit vérifiée : il existe une constante $\beta^\star$ strictement positive et indépendante de h telle que,*

  $$\inf_{\eta_h \in M_h} \sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h, \eta_h)}{||v_h||_X\,||\eta_h||_M} \,\geq\, \beta^\star\,.$$

  Alors, $V_h(\chi) \neq \emptyset$ et il existe un unique λ_h dans M_h tel que, le problème $(2.3)-(2.4)$ possède une unique solution (u_h, λ_h). En outre, il existe une constante C_2 strictement positive et indépendante de h telle que,

  $$||u - u_h||_X \,+\, ||\lambda - \lambda_h||_M \,\leq\, C_2\,(\inf_{v_h \in X_h} ||u - v_h||_X \,+\, \inf_{\eta_h \in M_h} ||\lambda - \eta_h||_M)\,.$$

Après ces rappels et notations, consacrons-nous à présent, à la discrétisation des problèmes (1.29) et (1.43).

2.2 Description du champ magnétique

Nous désirons associer à l'espace $\mathcal{W}$ noté en (1.26), un espace de dimension finie. Pour cela, il faudrait d'abord approcher l'espace $H(\mathrm{rot}\,;\Omega)$, où est recherché le champ magnétique de réaction. Ensuite, approcher l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ où, le potentiel de réaction magnétique est déterminé ; et enfin, assurer la condition de raccord sur la frontière entre ces deux inconnues.

Dans le cas des éléments finis d'ordre minimal, l'approximation de $H(\mathrm{rot}\ ;\Omega)$ se fait en adoptant l'espace de dimension finie $\mathcal{H}_h$ défini en (2.1), qui utilise l'élément fini (K, R, A). Examinons de plus près l'écriture d'un élément d'un tel espace.

Soient K un tétraèdre de $\mathcal{T}_h^1$ et s^i un sommet de K, affecté de coordonnées (s_1^i, s_2^i, s_3^i). Aux quatre sommets s^1, s^2, s^3 et s^4 de K, sont associées respectivement les coordonnées barycentriques $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 définies comme suit. Pour tout $x \in K$,

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i(x) \;=\; 1\ ,$$

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i(x) s^i \;=\; x\,.$$

Comme dans [21] où les éléments de Whitney sont décrits, tout champ de vecteurs de $\mathcal{H}_h$ ou de U_h peut s'écrire, en fonction des coordonnées barycentriques λ_i.

Nous identifions dans la suite les sommets s^i et s^j par la paire $\{i, j\}$; $1 \leq i, j \leq 4$, $s^i < s^j$. Ainsi, nous adoptons l'écriture $l \equiv ij$ pour signifier que l'arête l a pour sommets s^i et s^j. Le champ de vecteurs H_h élément de $\mathcal{H}_h$ s'écrit :

$$H_h \;=\; \sum_{l=1}^{6} H_h^l \,(\lambda_i \nabla\, \lambda_j - \lambda_j \nabla\, \lambda_i)\,, \tag{2.6}$$

où H_h^l représente la circulation de H_h le long de l'arête l. Cette inconnue scalaire[2] associée à l est telle que :

$$\int_{l'} H_h \cdot dl \;=\; \begin{cases} H_h^l & \text{si } l \text{ et } l' \text{ sont deux arêtes identiques,} \\ 0 & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

A chaque degré de liberté de l'élément fini, est associée une fonction de forme. Celle correspondant à l est

$$\lambda_i \nabla\, \lambda_j - \lambda_j \nabla\, \lambda_i\,.$$

Ainsi, il existe exactement six fonctions de formes linéairement indépendantes et formant une base dans chaque tétraèdre. L'élément fini considéré étant de classe $H(\mathrm{rot})$, la composante tangentielle de H_h est la même sur une face commune à deux tétraèdres. Alors,

2. Celle-ci est appelée "force magnétomotrice d'arêtes" par l'Electricien [21].

annuler les degrés de liberté sur une face revient à annuler les composantes tangentielles sur celle-ci. Par contre, sur une face commune à deux tétraèdres, la composante normale du champ de vecteurs H_h est discontinue. Cette discontinuité montre que le champ magnétique en un sommet commun à deux tétraèdres peut être différent suivant qu'on se trouve dans l'un ou l'autre des deux tétraèdres. La projection du champ magnétique le long de l est constante, égale à H_h^l.

Soit à présent la triangulation $\mathcal{T}_h^2$. La détermination de φ_h, représentant le potentiel scalaire de réaction magnétique discrétisé, se fait dans l'espace de dimension finie :

$$\mathcal{G}_h = \{\varphi_h \in C_0(\Gamma)\ ;\ \varphi_h|_T \in P_1\ \forall T \in \mathcal{T}_h^2\}\,. \tag{2.7}$$

Ainsi défini, $\mathcal{G}_h$ est un sous-espace de $H^1(\Gamma)$ (cf. e.g. [1], [23]). L'élément fini utilisé pour

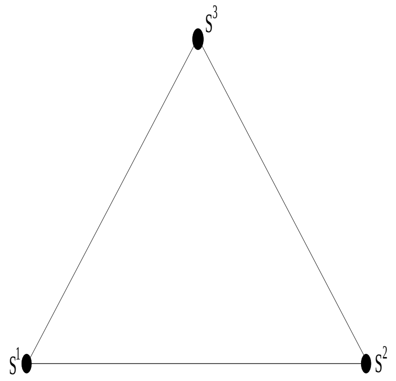


FIG. 2.3 – *Degrés de liberté de l'élément fini nodal surfacique.*

la définition de cet espace, est symbolisé par la figure 2.3.

Le potentiel scalaire φ_h s'écrit sur une facette frontalière T :

$$\varphi_h = \sum_{p=1}^{3} \varphi_h^p\, \lambda_p\,, \tag{2.8}$$

où φ_h^p représente la valeur de φ_h au sommet s^p de T. C'est l'inconnue scalaire associée à s^p. A chaque sommet, est associée une fonction de forme. Celle relative à s^p est donnée par la coordonnée barycentrique[3] λ_p. Ainsi, sur chaque facette frontalière, il existe exactement trois fonctions de forme formant une base. La valeur de φ_h en un sommet commun à deux facettes frontalières, est la même, suivant qu'on se trouve dans l'une ou l'autre des deux facettes. Un élément de l'espace $\mathcal{G}_h$ est déterminé par les degrés de liberté pris en tous les sommets de $\mathcal{T}_h^2$.

En imposant ensuite aux éléments (H_h, φ_h) de l'espace $\mathcal{H}_h \times \mathcal{G}_h$, de satisfaire une condition de raccordement sur la frontière comme dans le cas continu (cf. § 1.3.2), nous ferons une approximation conforme de l'espace $\mathcal{W}$.

3. Pour simplifier, nous utilisons la même notation pour distinguer une coordonnée barycentrique associée à un sommet interne et celle associée un sommet frontalier.

2.2.1 Condition de raccordement sur Γ

Nous nous proposons, afin de pouvoir satisfaire la condition de raccordement liant le champ magnétique de réaction et son potentiel surfacique associé, d'adopter sur toute arête frontalière l la projection suivante :

$$H_h^l = \int_l \operatorname{grad} \varphi_h \cdot dl \,.$$

Commençons par introduire à cet égard, la

Définition 2.2.1 *Nous désignons par $\mathcal{W}_h$ le sous-espace de $\mathcal{H}_h \times \mathcal{G}_h$ formé d'éléments (H_h, φ_h) où le potentiel scalaire φ_h est donné par* (2.8) *et le champ de vecteurs H_h écrit comme en* (2.6) *avec :*

$$H_h^l = \varphi_h^j - \varphi_h^i \,,$$

sur toute arête frontalière l $(l \equiv ij)$.

Nous avons la

Proposition 2.2.1 *Soit (H_h, φ_h) un élément de $\mathcal{W}_h$. Alors, il suit :*

$$H_h \wedge n = \operatorname{grad} \varphi_h \wedge n \;\; sur \;\; \Gamma \,. \tag{2.9}$$

Preuve. Soit (H_h, φ_h) dans $\mathcal{W}_h$. Par linéarité, il suffira de prouver la relation sur un élément géométrique de la triangulation $\mathcal{T}_h^2$. Soit alors T (cf. figure 2.3) cet élément. Il est immédiat avec la définition de $\mathcal{T}_h^2$, que T est une facette frontalière d'un tétraèdre K de la triangulation $\mathcal{T}_h^1$. Notons par n_T la normale sortante sur T par rapport au tétraèdre K.

Il suffit aussi par linéarité de faire la preuve lorsque la fonction φ_h est égale à l'une des fonctions barycentriques λ_i associée au sommet s^i de T ; $1 \leq i \leq 3$. Soit par exemple : $\varphi_h = \lambda_1$. Il suit alors,

$$\operatorname{grad} \varphi_h \wedge n_T = \nabla_T \, \lambda_1 \wedge n_T \,, \tag{2.10}$$

où ∇_T désigne le gradient par rapport à un système de coordonnées orthonormé permettant de représenter T. Suivant la définition de $\mathcal{W}_h$, le champ de vecteurs H_h est tel que :

$$\begin{aligned} H_h \wedge n_T \;\; &= \;\; (\lambda_1(s^2) - \lambda_1(s^1))(\lambda_1 \nabla_T \, \lambda_2 - \lambda_2 \nabla_T \, \lambda_1) \wedge n_T \\ &+ \;\; (\lambda_1(s^3) - \lambda_1(s^2))(\lambda_2 \nabla_T \, \lambda_3 - \lambda_3 \nabla_T \, \lambda_2) \wedge n_T \\ &+ \;\; (\lambda_1(s^3) - \lambda_1(s^1))(\lambda_1 \nabla_T \, \lambda_3 - \lambda_3 \nabla_T \, \lambda_1) \wedge n_T \,. \end{aligned}$$

i.e.,

$$H_h \wedge n_T = -(\lambda_1 \nabla_T \, \lambda_2 - \lambda_2 \nabla_T \, \lambda_1) \wedge n_T - (\lambda_1 \nabla_T \, \lambda_3 - \lambda_3 \nabla_T \, \lambda_1) \wedge n_T \,. \tag{2.11}$$

Sur T, on a la relation

$$\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \,, \tag{2.12}$$

qui permet d'écrire

$$\nabla_T \lambda_3 \;=\; -\nabla_T \lambda_1 - \nabla_T \lambda_2\,. \tag{2.13}$$

Alors, avec (2.12) et (2.13), il suit de la relation (2.11) :

$$H_h \wedge n_T \;=\; \nabla_T\,\lambda_1 \wedge n_T\,.$$

Ceci achève la preuve, compte tenu de (2.10) et du fait que, le raisonnement est le même lorsqu'on considère une union de facettes frontalières. □

La condition (2.9) traduit le raccordement à la frontière du champ magnétique de réaction discrétisé et de son potentiel surfacique associé. La continuité de la composante tangentielle du champ magnétique de réaction est ainsi satisfaite. Cette condition étant l'analogue du cas continu, nous l'appelerons, *condition de raccordement numérique.* Elle est directement prise en compte dans la définition de $\mathcal{W}_h$.

Suivant la proposition 2.2.1, nous pouvons affirmer que, $\mathcal{W}_h$ est un espace de dimension finie qui approche de manière conforme $\mathcal{W}$. Un élément de cet espace est entièrement déterminé par les degrés de liberté pris

- sur toutes les arêtes internes et
- sur tous les sommets frontaliers.

Nous notons :

$$\mathcal{W}_h \;=\; \{(H_h, \varphi_h) \in \mathcal{H}_h \times \mathcal{G}_h \;;\; H_h \wedge n = \mathrm{grad}\,\varphi_h \wedge n \;\text{ sur }\; \Gamma\}\,. \tag{2.14}$$

Comme nous pouvons le constater, le traitement numérique de la condition de raccordement continue (1.25) impose ainsi un choix rigoureux, plus sélectif d'espaces de dimension finie pour l'approximation de $\mathcal{W}$. Nous pensons par exemple au cas où on considère les éléments finis d'ordre supérieur.

2.2.2 Condition induite auto-satisfaite sur Γ

Tout comme lors de l'étude faite dans le cas continu, il paraît aussi naturel de constater que la condition de raccordement numérique entraîne une condition sur Γ, semblable à (1.27).

Nous avons en effet la

Proposition 2.2.2 *Soit (H_h, φ_h) un élément de l'espace $\mathcal{W}_h$. Alors,*

$$(\mathrm{rot}\, H_h) \cdot n \;=\; 0 \quad \textit{sur } \Gamma\,. \tag{2.15}$$

Preuve. Considérons (H_h, φ_h) dans $\mathcal{W}_h$. Par linéarité, il suffira de prouver l'égalité sur un élément géométrique de $\mathcal{T}_h^2$. Soit alors T (cf. figure 2.3) cet élément. Soit la normale n_T définie comme dans la preuve de la proposition 2.2.1.

Il suffit aussi par linéarité de faire la preuve lorsque la fonction φ_h est égale à l'une des fonctions barycentriques λ_i associée au sommet s^i du triangle T ; $1 \leq i \leq 3$. Faisons par exemple le choix $\varphi_h = \lambda_1$. Avec la définition de $\mathcal{W}_h$, le champ de vecteurs H_h est tel que

$$\begin{aligned}
(\operatorname{rot} H_h) \cdot n_T &= 2\,(\lambda_1(s^2) - \lambda_1(s^1))(\nabla_T\,\lambda_1 \wedge \nabla_T\,\lambda_2) \cdot n_T \\
&+ 2\,(\lambda_1(s^3) - \lambda_1(s^2))(\nabla_T\,\lambda_2 \wedge \nabla_T\,\lambda_3) \cdot n_T \\
&+ 2\,(\lambda_1(s^3) - \lambda_1(s^1))(\nabla_T\,\lambda_1 \wedge \nabla_T\,\lambda_3) \cdot n_T\,.
\end{aligned}$$

i.e.,

$$(\operatorname{rot} H_h) \cdot n_T \;=\; -2\,(\nabla_T\,\lambda_1 \wedge \nabla_T\,\lambda_2)\,.\,n_T - 2\,(\nabla_T\,\lambda_1 \wedge \nabla_T\,\lambda_3) \cdot n_T\,. \tag{2.16}$$

Sur T, nous avons la formule

$$\nabla_T\lambda_2 + \nabla_T\lambda_3 \;=\; -\nabla_T\lambda_1$$

qui permet de constater avec (2.16) qu'effectivement,

$$(\operatorname{rot} H_h) \cdot n_T \;=\; 0\,.$$

Ceci achève la preuve, puisque le raisonnement est le même lorsqu'on considère une union de facettes frontalières. □

Ainsi, comme dans le cas continu, la condition de raccordement numérique entraîne une contrainte sur le champ magnétique de réaction. Celle-ci, automatiquement satisfaite selon la définition de $\mathcal{W}_h$, peut être appréhendée comme une condition "naturelle".

Pour en terminer avec ce paragraphe, notons que (2.9) et (2.15) renseignent sur la restriction des éléments finis à considérer, pour la discrétisation des problèmes continus introduits dans ce travail.

2.3 Problème mixte

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que, les problèmes discrets qui seront étudiés par la suite, utilisent les éléments finis d'ordre minimal. Cependant, certains résultats qui seront notés, ne tiennent pas compte de l'ordre des éléments finis utilisés.

2.3.1 Formulation et étude du problème

Pour associer à (1.29) un problème discret, il faudrait auparavant approcher l'espace fonctionnel $H_0(\operatorname{div}^0\,;\,\Omega)$. A cet égard, faisons appel à l'espace discret U_h défini en (2.2) et introduisons

$$\mathcal{V}_h^\star \;=\; \{v_h \in U_h\;;\;\operatorname{div} v_h = 0 \;\text{ dans }\; \Omega\}\,,$$

un espace dont la dimension est égale à celle de U_h diminuée du nombre de relations indépendantes imposées par la condition de divergence nulle :

$$\dim \mathcal{V}_h^\star \;=\; \frac{k(k+1)}{2} NF + \frac{k(k+1)(2k-5)}{6} NK\,.$$

Considérons alors

$$\mathcal{V}_h \;=\; \{v_h \in \mathcal{V}_h^\star\;;\; v_h \cdot n = 0 \;\text{ sur }\; \Gamma\}$$

l'espace de dimension finie qui approche $H_0(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Omega)$. On a :

$$\dim \mathcal{V}_h \;=\; \dim \mathcal{V}_h^\star - \frac{k(k+1)}{2} nf + 1\,.$$

Le problème suivant est introduit dans le cas des éléments finis d'ordre minimal.

Pour h^s et μ vérifiant (1.4) et (1.5), trouver un couple (H_h, φ_h) dans $\mathcal{W}_h$ et un champ de vecteurs v_h dans $\mathcal{V}_h$ tels que

$$\begin{aligned}
(\mu\, H_h, \eta_h)_{(L^2(\Omega))^3} \;&+\; \mu_0 < \mathcal{P}(\varphi_h), \phi_h > \;-\; (\mathrm{rot}\,\eta_h, v_h)_{(L^2(\Omega))^3} \;=\\
-\;(\mu\, h^s, \eta_h)_{(L^2(\Omega))^3} \;&-\; \mu_0 < h^s \cdot n, \phi_h > \quad \forall\,(\eta_h, \phi_h) \in \mathcal{W}_h\,,\\
-\;(\mathrm{rot}\, H_h, u_h)_{(L^2(\Omega))^3} \;&=\; 0 \qquad\qquad \forall\, u_h \in \mathcal{V}_h\,.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Le problème ainsi décrit est la formulation discrète associée à (1.29), où les espaces de dimension finie

$$\mathcal{W}_h \subset \mathcal{W} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_h \subset H_0(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Omega)\,,$$

sont respectivement munis de la norme induite par celle de $\mathcal{W}$ et celle de $(L^2(\Omega))^3$.

Nous envisageons d'utiliser le formalisme général introduit au § 2.1.4 afin d'étudier le problème (2.17). Rappelons les formes $\underline{a}$, $\underline{b}$ et $\underline{l}$ introduites au chapitre 1, respectivement en (1.30), (1.31) et (1.32). Celles-ci permettent d'écrire (2.17) comme le problème : trouver $((H_h, \varphi_h), v_h) \in \mathcal{W}_h \times \mathcal{V}_h$ tel que

$$\begin{aligned}
\underline{a}((H_h, \varphi_h), (\eta_h, \phi_h)) \;+\; \underline{b}((\eta_h, \phi_h), v_h) \;&=\; \underline{l}((\eta_h, \phi_h)) \quad \forall\,(\eta_h, \phi_h) \in \mathcal{W}_h\,,\\
\underline{b}((H_h, \varphi_h), u_h) \;&=\; 0 \qquad\qquad \forall\, u_h \in \mathcal{V}_h\,,
\end{aligned}$$

où (H_h, φ_h) représente l'inconnue physique discrétisée et v_h apparaît comme un multiplicateur de Lagrange [25].

Pour ce qui suit, nous avons besoin de faire un rappel qui met en évidence les liens existant entre les différents espaces utilisés.

Rappelons d'abord l'espace

$$\mathcal{H}_h^0 \;=\; \{u_h \in \mathcal{H}_h\;;\; u_h \wedge n = 0 \;\text{ sur }\; \Gamma\}\,,$$

de dimension

$$\dim \mathcal{H}_h^0 \;=\; \dim \mathcal{H}_h - k\, na - k(k-1)nf\,.$$

Celui-ci sera muni de la norme induite par celle de $H(\mathrm{rot};\,\Omega)$.

Soit ensuite K un élément de la triangulation $\mathcal{T}_h^1$ et par ailleurs l'ensemble Σ_k des points dont les coordonnées barycentriques sont des multiples de $\frac{1}{k}$. Alors, l'élément fini (K, Σ_k, P_k) est unisolvant et conforme dans l'espace $H^1(\Omega)$. Les espaces de dimension finie associés à cet élément fini et à $\mathcal{T}_h^1$ sont :

$$\Psi_h \;=\; \{\psi_h \in H^1(\Omega)\;;\; \psi_h|_K \,\in P_k\,,\; \forall\, K \in \mathcal{T}_h^1\}\,, \tag{2.18}$$

de dimension

$$\dim \Psi_h \;=\; NS + (k-1)NA + \frac{(k-1)(k-2)}{2}NF + \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{6}NK$$

et

$$\Psi_h^0 \;=\; \Psi_h \cap H_0^1(\Omega)\,,$$

de dimension

$$\dim \Psi_h^0 \;=\; \dim \Psi_h - ns - (k-1)na - \frac{(k-1)(k-2)}{2}nf\,.$$

Alors, nous avons de [26], l'énoncé fondamental suivant.

Théorème 2.3.1 *Pour tout champ de vecteurs v_h de l'espace $\mathcal{V}_h^\star$ (respectivement de $\mathcal{V}_h$), il existe un unique champ de vecteurs u_h dans l'espace $\mathcal{H}_h$ (respectivement $\mathcal{H}_h^0$), tel que*

$$\mathrm{rot}\, u_h \;=\; v_h\,,$$

$$(u_h, \mathrm{grad}\,\psi_h)_{(L^2(\Omega))^3} \;=\; 0 \;\;\forall\, \psi_h \in \Psi_h\,(\textit{respectivement } \Psi_h^0)\,.$$

En outre,

$$||u_h||_{H(\mathrm{rot};\,\Omega)} \;\le\; C\,||v_h||_{(L^2(\Omega))^3}\,,$$

où C est une constante positive indépendante de h.

Faisons à présent la

Remarque 2.3.1 *L'application $(u_h, \varphi_h) \in \mathcal{W}_h \;\longrightarrow\; \mathrm{rot}\, u_h \in \mathcal{V}_h$ est bien défini. En fait, pour tout élément (u_h, φ_h) de $\mathcal{W}_h$, il est aisé de constater avec le théorème 2.3.1, que $\mathrm{rot}\, u_h$ est un champ de vecteurs de $\mathcal{V}_h^\star$. Ensuite, la proposition 2.2.2 montre qu'effectivement, $\mathrm{rot}\, u_h$ est bien un élément de $\mathcal{V}_h$. La condition de raccordement numérique permet donc d'assurer le lien entre les espaces $\mathcal{W}_h$ et $\mathcal{V}_h$.*

Soit le sous-espace de $\mathcal{W}_h$ noté,

$$\underline{V}_h \;=\; \{(u_h, \varphi_h) \in \mathcal{W}_h\;;\; \underline{b}((u_h, \varphi_h), v_h) = 0 \;\;\forall\, v_h \in \mathcal{V}_h\}\,.$$

Remarque 2.3.2 $\underline{V}_h$ *coïncide avec*

$$\{(u_h, \varphi_h) \in \mathcal{W}_h \ ; \ \operatorname{rot} u_h \ = \ 0 \ \ dans \ \ \Omega\} .$$

Il en découle que,

$$\underline{V}_h \subset \underline{V} .$$

Cette nouvelle écriture de $\underline{V}_h$ est en fait, une conséquence de la remarque 2.3.1.

Avec le lemme 1.4.1 et la remarque 2.3.2, nous pouvons considérer le

Lemme 2.3.1 *Il existe une constante $\alpha^\star$ strictement positive et indépendante de h, telle que*

$$\underline{a}((u_h, \varphi_h), (u_h, \varphi_h)) \ \geq \ \alpha^\star \, ||(u_h, \varphi_h)||^2_{\mathcal{W}} \quad \forall \, (u_h, \varphi_h) \in \underline{V}_h .$$

2.3.1.1 Condition Inf-Sup uniforme

Afin de conclure quant au caractère bien-posé du problème (2.17), introduisons la

Proposition 2.3.1 *Il existe une constante $\beta^\star$ strictement positive et indépendante de h, telle que*

$$\sup_{(u_h, \varphi_h) \in \mathcal{W}_h} \frac{\underline{b}((u_h, \varphi_h), v_h)}{||(u_h, \varphi_h)||_{\mathcal{W}}} \ \geq \ \beta^\star \, ||v_h||_{(L^2(\Omega))^3} \quad \forall \, v_h \in \mathcal{V}_h .$$

Preuve. Soit v_h un champ de vecteurs de $\mathcal{V}_h$. Du théorème 2.3.1, nous avons l'existence d'un champ de vecteurs u_h de $\mathcal{H}^0_h$ satisfaisant :

$$\operatorname{rot} u_h \ = \ v_h \, , \tag{2.19}$$

$$||u_h||_{H(\operatorname{rot}\, ; \, \Omega)} \ \leq \ C \, ||v_h||_{(L^2(\Omega))^3} \, , \tag{2.20}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de v_h et h.

Comme $u_h \wedge n = 0$ sur Γ, le couple $(\underset{\sim}{u}_h, \varphi_h) = (-u_h, 0)$ vérifie la condition (2.9), et est par conséquent un élément de $\mathcal{W}_h$. De plus,

$$||(\underset{\sim}{u}_h, \varphi_h)||_{\mathcal{W}} \ = \ ||u_h||_{H(\operatorname{rot}\, ; \, \Omega)} \, . \tag{2.21}$$

Il suit par ailleurs avec (2.19),

$$\underline{b}((\underset{\sim}{u}_h, \varphi_h), v_h) = ||v_h||^2_{(L^2(\Omega))^3} \, ,$$

et en tenant compte de (2.20), nous avons :

$$\underline{b}((\underset{\sim}{u}_h, \varphi_h), v_h) \ \geq \ \frac{1}{C} \, ||u_h||_{H(\operatorname{rot}\, ; \, \Omega)} \, ||v_h||_{(L^2(\Omega))^3} \, .$$

La relation (2.21) permet alors d'écrire

$$\underline{b}((\underset{\sim}{u}_h, \varphi_h), v_h) \ \geq \ \frac{1}{C} \, ||(\underset{\sim}{u}_h, \varphi_h)||_{\mathcal{W}} \, ||v_h||_{(L^2(\Omega))^3} \, ,$$

ce qui achève la preuve. □

La coercivité de la forme bilinéaire $\underline{a}$ annoncée dans le lemme 2.3.1 et la condition d'Inf-Sup assurée dans la proposition 2.3.1 permettent, sous le formalisme du § 2.1.4, d'etablir le

Théorème 2.3.2 *Le problème* (2.17) *admet une unique solution dans l'espace* $\mathcal{W}_h \times \mathcal{V}_h$.

2.3.1.2 Quelques estimations

Avec la structure des espaces utilisés dans (2.17), le théorème 2.3.1 permet d'établir la

Proposition 2.3.2 *Soit* $((H_h, \varphi_h), v_h) \in \mathcal{W}_h \times \mathcal{V}_h$ *la solution du problème* (2.17)*. Alors, il existe une constante* $C(\mu_0, \mu^\star) > 0$ *telle que*

$$||(H_h, \varphi_h)||_{\mathcal{W}} + ||v_h||_{(L^2(\Omega))^3} \;\leq\; C(\mu_0, \mu^\star)\,(||h^s||_{(L^2(\Omega))^3} \;+\; ||h^s \cdot n||_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\,).$$

Un énoncé conséquent du théorème 2.3.2 est le

Corollaire 2.3.1 *Soient* $((H, \varphi), v)$ *la solution du problème* (1.29) *et* $((H_h, \varphi_h), v_h)$ *celle du problème* (2.17)*. Alors, il existe une constante* $C > 0$ *indépendante de* h*, telle que*

$$\begin{aligned} ||H - H_h||_{H(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} \;+\; ||\varphi - \varphi_h||_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \;+\; ||v - v_h||_{(L^2(\Omega))^3} \;\leq \\ C\,(\inf_{\eta_h \in \mathcal{H}_h} ||H - \eta_h||_{H(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} \;+\; \inf_{\phi_h \in \mathcal{G}_h} ||\varphi - \phi_h||_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \;+\; \inf_{u_h \in \mathcal{V}_h} ||v - u_h||_{(L^2(\Omega))^3}\,). \end{aligned}$$

De cet énoncé, nous proposons dans la suite une estimation d'erreurs portant sur le champ magnétique. Cette estimation est introduite sous l'hypothèse où le milieu Ω est homogène ou hétérogène, la régularité de la solution $((H, \varphi), v)$ du problème (1.29) pouvant alors se justifier comme au paragraphe 1.6.2.

Commençons par considérer les opérateurs d'interpolation associés aux éléments finis utilisés pour la description du problème (2.17). Comme dans Nédélec [9], nous associons à l'élément fini (K, R^k, A_k), l'opérateur d'interpolation noté ici par Π_h^e et tel que :

$$\|H - \Pi_h^e H\|_{H(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} \;\leq\; C_e\, h^k\, \|H\|_{(H^{k+1}(\Omega))^3}\,, \tag{2.22}$$

avec $C_e > 0$ une constante indépendante de h. Dans le même ordre d'idées, notons par Π_h^f celui associé l'élément fini (K, D^k, B_k), qui satisfait (cf. e.g. [9]) :

$$\|v - \Pi_h^f v\|_{(L^2(\Omega))^3} \;\leq\; C_f\, h^k\, \|v\|_{(H^k(\Omega))^3}\,, \tag{2.23}$$

où $C_f > 0$ est une constante indépendante de h. Soit enfin, Π_h^v l'opérateur de projection orthogonale qui envoie $L^2(\Gamma)$ sur l'espace de dimension finie $\mathcal{G}_h$. Nous avons, avec [1], [23] :

$$\|\varphi - \Pi_h^v \varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \;\leq\; C_v\, h^{s-\frac{1}{2}}\, \|\varphi\|_{H^s(\Gamma)} \tag{2.24}$$

où $\frac{1}{2} < s \leq 2$, et C_v une constante strictement positive, indépendante de h.

Alors, avec le corollaire 2.3.1 et les relations (2.22) − (2.24), nous obtenons en utilisant les techniques standard l'estimation donnée dans la

Proposition 2.3.3 *Soit* $((H, \varphi), v)$ *la solution du problème* (1.29) *et* $((H_h, \varphi_h), v_h)$ *celle de* (2.17). *Alors, il suit*

$$\|H - H_h\|_{H(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} + \|\varphi - \varphi_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|v - v_h\|_{(L^2(\Omega))^3} \;\leq\; C(\mu_0, \mu^\star, C_e, C_f, C_v)\, h$$

où $C(\mu_0, \mu^\star, C_e, C_f, C_v) > 0$.

Signalons que l'estimation ainsi donnée n'est pas optimale vis-à-vis de H et φ.

Pour en conclure avec ce paragraphe, notons que, si (2.17) se décrit comme un problème bien-posé, il présente néanmoins des difficultés importantes au niveau de la mise en œuvre numérique effective. Outre le fait que les différents espaces d'éléments finis auxquels il fait appel nécessitent une mise en œuvre peu souple, le problème (2.17) réclame une prise en compte de la condition : $\operatorname{div} v_h = 0$. Celle-ci nécessite une attention particulière [19]. Nous nous proposons tout de même de nous intéresser à un autre problème discret paraissant beaucoup plus commode pour une mise en œuvre. Nous envisageons pour cela, d'introduire une formulation dérivant de (2.17) et s'affranchissant alors du traitement de la condition de divergence nulle.

2.4 Problème mixte avec potentiel-vecteur de courant

2.4.1 Formulation et étude du problème

Nous présentons ici un problème qui admet pour inconnues, le couple constitué du champ magnétique de réaction discrétisé et de son potentiel surfacique associé puis, un potentiel-vecteur de courant. Celui-ci s'introduit en écrivant autrement la seconde inconnue du problème (2.17), ou alors, en discrétisant directement le problème (1.43) écrit en potentiel-vecteur de courant.

Nous associons à W défini en (1.42) l'espace de dimension finie

$$W_h \;=\; \{w_h \in \mathcal{H}_h^0 \;;\;\; (w_h, \operatorname{grad}\psi_h)_{(L^2(\Omega))^3} \;=\; 0 \quad \forall\, \psi_h \in \Psi_h^0\}$$

qui sera muni de la norme induite par celle de $H(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)$, et nous considérons le problème discret associé à (1.43) défini comme suit.

Pour h^s et μ vérifiant (1.4) et (1.5), trouver un couple (H_h, φ_h) dans l'espace $\mathcal{W}_h$ et un potentiel-vecteur w_h de W_h tels que

$$\begin{aligned}
(\mu\, H_h, \eta_h)_{(L^2(\Omega))^3} \quad &+ \quad \mu_0 \, < \mathcal{P}(\varphi_h), \phi_h > \quad - (\mathrm{rot}\, \eta_h, \mathrm{rot}\, w_h)_{(L^2(\Omega))^3} \quad = \\
- \; (\mu\, h^s, \eta_h)_{(L^2(\Omega))^3} \quad &- \quad \mu_0 \, < h^s \cdot n, \phi_h > \quad \forall\, (\eta_h, \phi_h) \in \mathcal{W}_h \,, \\
- \; (\mathrm{rot}\, H_h, \mathrm{rot}\, \pi_h)_{(L^2(\Omega))^3} \quad &= \quad 0 \qquad \forall\, \pi_h \in W_h \,.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Il s'agit essentiellement ici de l'étude de (2.25). Commençons par rappeler les formes $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$ et $\underline{\underline{l}}$ introduites au chapitre 1, respectivement en (1.44), (1.45) et (1.46). Celles-ci permettent d'écrire (2.25) comme le problème: trouver $((H_h, \varphi_h), w_h) \in \mathcal{W}_h \times W_h$ tel que

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{a}}((H_h, \varphi_h), (\eta_h, \phi_h)) \quad + \quad \underline{\underline{b}}((\eta_h, \phi_h), w_h) \quad &= \quad \underline{\underline{l}}((\eta_h, \phi_h)) \quad \forall\, (\eta_h, \phi_h) \in \mathcal{W}_h \,, \\
\underline{\underline{b}}((H_h, \varphi_h), \pi_h) \quad &= \quad 0 \qquad \forall\, \pi_h \in W_h \,.
\end{aligned}$$

Soit le sous-espace de $\mathcal{W}_h$ noté

$$\underline{\underline{V}}_h = \{(u_h, \varphi_h) \in \mathcal{W}_h \; ; \; \underline{\underline{b}}((u_h, \varphi_h), w_h) = 0 \;\; \forall\, w_h \in W_h\} \,.$$

Lemme 2.4.1 $\underline{\underline{V}}_h$ *coïncide avec*

$$\underline{\underline{V}}_h(0) = \{(u_h, \varphi_h) \in \mathcal{W}_h \; ; \; \mathrm{rot}\, u_h = 0 \;\; \textit{dans} \;\; \Omega\} \,.$$

Preuve. Il est immédiat que tout élément de $\underline{\underline{V}}_h(0)$ est aussi celui de $\underline{\underline{V}}_h$. Considérons maintenant (u_h, φ_h) dans $\underline{\underline{V}}_h$. Etant donné que celui-ci est un élément de $\mathcal{W}_h$, il suit, par la remarque 2.3.1, que le champ de vecteurs $\mathrm{rot}\, u_h$ est dans $\mathcal{V}_h$. Le théorème 2.3.1 donne alors lieu à l'existence d'un potentiel-vecteur $\underset{\sim}{w_h}$ dans l'espace W_h tel que

$$\mathrm{rot}\; \underset{\sim}{w_h} \; = \; \mathrm{rot}\, u_h \,,$$

ce qui permet d'écrire

$$\underline{\underline{b}}((u_h, \varphi_h), \; \underset{\sim}{w_h}) \; = \; -||\, \mathrm{rot}\, u_h||^2_{(L^2(\Omega))^3} \,.$$

Et comme par hypothèse,

$$\underline{\underline{b}}((u_h, \varphi_h), \; \underset{\sim}{w_h}) \; = \; 0 \,,$$

il suit que (u_h, φ_h) est bien un élément de $\underline{\underline{V}}_h(0)$. □

Cette nouvelle écriture de $\underline{\underline{V}}_h$ montre que,

$$\underline{\underline{V}}_h \subset \underline{\underline{V}} \,.$$

Ceci permet avec les lemmes 1.5.2 et 2.4.1, d'établir l'estimation donnée dans le

Lemme 2.4.2 *Il existe une constante $\alpha^\star$ strictement positive et indépendante de h, telle que*

$$\underline{\underline{a}}((u_h, \varphi_h), (u_h, \varphi_h)) \; \geq \; \alpha^\star \, ||(u_h, \varphi_h)||^2_{\mathcal{W}} \quad \forall\, (u_h, \varphi_h) \in \underline{\underline{V}}_h \,.$$

Afin de conclure quant à la nature du problème (2.25), commençons par faire la

Remarque 2.4.1 *Pour tout élément w_h de l'espace W_h, nous avons [26]:*

$$||w_h||_{(L^2(\Omega))^3} \;\leq\; C\,||\,\mathrm{rot}\; w_h||_{(L^2(\Omega))^3}$$

où C est une constante strictement positive indépendante de h.

Etablissons ensuite la

Proposition 2.4.1 *Il existe une constante $\beta^\star$ strictement positive et indépendante de h, telle que*

$$\sup_{(u_h,\varphi_h)\,\in\,\mathcal{W}_h} \frac{\underline{\underline{b}}((u_h,\varphi_h),w_h)}{||(u_h,\varphi_h)||_{\mathcal{W}}} \;\geq\; \beta^\star\,||w_h||_W \quad \forall\, w_h \in W_h\,.$$

Preuve. Soit w_h un élément de W_h. Il est immédiat que, le couple $(u_h,0) = (-w_h,0)$ satisfait la condition de raccordement numérique, et est par conséquent un élément de $\mathcal{W}_h$. De plus,

$$||(u_h,0)||_{\mathcal{W}} \;=\; ||w_h||_{H(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)}\,. \tag{2.26}$$

Par ailleurs, nous avons

$$\underline{\underline{b}}((u_h,0),w_h) \;=\; ||\,\mathrm{rot}\; w_h||^2_{(L^2(\Omega))^3}\,.$$

Il existe donc, selon la remarque 2.4.1, une constante C indépendante de h telle que:

$$\underline{\underline{b}}((u_h,0),w_h) \;\geq\; C\,||w_h||^2_{H(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)}\,.$$

La relation (2.26) permet alors d'écrire

$$\underline{\underline{b}}((w_h,0),w_h) \;\geq\; C\,||(u_h,0)||_{\mathcal{W}}\,||w_h||_{H(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)}\,,$$

ce qui achève la preuve. □

Cette proposition et le lemme 2.4.2 permettent d'établir le

Théorème 2.4.1

- *Le problème* (2.25) *admet une solution unique dans l'espace $\mathcal{W}_h \times W_h$ et*
- *il existe une constante $C(\mu_0,\mu^\star) > 0$ telle que*

$$||(H_h,\varphi_h)||_{\mathcal{W}} + ||w_h||_{H(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} \;\leq\; C(\mu_0,\mu^\star)\,(||h^s||_{(L^2(\Omega))^3} \,+\, ||h^s\cdot n||_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)})\,.$$

Le lemme 2.4.2 et la proposition 2.4.1 permettent de justifier le premier point de cet énoncé, tandis que, le second point s'établit grâce au théorème 2.3.1 et à la remarque 2.4.1.

Le lien entre (2.17) et (2.25) est exprimé dans la proposition suivante, qu'on obtient de manière aisée, en utilisant le théorème 2.3.1.

Proposition 2.4.2 *Soit* $((H_h, \varphi_h), w_h) \in \mathcal{W}_h \times W_h$ *solution du problème* (2.25). *Alors, il existe un champ de vecteurs* v_h *dans l'espace* $\mathcal{V}_h$ *tel que* $((H_h, \varphi_h), v_h)$ *soit solution du problème mixte* (2.17).

Réciproquement, soit $((H_h, \varphi_h), v_h) \in \mathcal{W}_h \times \mathcal{V}_h$ *solution du problème* (2.17). *Alors, il existe un potentiel-vecteur* w_h *dans* W_h *tel que* $((H_h, \varphi_h), w_h)$ *soit solution du problème* (2.25).

Le problème (2.25), exprimé en potentiel-vecteur de courant, fait intervenir dans l'espace de ces potentiels une dualisation de la condition de divergence nulle. Cette condition, ainsi exprimée, ne peut être considérée pour une mise en œuvre numérique.

2.5 Problème mixte reformulé

Nous présentons ici un problème discret issu du problème mixte (2.25), alors destiné, à une mise en œuvre numérique effective. L'équation variationnelle, traduisant la condition de divergence nulle, est explicitement considérée. Il s'agira donc, d'une reformulation, de l'inconnue auxiliaire de (2.25).

Commençons par introduire avec Nédélec [26], l'énoncé suivant, conséquence du théorème 2.3.1.

Théorème 2.5.1 *Tout élément* u_h *de l'espace* $\mathcal{H}_h$ *(respectivement* $\mathcal{H}_h^0$*) s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$u_h = \operatorname{grad} \psi_h + \eta_h \,,$$

où $\psi_h \in \Psi_{h/\mathrm{R}}$ *(respectivement* Ψ_h^0*),* $\eta_h \in \mathcal{H}_h$ *(respectivement* $\mathcal{H}_h^0$*) et vérifie les relations :*

$$(\eta_h, \operatorname{grad} \kappa_h)_{(L^2(\Omega))^3} = 0 \;\; \forall\, \kappa_h \in \Psi_h \; (\textit{respectivement } \Psi_h^0) \,.$$

En outre,

$$||\eta_h||_{H(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} \leq C \, ||\operatorname{rot} u_h||_{(L^2(\Omega))^3} \,,$$

$$||\psi_h||_{H^1(\Omega)/\mathrm{R}} \leq C \sup_{\kappa_h \in \Psi_h} \frac{|(u_h, \operatorname{grad} \kappa_h)_{(L^2(\Omega))^3}|}{||\operatorname{grad} \kappa_h||_{(L^2(\Omega))^3}} \,.$$

Considérons à présent le problème variationnel qui consiste à déterminer un couple (H_h, φ_h) élément de $\mathcal{W}_h$ et un potentiel-vecteur w_h dans $\mathcal{H}_h^0$ tels que

$$\begin{aligned}
(\mu\, H_h, \eta_h)_{(L^2(\Omega))^3} \quad + \quad \mu_0 \ < \mathcal{P}(\varphi_h), \phi_h > \quad - (\mathrm{rot}\, \eta_h, \mathrm{rot}\, w_h)_{(L^2(\Omega))^3} \quad = \\
-\ (\mu\, h^s, \eta_h)_{(L^2(\Omega))^3} \quad - \quad \mu_0 \ < h^s \cdot n, \phi_h > \quad \forall\, (\eta_h, \phi_h) \in \mathcal{W}_h\,, \\
-\ (\mathrm{rot}\, H_h, \mathrm{rot}\, \pi_h)_{(L^2(\Omega))^3} \quad = \quad 0 \qquad\qquad \forall\, \pi_h \in \mathcal{H}_h^0\,,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$(w_h, \mathrm{grad}\, \psi_h)_{(L^2(\Omega))^3} \ = \ 0 \qquad\qquad \forall\, \psi_h \in \Psi_h^0\,. \tag{2.28}$$

2.5.1 Etude du problème reformulé

Nous examinons ici le problème discret $(2.27) - (2.28)$. Commençons par noter le

Lemme 2.5.1 *Le problème qui consiste à trouver u_h dans l'espace $\mathcal{H}_h$ (respectivement dans l'espace $\mathcal{H}_h^0$) tel que*

$$\mathrm{rot}\, u_h \ = \ 0\,, \tag{2.29}$$

$$(u_h, \mathrm{grad}\, \psi_h)_{(L^2(\Omega))^3} \ = \ 0 \ \ \forall\, \psi_h \in \Psi_h \ (\textit{respectivement } \Psi_h^0)\,, \tag{2.30}$$

admet une solution unique

$$u_h \ = \ 0\,.$$

Preuve. Considérons u_h un élément de $\mathcal{H}_h$ (respectivement de $\mathcal{H}_h^0$) satisfaisant le système $(2.29) - (2.30)$. Alors, le théorème de Stokes permet d'écrire de (2.29) :

$$u_h \ = \ \mathrm{grad}\, \kappa_h\,,$$

où $\kappa_h \in \Psi_h$ (respectivement Ψ_h^0), compte tenu des propriétés de l'élément fini (K, R^k, A_k). En faisant ensuite dans (2.30) le choix $\psi_h = \kappa_h$, il vient : $u_h \ = \ 0$ □

Nous pouvons à présent prouver le

Théorème 2.5.2 *Le problème* $(2.27) - (2.28)$ *admet une solution unique dans l'espace $\mathcal{W}_h \times \mathcal{H}_h^0$.*

Preuve. Désignons par $((H_h^1, \varphi_h^1), w_h^1)$ et $((H_h^2, \varphi_h^2), w_h^2)$ dans $\mathcal{W}_h \times \mathcal{H}_h^0$, deux solutions du problème $(2.27) - (2.28)$. Posons ensuite :

$$H_h \ = \ H_h^1 - H_h^2\,, \quad \varphi_h \ = \ \varphi_h^1 - \varphi_h^2 \ \text{et} \ w_h \ = \ w_h^1 - w_h^2\,.$$

Alors, de la première équation du système formé par (2.27), il suit

$$(\mu\, H_h, \eta_h)_{(L^2(\Omega))^3} \ + \ \mu_0 \ < \mathcal{P}(\varphi_h), \phi_h > \ - (\mathrm{rot}\, \eta_h, \mathrm{rot}\, w_h)_{(L^2(\Omega))^3} \ = \ 0 \ \ \forall\, (\eta_h, \phi_h) \in \mathcal{W}_h\,. \tag{2.31}$$

De la deuxième équation du même système nous déduisons

$$(\mathrm{rot}\, H_h, \mathrm{rot}\, \pi_h)_{(L^2(\Omega))^3} \;=\; 0 \;\; \forall\, \pi_h \in \mathcal{H}_h^0 \,. \tag{2.32}$$

Considérons à présent le système (2.31) − (2.32) et faisons le choix :

$$\eta_h \;=\; H_h \,, \quad \phi_h \;=\; \varphi_h \text{ et } \pi_h \;=\; w_h \,.$$

Celui-ci entraîne dans (2.31),

$$(\mu\, H_h, H_h)_{(L^2(\Omega))^3} \;+\; \mu_0 \; < \mathcal{P}(\varphi_h), \varphi_h > \; - (\mathrm{rot}\, H_h, \mathrm{rot}\, w_h)_{(L^2(\Omega))^3} \;=\; 0 \,,$$

et dans (2.32),

$$(\mathrm{rot}\, H_h, \mathrm{rot}\, w_h)_{(L^2(\Omega))^3} \;=\; 0 \,.$$

Ceci permet d'écrire,

$$(\mu\, H_h, H_h)_{(L^2(\Omega))^3} \;+\; \mu_0 \; < \mathcal{P}(\varphi_h), \varphi_h > = \; 0 \,,$$

puis, avec le lemme 2.4.2, nous avons :

$$H_h \;=\; 0 \quad \text{et} \quad \varphi_h = 0 \,.$$

Le système (2.31) − (2.32) fournit alors l'équation variationnelle :

$$(\mathrm{rot}\, \eta_h, \mathrm{rot}\, w_h)_{(L^2(\Omega))^3} \;=\; 0 \;\; \forall\, (\eta_h, \phi_h) \in \mathcal{W}_h \,,$$

qui permet de constater que :

$$\mathrm{rot}\, w_h \;=\; 0 \,. \tag{2.33}$$

En outre, avec la relation (2.28) qui montre que,

$$(w_h, \mathrm{grad}\, \psi_h)_{(L^2(\Omega))^3} \;=\; 0 \quad \forall\, \psi_h \in \Psi_h^0 \,, \tag{2.34}$$

le lemme 2.5.1 indique clairement qu'il existe un unique potentiel-vecteur satisfaisant (2.33) − (2.34) :

$$w_h \;=\; 0 \,,$$

ce qui achève la preuve. □

Notons, grâce au théorème 2.5.1, que (2.25) et (2.27) − (2.28) sont deux problèmes équivalents.

Le problème (2.27) − (2.28) s'affranchit d'une difficulté numérique, à savoir, la discrétisation de la condition de divergence nulle du potentiel-vecteur de courant [19]. Cette condition est prise en compte d'une façon relativement simple et explicite dans (2.28). Elle est dualisée et n'intervient plus dans les espaces vectoriels comme avec (2.17) et (2.25). Par ailleurs, le problème (2.27) − (2.28) ne fait appel qu'aux éléments finis d'arêtes et nodaux, contrairement à (2.17) qui nécessite en plus la considération des éléments finis de facettes. Si (2.27) − (2.28) paraît plus adéquat pour une mise en œuvre numérique simple, notons que, celui-ci fournit un système dont la matrice est rectangulaire. Ceci impose donc, une résolution numérique peu commode et délicate, même si le système fournit par (2.27) − (2.28) est surdimensionné.

2.5.2 Un problème intermédiaire

Comme il a été constaté dans la preuve du théorème 2.5.2, l'équation variationnelle (2.28) est indispensable, pour la détermination d'une façon unique du potentiel-vecteur de courant. Toutefois, sans tenir compte de celle-ci, la formulation variationnelle obtenue détermine encore de manière unique l'inconnue physique discrétisée.

Considérons le problème discret (2.27) – (2.28), où est alors supprimée la relation (2.28), et écrivons la formulation variationnelle qui en découle.

Trouver un élément $((H_h, \varphi_h), w_h)$ de $\mathcal{W}_h \times \mathcal{H}_h^0$ tel que

$$\begin{array}{rclcl} (\mu\, H_h, \eta_h)_{(L^2(\Omega))^3} & + & \mu_0 < \mathcal{P}(\varphi_h), \phi_h > & - (\mathrm{rot}\, \eta_h, \mathrm{rot}\, w_h)_{(L^2(\Omega))^3} & = \\ -\ (\mu\, h^s, \eta_h)_{(L^2(\Omega))^3} & - & \mu_0 < h^s \cdot n, \phi_h > & \forall\, (\eta_h, \phi_h) \in \mathcal{W}_h\,, & \\ -\ (\mathrm{rot}\, H_h, \mathrm{rot}\, \pi_h)_{(L^2(\Omega))^3} & = & 0 & \forall\, \pi_h \in \mathcal{H}_h^0\,, & \end{array} \tag{2.35}$$

Si le théorème 2.5.2 indique que ce problème n'admet pas une solution unique, nous avons toutefois le

Théorème 2.5.3 *Le problème* (2.35) *admet une solution* $((H_h, \varphi_h), w_h)$ *dans* $\mathcal{W}_h \times \mathcal{H}_h^0$ *telle que,*

i) (H_h, φ_h) *est unique dans* $\underline{\underline{V}}_h$ *et*

ii) $\mathrm{rot}\, w_h$ *est unique.*

Preuve.

i) Avec les arguments déjà cités dans la preuve du théorème 2.5.2, le problème (2.35) admet une solution $((H_h, \varphi_h), w_h)$ dans $\mathcal{W}_h \times \mathcal{H}_h^0$, où (H_h, φ_h) est unique. En outre, il suit avec le formalisme du § 2.1.4, que (H_h, φ_h) est élément de $\underline{\underline{V}}_h$.

ii) Considérons une autre solution $((H_h, \varphi_h), w_h^1)$ dans $\mathcal{W}_h \times \mathcal{H}_h^0$ de (2.35). De la première équation variationnelle de (2.35), nous avons :

$$(\mathrm{rot}\, \eta_h, \mathrm{rot}(w_h - w_h^1))_{(L^2(\Omega))^3} \;=\; 0 \quad \forall\, (\eta_h, \phi_h) \in \mathcal{W}_h\,.$$

Posons ensuite $\eta_h = w_h - w_h^1$ et $\phi_h = 0$: (η_h, ϕ_h) satisfait la condition de raccordement numérique et est bien un élément de $\mathcal{W}_h$. Ce choix exprimé dans la relation ci-dessus entraîne donc :

$$||\, \mathrm{rot}(w_h - w_h^1)||_{(L^2(\Omega))^3} \;=\; 0\,,$$

ce qui achève la preuve. $\square$

Le problème (2.35) fournit un système dont la matrice est carrée, contrairement au problème (2.27) – (2.28).

Comme l'inconnue physique est déterminée de manière unique par (2.17), (2.27) – (2.28) et (2.35), nous pouvons affirmer d'un point de vue modélisation que, ces problèmes sont aussi intéressants l'un que l'autre. Mieux, le problème mixte (2.35) conduit à une mise en œuvre numérique beaucoup plus commode que celle de (2.17) et (2.27) – (2.28). En revanche, sa principale défaillance réside dans l'étude de l'estimation d'erreurs portant sur le champ magnétique. Toutefois, nous avons l'énoncé suivant qui s'établit avec le théorème 2.3.1, et qui met en exergue le lien entre (2.17) et (2.35):

Proposition 2.5.1 *Soit* $((H_h, \varphi_h), w_h)$ *dans l'espace* $\mathcal{W}_h \times \mathcal{H}_h^0$ *une solution du problème* (2.35). *Alors,* $((H_h, \varphi_h), \mathrm{rot}\, w_h)$ *est la solution du problème* (2.17).

2.6 Conclusions et remarques

Après avoir introduit le problème mixte (2.17) qui requiert à la fois les éléments finis nodaux surfaciques, d'arêtes et de facettes, et qui tient de plus compte de la discrétisation de la condition de divergence nulle, nous abandonnons celui-ci après reformulation, au profit du problème (2.27) – (2.28). Ce dernier s'affranchit alors de la représentation de la condition de divergence nulle, ainsi que, de l'emploi des éléments finis de facettes. Il en est de même pour le problème mixte (2.35). Celui-ci est introduit dans la perspective d'une mise en œuvre numérique plus commode que celle de (2.27) – (2.28). Le problème (2.17) ne fera donc pas l'objet d'une résolution numérique dans la suite de ce travail.

Signalons que, dans le cas où Ω n'est pas simplement connexe ou s'il présente des trous, certains des résultats précédents doivent être modifiés. Comme il est par ailleurs indiqué dans [26], dans le cas où le domaine est non simplement connexe, le théorème 2.3.1 demeure vrai si on ajoute les fonctions multivoques adéquates à l'espace Ψ_h. Dans le cas où Ω présente des trous (sa frontière n'étant plus connexe), ce théorème doit être modifié, et reste vrai si on ajoute à l'espace $\mathcal{H}_h$ des champs de vecteurs non univoques bien choisis.

Notons pour terminer que, comme dans le cas continu, les méthodes décrites dans ce chapitre sont adaptables dans le cas où l'inconnue physique est représentée par le champ magnétique total. La condition de raccordement doit alors être modifiée dans ce cas, en tenant compte de la continuité de la trace tangentielle du champ magnétique source.

Chapitre 3

Mise en œuvre et résultats numériques

La première partie de ce chapitre est consacrée à la mise en œuvre numérique des problèmes discrets (2.27) – (2.28) et (2.35). Comme il a été constaté au chapitre précédent, rappelons que ceux-ci permettent de traiter numériquement le modèle physique (0.12) – (0.13). Etant donné qu'ils utilisent de manière commune l'opérateur de Poincaré-Steklov, un paragraphe du chapitre sera réservé à la discrétisation par éléments finis de surface, de cet opérateur. En associant ensuite à chaque terme de (2.27) – (2.28) et (2.35) un bloc matriciel, nous formerons, un système matriciel correspondant à chacun de ces problèmes. Nous discuterons les choix d'algorithmes et présenterons les méthodes de résolution les plus adaptées. La seconde partie de ce chapitre est consacrée à la présentation des résultats numériques, relèvant de ces problèmes.

3.1 Mise en œuvre numérique du problème (2.27) – (2.28)

Nous nous intéressons essentiellement ici à la mise en œuvre et à la résolution numérique de (2.27) – (2.28). Rappelons que celui-ci consiste à déterminer, pour h^s et μ vérifiant (1.4) et (1.5), un élément $((H_h, \varphi_h), w_h)$ de $\mathcal{W}_h \times \mathcal{H}_h^0$ tel que

$$
\begin{array}{rclcl}
(\mu\, H_h, \eta_h)_{(L^2(\Omega))^3} & + & \mu_0 < \mathcal{P}(\varphi_h), \phi_h > & - (\mathrm{rot}\, \eta_h, \mathrm{rot}\, w_h)_{(L^2(\Omega))^3} & = \\
-\ (\mu\, h^s, \eta_h)_{(L^2(\Omega))^3} & - & \mu_0 < h^s \cdot n, \phi_h > & \forall\, (\eta_h, \phi_h) \in \mathcal{W}_h\,, & \\
-\ (\mathrm{rot}\, H_h, \mathrm{rot}\, \pi_h)_{(L^2(\Omega))^3} & = & 0 & \forall\, \pi_h \in \mathcal{H}_h^0\,, & \\
(w_h, \mathrm{grad}\, \psi_h)_{(L^2(\Omega))^3} & = & 0 & \forall\, \psi_h \in \Psi_h^0\,. &
\end{array}
$$

3.1.1 Mise sous forme matricielle

Avec les notations du chapitre 2, § 2.1.1, rappelons que : NK, NF, NA et NS désignent respectivement le nombre de tétraèdres, de facettes, d'arêtes et de sommets de Ω. De même, nf, na et ns sont respectivement le nombre de facettes, d'arêtes et de sommets frontaliers.

Considérons à présent un élément (H_h, φ_h) de l'espace $\mathcal{W}_h$ et écrivons à partir de (2.8) :

$$\varphi_h = \sum_{p=1}^{ns} \varphi_h^p \, \lambda_p \,, \tag{3.1}$$

où

- λ_p est la fonction de forme associée au sommet frontalier s^p et
- φ_h^p le degré de liberté correspondant.

De même, écrivons avec (2.6) :

$$H_h = \sum_{l=1}^{NAI} H_h^l \, u_l + \sum_{l=1}^{na} (\varphi_h^j - \varphi_h^i) \, u_l \,,$$

où

- $NAI = NA - na$ désigne le nombre d'arêtes internes,
- $u_l = \lambda_i \nabla \lambda_j - \lambda_j \nabla \lambda_i$ est la fonction de forme associée à l'arête l de sommets s^i et s^j,
- H_h^l est la circulation du champ de vecteurs H_h le long de l et
- $\varphi_h^j - \varphi_h^i$ représente la circulation de H_h sur l'arête frontalière l.

Ce champ de vecteurs s'écrit encore :

$$H_h = \sum_{l=1}^{NAI} H_h^l \, u_l + \sum_{p=1}^{ns} \varphi_h^p \, \mathcal{S}_p \,, \tag{3.2}$$

avec

- H_h^l, u_l, φ_h^p définis comme précédemment, et
- $\mathcal{S}_p$ la fonction de forme au sommet frontalier s^p, obtenue par combinaison linéaire de celles associées aux arêtes frontalières dont s^p est l'un des sommets :

$$\mathcal{S}_p = \sum_{l = [i,p] \subset \Gamma} u_l - \sum_{l = [p,i] \subset \Gamma} u_l \,.$$

Dans le même esprit, le potentiel-vecteur de courant s'écrit :

$$w_h \;=\; \sum_{l=1}^{NAI} w_h^l\, u_l\,, \tag{3.3}$$

où w_h^l est la circulation de w_h le long de l. Cette écriture tient effectivement compte de la condition au bord imposée sur w_h, du fait que les degrés de liberté frontaliers sont mis à zero. Annuler les degrés de liberté de ce champ de vecteurs sur une facette revient à annuler ses composantes tangentielles sur la même facette.

Par ailleurs, le champ magnétique source s'écrit :

$$h^s \;=\; \sum_{l=1}^{NA} h_l^s\, u_l\,, \tag{3.4}$$

où h_l^s représente la circulation de h^s le long de l. Notons aussi,

$$h^s\cdot n \;=\; \sum_{p=1}^{ns}(h_p^s\cdot n)\,\lambda_p\,, \tag{3.5}$$

où h_p^s est la valeur de h^s au sommet frontalier s^p et n désigne la normale sur la frontière.

En tenant compte des formules (3.1) – (3.5), et en prenant pour fonction-test chacune des fonctions u_k, $\mathcal{S}_k$ et λ_k, les équations du problème (2.27) – (2.28) fournissent un système linéaire lorsque la fonction scalaire μ est constante par tétraèdres.

Commençons par traiter la première équation variationnelle de ce problème, où nous distinguons les deux cas suivants.

i) Degré de liberté associé à une arête interne k : $\eta_h = u_k$ et $\phi_h = 0$.

En considérant les formules (3.2) – (3.4), il suit

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{NAI} H_h^l \int_\Omega \mu\, u_l\cdot u_k\,dx \quad &+ \quad \sum_{p=1}^{ns}\varphi_h^p \int_\Omega \mu\,\mathcal{S}_p\cdot u_k\,dx\\ -\;\sum_{l=1}^{NAI} w_h^l \int_\Omega \mathrm{rot}\, u_l\cdot \mathrm{rot}\, u_k\,dx \quad &= \quad -\;\sum_{l=1}^{NA} h_l^s \int_\Omega \mu\, u_l\cdot u_k\,dx\,.\end{aligned} \tag{3.6}$$

ii) Degré de liberté associé à un sommet frontalier k : $\eta_h = \mathcal{S}_k$ et $\phi_h = \lambda_k$.

Les termes correspondant à des intégrales frontalières apparaissent dans ce cas. Nous avons avec les formules (3.1) – (3.5) :

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{NAI} H_h^l \int_\Omega \mu\, u_l\cdot\mathcal{S}_k\,dx \quad + \quad \sum_{p=1}^{ns}\varphi_h^p \int_\Omega \mu\,\mathcal{S}_p\cdot\mathcal{S}_k\,dx\\ +\;\;&\mu_0\sum_{p=1}^{ns}\varphi_h^p \int_\Gamma \mathcal{P}(\lambda_p)\lambda_k\,d\sigma \quad - \quad \sum_{l=1}^{NAI} w_h^l \int_\Omega \mathrm{rot}\, u_l\cdot\mathrm{rot}\,\mathcal{S}_k\,dx\\ =\;\;& -\;\sum_{l=1}^{NA} h_l^s \int_\Omega \mu\, u_l\cdot\mathcal{S}_k\,dx \quad - \quad \mu_0\sum_{p=1}^{ns}(h_p^s\cdot n)\int_\Gamma \lambda_p\lambda_k\,d\sigma\,.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Considérons ensuite la seconde équation variationnelle du problème, où nous prenons pour fonction-test u_k ; k désignant une arête interne. Avec la formule (3.2), il vient

$$- \sum_{l=1}^{NAI} H_h^l \int_\Omega \mathrm{rot}\, u_l \cdot \mathrm{rot}\, u_k \, dx \; - \sum_{p=1}^{ns} \varphi_h^p \int_\Omega \mathrm{rot}\, \mathcal{S}_p \cdot \mathrm{rot}\, u_k \, dx \; = \; 0 \, , \tag{3.8}$$

où k parcourt l'ensemble des arêtes internes.

Enfin, dans la dernière équation variationnelle du problème, adoptons λ_k (k désignant un sommet interne) comme fonction-test. Nous avons ainsi avec (3.3) :

$$\sum_{l=1}^{NAI} w_h^l \int_\Omega u_l \cdot \mathrm{grad}\, \lambda_k \; dx \; = \; 0 \, , \tag{3.9}$$

où k parcourt l'ensemble des sommets internes.

Les relations (3.6) − (3.9) conduisent alors à un système matriciel s'écrivant :

$$S\, X \; = \; F \, , \tag{3.10}$$

avec

$$S \; = \; \begin{pmatrix} E & M^t & D^t \\ M & N+P & G^t \\ D & G & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

la matrice du système ;

$$F \; = \; \begin{pmatrix} e \\ m+r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

le second membre et,

$$X \; = \; \begin{pmatrix} H_h \\ \varphi_h \\ w_h \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

l'inconnue du système.

Nous donnons dans la suite les termes génériques qui définissent les sous-matrices apparaissant dans (3.11) et (3.12). Considérant la fonction scalaire μ constante par tétraèdres, on obtient effectivement :

- la matrice symétrique E à l'aide des termes

$$e_{lk} = \int_\Omega \mu\, u_l \cdot u_k \, dx$$

  où l et k désignent des arêtes internes,

- la matrice rectangulaire M en déterminant

$$m_{lk} = \int_\Omega \mu\, u_l \cdot \mathcal{S}_k \, dx$$

  avec l une arête interne et k un sommet frontalier,

- la matrice D formée par

$$d_{lk} = -\int_\Omega \mathrm{rot}\, u_l \cdot \mathrm{rot}\, u_k \, dx$$

  l et k étant des arêtes internes,

- la matrice G définie avec

$$g_{lk} = -\int_\Omega \mathrm{rot}\, u_l \cdot \mathrm{rot}\, \mathcal{S}_k \, dx$$

  où l est une arête interne et k un sommet frontalier,

- la matrice N formée en déterminant

$$n_{lk} = \int_\Omega \mu\, \mathcal{S}_l \cdot \mathcal{S}_k \, dx$$

  avec l et k des sommets frontaliers,

- la matrice C déterminée avec

$$c_{kl} = \int_\Omega u_l \cdot \mathrm{grad}\, \lambda_k \, dx$$

  où l est une arête interne et k un sommet interne.

- Les composantes de e sont

$$e_k = -\sum_{l=1}^{NA} h_l^s \int_\Omega \mu\, u_l \cdot u_k \, dx$$

  où k désigne une arête interne,

- et celles de m :

$$m_k = -\sum_{l=1}^{NA} h_l^s \int_\Omega \mu\, u_l \cdot \mathcal{S}_k \, dx$$

où k est un sommet frontalier.

- Enfin, r est déterminé avec

$$r_k = -\mu_0 \sum_{i=1}^{ns} (h_i^s \cdot n) \int_\Gamma \lambda_i \lambda_k \, d\sigma \,,$$

où k désigne un sommet frontalier.

Intéressons-nous à présent au calcul de la matrice, notée P dans (3.11), qui nécessite la discrétisation de l'opérateur $\mathcal{P}$.

3.1.1.1 Discrétisation de l'opérateur de Poincaré-Steklov

La méthode de discrétisation présentée ici est basée sur une approche détaillée dans Bossavit [21], [11].

Rappelons que l'opérateur $\mathcal{P}$ aussi connu sous le nom *impédance*, est tel que :

$$\forall \, \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad \mathcal{P}(\varphi) = n \cdot \operatorname{grad} \psi \,,$$

où ψ est la solution dans $W^1(\Omega')$ du problème extérieur (1.21).

Le potentiel de réaction ψ étant harmonique dans Ω', il peut être exprimé (cf. e.g. [27], [21]) sous la forme d'un potentiel de simple couche sur Γ. Considérons une distribution superficielle de charge fictive q suffisamment régulière sur Γ et écrivons :

$$\psi(x) = \int_\Gamma \frac{q(y)}{|x-y|} \, d\Gamma_y \quad \forall \, x \in \Omega' \, ; \tag{3.14}$$

$$n \cdot \operatorname{grad} \psi(x) = -2\pi q(x_0) + \int_\Gamma q(y) \frac{\partial}{\partial n_{x_0}} (\frac{1}{|x_0 - y|}) \, d\Gamma_y \,, \qquad x \in \Omega' \longmapsto x_0 \in \Gamma \, . \tag{3.15}$$

La densité q étant supposée régulière, le potentiel de simple couche ψ est continu à la traversée de Γ.

La discrétisation des équations (3.14) et (3.15) par une méthode de Galerkin permet d'établir une relation liant le potentiel scalaire à sa dérivée normale extérieure. Commençons par faire conformément aux notations du chapitre 2, les considérations suivantes.

- L'approximation de la trace sur Γ du potentiel ψ, déjà suggérée par la relation (3.1), est :

$$\psi_h = \varphi_h = \sum_{i=1}^{ns} \varphi_h^i \, \lambda_i \, .$$

- L'approximation de la densité q se fait dans l'espace de dimension finie formé des fonctions constantes par triangle :

$$q_h = \sum_{i=1}^{nf} q_h^i \, \eta_i \,,$$

où, q_h^i est la densité que prend q_h sur un triangle frontalier numéroté i, et η_i est la fonction de forme définie :

$$\eta_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est dans le triangle de numéro } i\,, \\ 0 & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

On procède ainsi à une approximation conforme (cf. e.g. [23]) de l'espace $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Avec ces approximations, il suit de (3.14),

$$\varphi_h(x) = \int_\Gamma \frac{1}{|x-y|} \sum_{i=1}^{nf} q_h^i \, \eta_i(y) \, d\Gamma_y \,.$$

La définition de la fonction η_i permet alors d'écrire

$$\varphi_h(x) = \sum_{i=1}^{nf} q_h^i \int_{T_i} \frac{1}{|x-y|} d\Gamma_y \,,$$

où T_i représente le triangle de numéro i.

Dans cette dernière relation, utilisons l'écriture du potentiel φ_h et multiplions par une fonction-test η_j, pour obtenir :

$$\int_\Gamma \sum_{i=1}^{ns} \varphi_h^i \, \lambda_i(x) \, \eta_j(x) \, d\Gamma_x = \sum_{i=1}^{nf} q_h^i \int_\Gamma \int_{T_i} \frac{1}{|x-y|} \eta_j(x) \, d\Gamma_y d\Gamma_x \,.$$

Clairement, par définition de η_j, les deux membres de cette relation sont nuls dès que x n'est pas sur le triangle T_j. En effet $\eta_j(x) = 0$ dans ce cas. Notons aussi que la deuxième variable d'intégration y parcourt le triangle T_i. En tenant alors compte que x est un élément de T_j, il suit de cette égalité :

$$\int_{T_j} \sum_{i=1}^{ns} \varphi_h^i \, \lambda_i(x) \, d\Gamma_x = \sum_{i=1}^{nf} q_h^i \int_{T_j} \int_{T_i} \frac{1}{|x-y|} d\Gamma_y d\Gamma_x \,.$$

Ainsi, nous écrivons sous forme matricielle :

$$\sum_{i=1}^{ns} b_{ji} \, \varphi_h^i = \sum_{i=1}^{nf} Q_{1_{ji}} \, q_h^i \,.$$

i.e.,

$$B\,\varphi_h \;=\; Q_1\,q_h\;, \tag{3.16}$$

où

- B est une matrice creuse de dimension $nf \times ns$ dont les termes sont[1]

$$b_{ij} \;=\; \begin{cases} \int_{T_i} \lambda_j(x) d\Gamma_x \;=\; \dfrac{|T_i|}{3} & \text{si } j \text{ est l'un des trois sommets du triangle } T_i\,, \\ \qquad 0 & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

  La ligne correspondant au triangle de numéro i a trois éléments non nuls : éléments correspondant aux sommets du triangle T_i tous égaux à $\dfrac{|T_i|}{3}$.

- Q_1 est une matrice symétrique pleine, régulière et de dimension $nf \times nf$ dont les termes sont donnés par

$$Q_{1_{ij}} \;=\; \int_{T_i}\int_{T_j} \frac{1}{|x-y|}\, d\Gamma_x\, d\Gamma_y\,.$$

  La détermination de ces termes se fait par un calcul analytique de l'intégrale

$$\int_{T_i} \frac{1}{|x-y|} d\Gamma_y\,,$$

  et à l'aide de la méthode de Gauss pour la seconde intégrale.

Considérons à présent la relation (3.15). En tenant compte de l'écriture du potentiel φ_h et de la densité q_h, il vient

$$\mathcal{P}(\varphi_h) \;=\; -\,2\pi \sum_{i=1}^{nf} q_h^i\,\eta_i \;+\; \int_\Gamma \sum_{i=1}^{nf} q_h^i\,\eta_i\, \frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{1}{|x-y|}\Big)\, d\Gamma_y\,,$$

et donc

$$\mathcal{P}(\varphi_h) \;=\; -\,2\pi \sum_{i=1}^{nf} q_h^i\,\eta_i \;+\; \sum_{i=1}^{nf} q_h^i \int_{T_i} \frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{1}{|x-y|}\Big)\, d\Gamma_y\,.$$

Nous avons,

$$\int_\Gamma \mathcal{P}(\varphi_h)\,\lambda_j\, d\Gamma_x \;=\; -2\pi \sum_{i=1}^{nf} q_h^i \int_\Gamma \eta_i(x)\,\lambda_j(x)\, d\Gamma_x + \sum_{i=1}^{nf} q_h^i \int_\Gamma\int_{T_i} \lambda_j(x) \frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{1}{|x-y|}\Big)\, d\Gamma_y\, d\Gamma_x$$

1. La surface du triangle T_i est notée $|T_i|$.

i.e.,

$$\sum_{i=1}^{ns} \varphi_h^i \int_\Gamma \mathcal{P}(\lambda_i)\,\lambda_j\,d\Gamma_x \;=\; -\,2\pi \sum_{i=1}^{nf} q_h^i \int_{T_i} \lambda_j(x)\,d\Gamma_x + \sum_{i=1}^{nf} q_h^i \int_\Gamma \int_{T_i} \lambda_j(x) \frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{1}{|x-y|}\Big)\,d\Gamma_y\,d\Gamma_x\,.$$

Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{ns} \varphi_h^i \int_\Gamma \mathcal{P}(\lambda_i)\,\lambda_j\,d\Gamma_x \;=\; \sum_{i=1}^{nf} q_h^i \,(-2\pi \int_{T_i} \lambda_j(x)\,d\Gamma_x \,+\, \int_\Gamma \int_{T_i} \lambda_j(x) \frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{1}{|x-y|}\Big)\,d\Gamma_y\,d\Gamma_x\,)\,.$$

Ceci permet d'écrire sous forme matricielle :

$$\sum_{i=1}^{ns} \varphi_h^i \int_\Gamma \mathcal{P}(\lambda_i)\lambda_j\,d\Gamma_x \;=\; \sum_{i=1}^{nf} Q_{2_{ji}}\, q_h^i\,.$$

i.e.,

$$P\,\varphi_h \;=\; Q_2\,q_h\,, \tag{3.17}$$

où

- P correspond à la matrice de dimension $ns \times ns$ définie par les termes

$$P_{ij} \;=\; \int_\Gamma \mathcal{P}(\lambda_i)\lambda_j\,d\Gamma_x\,.$$

- Q_2 est une matrice de dimension $ns \times nf$ dont les termes sont donnés par la formule

$$Q_{2_{ij}} \;=\; -2\pi \int_{T_j} \lambda_i(x)\,d\Gamma_x \;+\; \int_\Gamma \int_{T_j} \lambda_i(x) \frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{1}{|x-y|}\Big)\,d\Gamma_y\,d\Gamma_x\,.$$

  i.e.,

$$Q_{2_{ij}} \;=\; -2\pi \int_{T_j} \lambda_i(x)\,d\Gamma_x \;+\; \int_{S(i)} \int_{T_j} \lambda_i(x) \frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{1}{|x-y|}\Big)\,d\Gamma_y\,d\Gamma_x\,,$$

  où $S(i)$ est l'union des triangles dont i est l'un des sommets, tout en notant qu'à nouveau,

$$\int_{T_j} \lambda_i(x)\,d\Gamma_x \;=\; \begin{cases} \dfrac{|T_j|}{3} & \text{si } i \text{ est l'un des trois sommets du triangle } T_j\,, \\ 0 & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

La matrice P correspondant à la discrétisation de l'opérateur $\mathcal{P}$ s'obtient en éliminant la densité de charge q_h des équations (3.16) et (3.17). En effet, nous avons le système

$$\begin{aligned} B\,\varphi_h &= Q_1\,q_h\,, \\ P\,\varphi_h &= Q_2\,q_h \end{aligned}$$

qui permet d'écrire compte tenu du fait que Q_1 est régulière,

$$P\,\varphi_h \;=\; Q_2\,Q_1^{-1}\,B\,\varphi_h\,.$$

$P \;=\; Q_2\,Q_1^{-1}\,B$ devrait donc être la *matrice de l'impédance*[2] désirée, mais elle n'est pas symétrique alors que l'opérateur l'est. En fait, on obtient une bonne approximation (cf. e.g. [21]) en prenant la partie symétrique :

$$\frac{P \;+\; P^t}{2}\,.$$

En multipliant par μ_0, cette matrice symétrique de dimension $ns \times ns$, nous formons la matrice aussi notée P dans (3.11).

3.1.1.2 Système matriciel

Nous considérons le système (3.10) dont la matrice et le second membre sont récrits sous une forme destinée à la résolution numérique effective.

Avec E, M, N, P, D et G intervenant dans l'écriture de la matrice S (cf. (3.11)), nous formons

$$A \;=\; \begin{pmatrix} E & M^t \\ M & N+P \end{pmatrix}$$

une matrice symétrique de dimension $(NAI + ns) \times (NAI + ns)$ et,

$$B \;=\; \begin{pmatrix} D & G \end{pmatrix}$$

une matrice rectangulaire de dimension $NAI \times (NAI + ns)$.

De même, nous considérons e, m et p dans (3.12) et formons

$$f \;=\; \begin{pmatrix} e \\ m+p \end{pmatrix}$$

de dimension $NAI + ns$.

Enfin, dans l'écriture (3.13) de l'inconnue X, nous posons

$$u \;=\; \begin{pmatrix} H_h \\ \varphi_h \end{pmatrix}\,.$$

Le bloc matriciel u, de dimension $NAI+ns$ ainsi constitué, désigne l'inconnue physique discrétisée.

2. Aussi appelée *matrice de rigidité extérieure.*

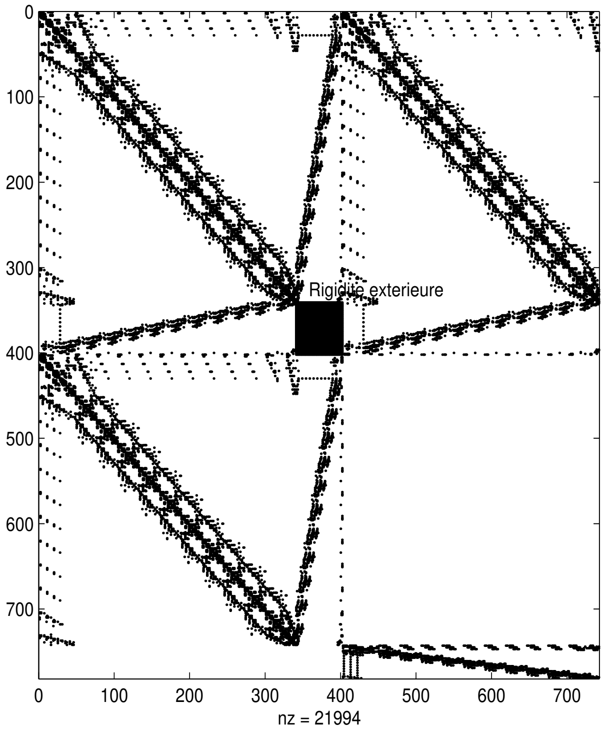
Le système

$$S\,X \;=\; F\,,$$

introduit en (3.10), devient alors :

$$\begin{pmatrix} A & B^t \\ B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \tag{3.18}$$

où nous oublions l'indice h de w pour alléger les notations. La matrice S de ce système est rectangulaire et de dimension $(2\,NAI + NS) \times (2\,NAI + ns)$. Avec la numérotation d'arêtes utilisée, sa structure est symbolisée par la figure ci-dessous.



3.1.2 Résolution numérique

Le système matriciel (3.18) admet une unique solution, selon le théorème 2.5.2. Il existe plusieurs méthodes visant à résoudre ce type de système.

Une première façon de résoudre (3.18), pourrait consister en la résolution des équations normales

$$(S^tS)\,X \;=\; S^tF\,. \tag{3.19}$$

Mais alors, on se heurterait à des difficultés numériques dues aux propriétés de la matrice S^tS. En effet, bien que cette matrice soit "théoriquement" régulière, étant donné que la matrice S est de rang maximal, il n'en est pas toujours ainsi "numériquement" (cf. e.g. [28], [29]). A l'issue de différents tests numériques, nous avons constaté que S^tS apparaît effectivement comme une matrice singulière et semi-définie positive. Le mauvais conditionnement de cette matrice est principalement provoqué par les paramètres physiques[3] utilisés. Cet aspect numérique[4] vient expliquer le fait que, la résolution du système (3.18), via les équations normales (3.19) ne garantit pas la détermination de manière unique de l'inconnue de (3.18). Outre cet aspect désavantageux, signalons que, si S est creuse, S^tS l'est beaucoup moins. L'usage d'une telle méthode doit alors être fait avec précaution.

En revanche, compte tenu du fait que la matrice S est de rang maximal, la résolution de (1.5) au sens des moindres carrés par une méthode basée sur l'orthogonalisation de Gram-Schmidt [29], [30] se révèle adéquate. La résolution du système se fait alors en deux étapes dont la première est basée sur la factorisation de la matrice S par la méthode modifiée de Gram-Schmidt [29] connue dans la littérature sous le nom MGS (Modified Gram-Schmidt). L'algorithme de factorisation adopté est une variante de la méthode MGS connue sous le nom MGS - Column Oriented Version. Il s'agit d'une factorisation de la matrice du système en un produit :

$$S = Q_1 R,$$

où

- par construction les colonnes de la matrice Q_1 sont orthonormales et
- la matrice R est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

Cet algorithme appliqué à la matrice S s'écrit :

- $S^{(1)} = S$
- Pour $k = 1, \ldots 2\,NAI + ns$
- Pour $i = 1, \ldots k-1$

  $r_{ik} = q_i^t \cdot s_k^{(i)}$

  $s_k^{(i+1)} = s_k^{(i)} - r_{ik}\, q_h^i$
- $\hat{q}_k = s_k^{(k)}$

3. Soient la perméabilité du vide et celle du milieu magnétique sollicité.
4. De tels cas sont expliqués dans [28].

- $r_{kk} \;=\; (\hat{q}_k^t \cdot \hat{q}_k)^{\frac{1}{2}}$

- $q_k \;=\; \dfrac{\hat{q}_k}{r_{kk}}$

où $s_k^{(i)}$ désigne une colonne de la matrice $S^{(i)}$ de dimension $(2\,NAI+NS)\times(2\,NAI+ns)$. La matrice Q_1 de même dimension, est déterminée par les colonnes q_k et la matrice R de dimension $(2\,NAI+ns)\times(2\,NAI+ns)$ par les coefficients r_{ik}.

La seconde étape de la résolution utilise la factorisation ci-dessus et détermine la solution du système linéaire à l'aide de l'algorithme :

- $F^{(1)} \;=\; F$

- Pour $k = 1, \ldots 2\,NAI + ns$

  $z_k \;=\; q_k^t \cdot F^{(k)}$

  $F^{(k+1)} \;=\; F^{(k)} - z_k\, q_k$

- Résoudre enfin : $R\,X \;=\; Z$

où Z de dimension $2\,NAI + ns$ est formé de composantes z_k.

L'efficatité d'un tel algorithme par rapport à d'autres variantes de la méthode de Gram-Schmidt est présentée dans [30], [31]. Notons tout de même que, dans la résolution du système (3.18), l'étape la plus coûteuse est celle de la factorisation de la matrice S, qui exige un stockage de Q_1.

Bien que cet algorithme puisse déterminer de manière unique l'inconnue du système, il devient défaillant, comme tout autre faisant appel à une méthode directe, lorsqu'on considère les maillages fins. En effet, le stockage de la matrice pleine Q_1 n'est plus envisageable dans ce cas. L'appel à une méthode itérative telle que l'algorithme du gradient conjugué, reformulé pour les problèmes de moindres carrés (cf. [32], [33]), devient alors indispensable :

Pour X^0 donné, calculer :

- $r^0 \;=\; F - SX^0$

- $p^0 \;=\; z^0 \;=\; S^t r^0$

  Pour $k \;=\; 0, 1, \ldots$ faire, jusqu'à convergence,

- $q^k \;=\; Sp^k$

- $X^{k+1} \;=\; X^k + \alpha p^k$

- $r^{k+1} = r^k - \alpha q^k$
- $z^{k+1} = S^t r^{k+1}$
- $p^{k+1} = z^{k+1} + \gamma p^k$

où

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{(z^k, z^k)}{(q^k, q^k)},\\ \gamma &= \frac{(z^{k+1}, z^{k+1})}{(z^k, z^k)}.\end{aligned}$$

Cet algorithme est strictement équivalent à celui du gradient conjugué standard. La détermination du potentiel-vecteur de courant w ne se fait plus de manière unique (la matrice S^tS n'étant que semi-définie positive), contrairement à celle de l'inconnue physique.

3.2 Mise en œuvre numérique du problème (2.35)

Il s'agit ici de la mise en œuvre et de la résolution numérique de (2.35). Rappelons que ce problème consiste à déterminer, pour h^s et μ vérifiant (1.4) et (1.5), un élément $((H_h, \varphi_h), w_h)$ de $\mathcal{W}_h \times \mathcal{H}_h^0$ tel que

$$\begin{aligned} (\mu\, H_h, \eta_h)_{(L^2(\Omega))^3} \;&+\; \mu_0 < \mathcal{P}(\varphi_h), \phi_h > \;-\; (\mathrm{rot}\, \eta_h, \mathrm{rot}\, w_h)_{(L^2(\Omega))^3} \;=\\ -\;(\mu\, h^s, \eta_h)_{(L^2(\Omega))^3} \;&-\; \mu_0 < h^s \cdot n, \phi_h > \quad \forall\, (\eta_h, \phi_h) \in \mathcal{W}_h\,,\\ -\;(\mathrm{rot}\, H_h, \mathrm{rot}\, \pi_h)_{(L^2(\Omega))^3} \;&=\; 0 \quad \forall\, \pi_h \in \mathcal{H}_h^0\,. \end{aligned}$$

3.2.1 Système matriciel

Le système matriciel pouvant être associé à (2.35) est issu de celui correspondant à (2.27) – (2.28). Lorsque la fonction μ est prise constante par tétraèdres, nous obtenons de la mise sous forme matricielle présentée au § 3.1.1 que, le problème (2.35) conduit au système suivant.

$$\underline{S}\, X = \underline{F}, \tag{3.20}$$

où la matrice du système est donnée par

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} A & B^t \\ B & 0 \end{pmatrix},$$

le second membre étant

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} .$$

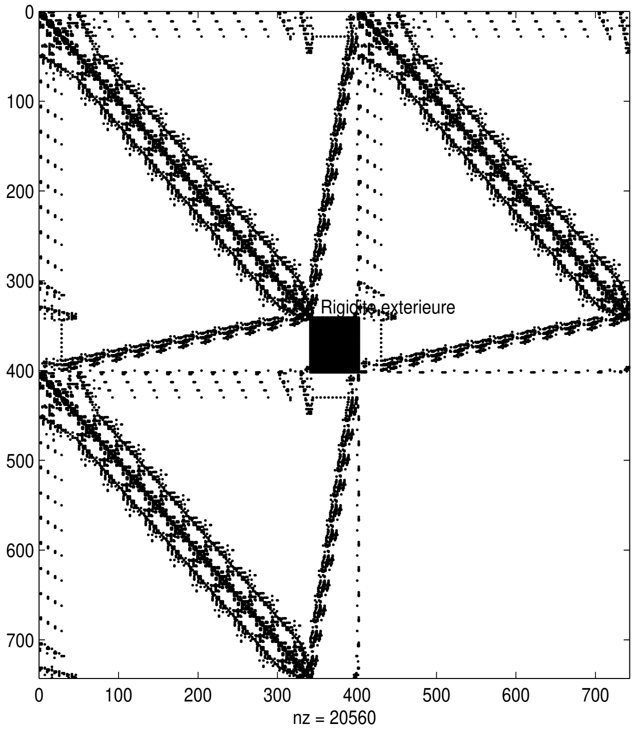
Les termes A, B et f sont ceux introduits au § 3.1.1.2.

L'inconnue du système est écrite comme précédemment,

$$X = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} ,$$

où u est l'inconnue physique discrétisée.

La matrice du système est symétrique et de dimension $(2\,NAI + ns) \times (2\,NAI + ns)$. Avec la numérotation d'arêtes utilisée, sa structure est symbolisée par la figure suivante.



3.2.2 Résolution numérique

Le système matriciel (3.20) admet selon le théorème 2.5.3, une solution s'écrivant comme ci-dessus, où u est unique.

Dans ce système, la matrice A est issue d'une forme bilinéaire symétique définie positive. Elle est une matrice définie positive et donc régulière. En éliminant l'inconnue u du système, il vient

$$BA^{-1}B^t w = BA^{-1} f\,, \tag{3.21}$$

où la matrice $BA^{-1}B^t$ est singulière, tout comme $\underline{S}$. En revanche, la matrice A étant définie positive, $BA^{-1}B^t$ est semi-définie positive. Il existe plusieurs méthodes numériques (cf. e.g. [34], [25]) pour résoudre le système (3.20). Pour plus de commodités, nous adoptons l'algorithme de Uzawa [34]. Celui-ci est convergent, étant donné que la matrice A est définie positive, et permet de déterminer de façon unique l'inconnue physique u.

Appliqué au système (3.20), cet algorithme est exactement la méthode du gradient conjugué standard, appliquée à l'équation matricielle (3.21) :

Pour $0 < \epsilon << 1$ et w^0 donnés, calculer :

- $u^0 = A^{-1}(f - B^t w^0)$
- $r^0 = -Bu^0$
- $d^0 = M^{-1} r^0$

  Tant que $||r^n||_h < \epsilon$, faire

- $w^{n+1} = w^n + \rho d^n$
- $b^{n+1} = A^{-1}B^t d^n$
- $u^{n+1} = u^n + \rho b^{n+1}$
- $r^{n+1} = r^n - \rho B b^{n+1}$
- $d^{n+1} = M^{-1} r^{n+1} + \gamma d^n$

où

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{(r^n, d^n)}{(d^n, Bb^n)}\,, \\ \gamma &= \frac{(r^{n+1}, M^{-1}r^{n+1})}{(r^n, M^{-1}r^n)} \end{aligned}$$

et

$$||r||_h^2 = \frac{\sum_{i=1}^{NAI} r_i^2}{NAI}\,.$$

Compte tenu de la structure de A, seuls les éléments non nuls sont stockés. Son inversion est effectuée par une méthode itérative du type gradient conjugué standard. Signalons par ailleurs que la résolution de (3.18) par la méthode itérative donnée au § 3.1.2 est équivalente à celle de (3.20) avec l'algorithme de Uzawa.

Dans la partie concernant les résultats numériques, nous désignerons par l'*algorithme de Uzawa préconditionné*, le précédent algorithme où la matrice M est différente de l'identité. Pour le choix de M, nous nous inspirons du cas de la résolution par l'algorithme de Uzawa du système généralisé de Stokes. Ce système consiste pour s donné, $(\alpha, \nu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+_\star$, à trouver (u, p) tel que

$$\begin{cases} \alpha\, u - \nu\, \nabla^2 u + \nabla p &= s \text{ dans } \Omega\,, \\ \nabla \cdot u &= 0 \text{ dans } \Omega\,, \\ u &= 0 \text{ sur } \Gamma\,. \end{cases}$$

Lorsque

$$\alpha\, I - \nu\, \nabla^2 \sim \alpha\, I\,,$$

le préconditionnement de Labadie (cf. e.g. [35]) appliqué à l'algorithme de Uzawa, pour la résolution de ce système, utilise la matrice correspondant à $(-\nabla^2)^{-1}$.

Informellement, une similitude avec cette approche consiste à percevoir la matrice A comme une perturbation de l'identité, et donc de considérer, dans notre cas,

$$M = B B^t\,, \tag{3.22}$$

comme matrice de préconditionnement. Celle-ci correspond à la discrétisation de l'opérateur "rot rot" et n'est que semi-définie positive. En effet, la condition de divergence nulle n'est pas prise en compte. L'approximation de l'inverse de M sera effectuée par la méthode du gradient conjugué standard.

Ainsi, pour la résolution de (3.20) avec l'algorithme de Uzawa préconditionné, nous distinguons trois paramètres de tolérance. Le premier de ces paramètres est associé à l'inversion de la matrice A, le second à celle de M et le troisième est affecté à l'algorithme de Uzawa. Dans cette résolution, l'étape la plus coûteuse numériquement est celle de l'inversion de A.

3.3 Résultats numériques

Pour la validation numérique des problèmes discrets proposés, nous procèderons comme dans [6], [5], où la solution analytique du problème $(0.12) - (0.13)$ est connue.

3.3.1 Solution analytique

Le modèle considéré est celui qui consiste en la détermination du champ magnétique de réaction conformément à $(0.12) - (0.13)$ où la région d'intérêt Ω est assimilée à un milieu sphérique de perméabilité magnétique constante. Le champ magnétique source régnant dans ce milieu est un champ de vecteurs dirigé suivant l'axe Oz :

$$h^s = H_0\, e_z\,,$$

où H_0 est une constante réelle.

Pour une telle source, il est connu (cf. [14], p. 350) que le champ magnétique de réaction créé s'écrit :

$$H = \frac{1-\mu_r}{2+\mu_r}\, h^s$$

où μ_r est la perméabilité magnétique relative associée à Ω.

3.3.2 Calcul du champ magnétique de réaction

Comme dans [6], [5], nous fixons $H_0 = 10\, A/m$ et distinguons chacun des cas $\mu_r = 9, 100$ et 1000.

Les simulations numériques effectuées relèvent des systèmes matriciels (3.18) et (3.20). Nous présenterons successivement, les résultats obtenus par résolution de (3.18) avec l'algorithme MGS - Column Oriented Version (cf. § 3.1.2) puis, ceux obtenus par résolution de (3.20) avec l'algorithme de Uzawa.

Le milieu Ω est représenté par des sphères S_k $(1 \leq k \leq 3)$ dont quelques caractéristiques sont données dans le tableau ci-dessous.

	NK	NF	NA	NS	na	ns	h
S_1	160	360	254	55	120	42	0.85104
S_2	1280	2720	1748	309	480	162	0.60982
S_3	10240	21120	12936	2057	1920	642	0.39443

Les sphères S_k sont maillées par des tétraèdres. NK, NF, NA, NS sont respectivement le nombre de tétraèdres, de facettes, d'arêtes et de sommets constituant le maillage de S_k dont h désigne le pas. Aussi, na et ns sont respectivement le nombre d'arêtes et de sommets au bord de S_k. Pour procéder au raffinement du maillage de S_k en S_{k+1}, chaque tétraèdre de S_k est subdivisé en huit autres tétraèdres. Les nouveaux nœuds de part et d'autre des facettes internes de S_k sont concordants. Sur les facettes externes de S_k, on considère des nouveaux nœuds sur S_k projetés sur la sphère. La projection est effectuée suivant le vecteur normal de chaque facette externe. Ces sphères sont toutes de rayon $R = 1$.

Par rapport à S_k, notons :

$$err_{L^2(S_k)} = \frac{\|H - H_h\|_{L^2(S_k)}}{\|H\|_{L^2(S_k)}}.$$

Entre deux sphères consécutives S_k et S_{k+1}, nous désignerons par α le taux de convergence qui s'obtient de la formule :

$$\frac{err_{L^2(S_k)}}{err_{L^2(S_{k+1})}} = \left(\frac{h_k}{h_{k+1}}\right)^{\alpha},$$

où S_k a un pas de maillage égale à h_k.

3.3.2.1 Milieu de perméabilité relative $\mu_r = 9$

Dans le cas de la méthode directe, les résultats sur le champ magnétique de réaction sont résumés dans le tableau suivant.

	$\|\|H - H_h\|\|_{L^2}$	$\|\|\,\mathrm{rot}\ H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	0.1021924E+00	0.1858947E-06	0.7346103E-02	-
S_2	0.3279281E-01	0.5266146E-06	0.2241363E-02	3.56166

Bien que, la méthode directe nous limite à la considération des maillages intermédiaires, la détermination du champ magnétique par méthode itérative permet d'envisager le cas des maillages fins.

Dans les résultats qui vont suivre, ϵ_{uzz} et ϵ_{grd} désignent respectivement la valeur d'arrêt de l'algorithme de Uzawa et celle de l'algorithme du gradient conjugué utilisé.

	ϵ_{uzz}	ϵ_{grd}	$\|\|H - H_h\|\|_{L^2}$	$\|\|\,\mathrm{rot}\ H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-8}	10^{-8}	0.1021924E+00	0.4012553E-06	0.7346103E-02	-
S_2	10^{-8}	10^{-8}	0.3279279E-01	0.9531322E-06	0.2241362E-02	3.56166
S_3	10^{-8}	10^{-8}	0.1111389E-01	0.1456253E-05	0.7498964E-03	2.51284

Bien que les valeurs de $\|\,\mathrm{rot}\ H_h\|_{L^2}$ soient du même ordre de grandeur, comme l'indiquent les précédents tableaux, elles varient dans le cas itératif en fonction des paramètres ϵ_{uzz} et ϵ_{grd}. En fixant ϵ_{grd} et en faisant varier ϵ_{uzz}, nous obtenons les résultats suivants :

	ϵ_{uzz}	ϵ_{grd}	$\|\|H - H_h\|\|_{L^2}$	$\|\|\,\mathrm{rot}\ H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-7}	10^{-8}	0.1021924E+00	0.3153284E-05	0.7346103E-02	-
S_2	10^{-7}	10^{-8}	0.3279279E-01	0.4676639E-05	0.2241362E-02	3.56166
S_3	10^{-7}	10^{-8}	0.1111389E-01	0.1021133E-04	0.7498964E-03	2.51284

	ϵ_{uzz}	ϵ_{grd}	$\|\|H - H_h\|\|_{L^2}$	$\|\|\,\mathrm{rot}\ H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-6}	10^{-8}	0.1021924E+00	0.1632456E-04	0.7346103E-02	-
S_2	10^{-6}	10^{-8}	0.3279279E-01	0.5744090E-04	0.2241362E-02	3.56166
S_3	10^{-6}	10^{-8}	0.1111387E-01	0.1088700E-03	0.7498952E-03	2.51285

On peut ainsi noter la variation de $\|\,\mathrm{rot}\; H_h\|_{L^2}$ en fonction de ϵ_{uzz}, qui se précise lorsqu'est imposé à l'algorithme du gradient conjugué un critère d'arrêt moins sévère :

	ϵ_{uzz}	ϵ_{grd}	$\|\|H - H_h\|\|_{L^2}$	$\|\|\,\mathrm{rot}\; H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-7}	10^{-7}	0.1021925E+00	0.2916175E-05	0.7346109E-02	-
S_2	10^{-7}	10^{-7}	0.3279258E-01	0.4719955E-05	0.2241348E-02	3.56168
S_3	10^{-7}	10^{-7}	0.1111391E-01	0.1082225E-04	0.7498981E-03	2.51282

	ϵ_{uzz}	ϵ_{grd}	$\|\|H - H_h\|\|_{L^2}$	$\|\|\,\mathrm{rot}\; H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-6}	10^{-7}	0.1021925E+00	0.1633724E-04	0.7346109E-02	-
S_2	10^{-6}	10^{-7}	0.3279258E-01	0.3822282E-04	0.2241348E-02	3.56168
S_3	10^{-6}	10^{-7}	0.1111389E-01	0.1083814E-03	0.7498969E-03	2.51283

Si l'erreur relative et le taux de convergence demeurent insensibles à ϵ_{uzz} et ϵ_{grd}, confirmons par contre avec les résultats suivants, que la variation de $\|\,\mathrm{rot}\; H_h\|_{L^2}$ repose sur le choix de ϵ_{uzz}.

	ϵ_{uzz}	ϵ_{grd}	$\|\|H - H_h\|\|_{L^2}$	$\|\|\,\mathrm{rot}\; H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-7}	10^{-6}	0.1021917E+00	0.3769896E-05	0.7346055E-02	-
S_2	10^{-7}	10^{-6}	0.3278870E-01	0.5079582E-05	0.2241083E-02	3.56201
S_3	10^{-7}	10^{-6}	0.1111333E-01	0.1071477E-04	0.7498591E-03	2.51267

	ϵ_{uzz}	ϵ_{grd}	$\|\|H - H_h\|\|_{L^2}$	$\|\|\,\mathrm{rot}\; H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-8}	10^{-6}	0.1021917E+00	0.1066954E-06	0.7346054E-02	-
S_2	10^{-8}	10^{-6}	0.3278865E-01	0.1094946E-05	0.2241079E-02	3.56202
S_3	10^{-8}	10^{-6}	0.1111333E-01	0.1515917E-05	0.7498590E-03	2.51267

Ceci laisse sous-entendre que, pour la détermination du champ magnétique de réaction par la méthode itérative, il faut utiliser $\|\,\mathrm{rot}\; H_h\|_{L^2}$ comme valeur d'arrêt de l'algorithme de Uzawa et, il est inutile d'imposer à l'algorithme du gradient conjugué un critère d'arrêt plus sévère que précédemment. Signalons, par ailleurs, la variation (prévisible) de l'erreur relative et du taux de convergence en fonction du maillage utilisé.

3.3.2.2 Milieu de perméabilité relative $\mu_r = 100$

Dans le cas de la méthode directe, nous avons les résultats suivants :

	$\|\|H - H_h\|\|_{L^2}$	$\|\| \text{rot } H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	0.1444489E-01	0.3849701E-06	0.7780632E-03	-
S_2	0.4686253E-02	0.4782709E-06	0.2400058E-03	3.52883

Avec la méthode itérative, nous avons le tableau suivant.

	ϵ_{uzz}	ϵ_{grd}	$\|\|H - H_h\|\|_{L^2}$	$\|\| \text{rot } H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-8}	10^{-8}	0.1444489E-01	0.4793737E-06	0.7780632E-03	-
S_2	10^{-8}	10^{-8}	0.4686254E-02	0.6671467E-06	0.2400058E-03	3.52883
S_3	10^{-8}	10^{-8}	0.1590062E-02	0.1070356E-05	0.8039176E-04	2.51020

Si une réelle sensibilité de l'erreur relative par rapport à la perméabilité magnétique peut être perçue, constatons que, les valeurs de $\| \text{rot } H_h\|_{L^2}$ conservent le même ordre de grandeur qu'au paragraphe précédent. Avec les tableaux qui suivent,

	ϵ_{uzz}	ϵ_{grd}	$\|\|H - H_h\|\|_{L^2}$	$\|\| \text{rot } H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-7}	10^{-8}	0.1444489E-01	0.5621778E-06	0.7780632E-03	-
S_2	10^{-7}	10^{-8}	0.4686254E-02	0.6795363E-06	0.2400058E-03	3.52883
S_3	10^{-7}	10^{-8}	0.1590062E-02	0.2575685E-05	0.8039176E-04	2.51020

	ϵ_{uzz}	ϵ_{grd}	$\|\|H - H_h\|\|_{L^2}$	$\|\| \text{rot } H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-6}	10^{-8}	0.1444489E-01	0.1856144E-05	0.7780632E-03	-
S_2	10^{-6}	10^{-8}	0.4686254E-02	0.9446898E-05	0.2400058E-03	3.52883
S_3	10^{-6}	10^{-8}	0.1590062E-02	0.3033224E-04	0.8039178E-04	2.51020

on constate aussi une variation de $\|\operatorname{rot} H_h\|_{L^2}$ en fonction de ϵ_{uzz}. Celle-ci devient plus perceptible lorsqu'on considère les cas suivants :

	ϵ_{uzz}	ϵ_{grd}	$\|\|H-H_h\|\|_{L^2}$	$\|\|\operatorname{rot} H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-7}	10^{-7}	0.1444488E-01	0.8085049E-06	0.7780628E-03	-
S_2	10^{-7}	10^{-7}	0.4686245E-02	0.9115760E-06	0.2400054E-03	3.52884
S_3	10^{-7}	10^{-7}	0.1590061E-02	0.2975235E-05	0.8039175E-04	2.51020

	ϵ_{uzz}	ϵ_{grd}	$\|\|H-H_h\|\|_{L^2}$	$\|\|\operatorname{rot} H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-6}	10^{-7}	0.1444488E-01	0.1814192E-05	0.7780628E-03	-
S_2	10^{-6}	10^{-7}	0.4686245E-02	0.9342141E-05	0.2400054E-03	3.52884
S_3	10^{-6}	10^{-7}	0.1590062E-02	0.2978621E-04	0.8039177E-04	2.51019

Les valeurs de $\|\operatorname{rot} H_h\|_{L^2}$ sont alors améliorées en imposant une valeur d'arrêt plus sévère à ϵ_{uzz} :

	ϵ_{uzz}	ϵ_{grd}	$\|\|H-H_h\|\|_{L^2}$	$\|\|\operatorname{rot} H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-8}	10^{-6}	0.1444500E-01	0.5012592E-07	0.7780694E-03	-
S_2	10^{-8}	10^{-6}	0.4686333E-02	0.6861140E-06	0.2400099E-03	3.52880
S_3	10^{-8}	10^{-6}	0.1590123E-02	0.5127072E-06	0.8039486E-04	2.51015

Nous notons, une nette sensibilité de l'erreur relative par rapport à la perméabilité magnétique puis, uniquement dans le cas de la méthode itérative, une variation de $\|\operatorname{rot} H_h\|_{L^2}$ en fonction de ϵ_{uzz}. Le taux de convergence conserve le même comportement qu'au paragraphe précédent.

3.3.2.3 Milieu de perméabilité relative $\mu_r = 1000$

Nous confirmons ici les conclusions avancées précédemment. D'abord, donnons les résultats obtenus par méthode directe,

	$\|\|H-H_h\|\|_{L^2}$	$\|\|\operatorname{rot} H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	0.1507905E-02	0.5022173E-06	0.7907003E-04	-
S_2	0.4897003E-03	0.5192163E-06	0.2441539E-04	3.52576

et par méthode itérative :

	ϵ_{uzz}	ϵ_{grd}	$\|\|H - H_h\|\|_{L^2}$	$\|\|\text{rot } H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-8}	10^{-8}	0.1507905E-02	0.2140438E-06	0.7907006E-04	-
S_2	10^{-8}	10^{-8}	0.4897000E-03	0.4963274E-06	0.2441537E-04	3.52576
S_3	10^{-8}	10^{-8}	0.1661758E-03	0.9344820E-06	0.8179044E-05	2.50994

Une nette variation de l'erreur relative est ainsi perçue par rapport aux cas précédents tandis que l'ordre de grandeur de $\|\text{rot } H_h\|_{L^2}$ est inchangé. Cependant, on déduit des résultats suivants,

	ϵ_{uzz}	ϵ_{grd}	$\|\|H - H_h\|\|_{L^2}$	$\|\|\text{rot } H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-7}	10^{-8}	0.1507905E-02	0.1729687E-06	0.7907006E-04	-
S_2	10^{-7}	10^{-8}	0.4897000E-03	0.7165181E-06	0.2441537E-04	3.52576
S_3	10^{-7}	10^{-8}	0.1661758E-03	0.1455865E-05	0.8179044E-05	2.50994

	ϵ_{uzz}	ϵ_{grd}	$\|\|H - H_h\|\|_{L^2}$	$\|\|\text{rot } H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-6}	10^{-8}	0.1507905E-02	0.6781420E-06	0.7907006E-04	-
S_2	10^{-6}	10^{-8}	0.4897000E-03	0.1105248E-05	0.2441537E-04	3.52576
S_3	10^{-6}	10^{-8}	0.1661759E-03	0.3853995E-05	0.8179050E-05	2.50994

la variation de $\|\text{rot } H_h\|_{L^2}$ en fonction de ϵ_{uzz}, mais aussi en comparaison avec les cas $\mu_r = 9$ et 100, celle dépendant de la perméabilité magnétique. En fait, la variation apparente de $\|\text{rot } H_h\|_{L^2}$ en fonction de la perméabilité est essentiellement due au comportement de l'algorithme itératif utilisé pour le calcul du champ magnétique. Le rotationnel de ce champ de vecteurs est indépendant de la perméabilité magnétique et conserve le même ordre de grandeur lorsqu'on impose à cet algorithme un critère d'arrêt plus sévère (ceci concerne ϵ_{uzz} dans notre cas).

	ϵ_{uzz}	ϵ_{grd}	$\|\|H - H_h\|\|_{L^2}$	$\|\|\text{rot } H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-8}	10^{-6}	0.1508091E-02	0.5250835E-06	0.7907982E-04	-
S_2	10^{-8}	10^{-6}	0.4898197E-03	0.2754355E-06	0.2442134E-04	3.52540
S_3	10^{-8}	10^{-6}	0.1663932E-03	0.1104263E-05	0.8189747E-05	2.50750

Si la méthode itérative paraît ainsi plus capricieuse, elle présente l'avantage, outre le fait qu'elle permette de considérer des maillages fins, d'être plus efficace au niveau du temps de calculs CPU (exprimé dans la suite en *secondes*). Comme nous l'indique le tableau suivant, nous avons par exemple dans le cas du maillage intermédiaire S_2 :

	μ_r	CPU	μ_r	CPU	μ_r	CPU
méthode directe	9	0.1129E+04	100	0.1365E+04	1000	0.1489E+04
$\epsilon_{uzz} = \epsilon_{grd} = 10^{-8}$	9	0.2150E+03	100	0.2582E+03	1000	0.2630E+03

En comparaison avec les résultats donnés dans [6], [5], par les méthodes de pénalisation, ceux présentés ici permettent de justifier la commodité et la précision numérique dans le calcul du champ magnétique par notre approche. Nous concluons par un taux de convergence d'ordre 2 et par une erreur relative «négligeable» lorsque le champ magnétique est calculé avec les formulations proposées.

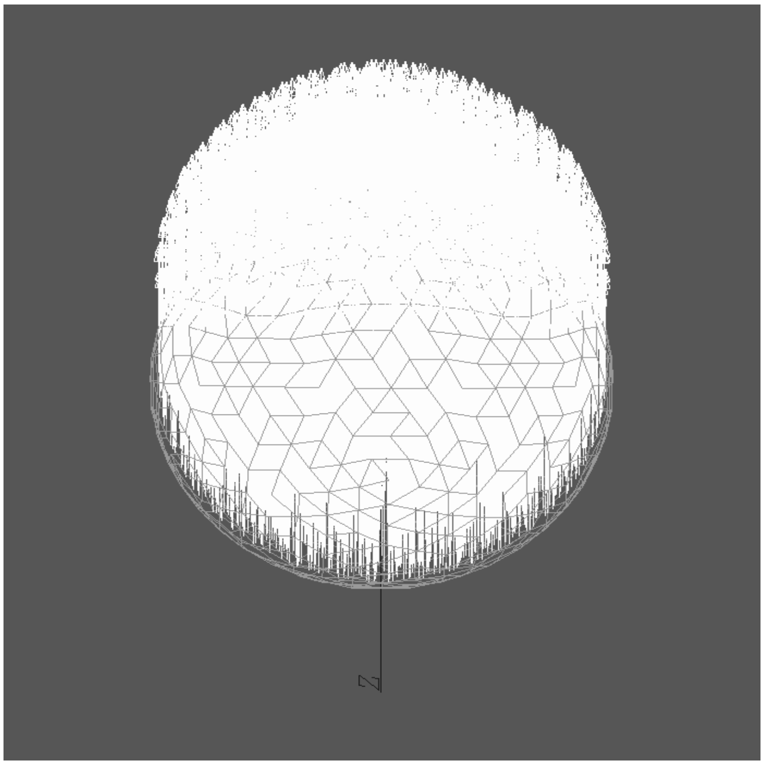


FIG. 3.1 – *Champ magnétique aux centres de gravité des tétraèdres de S_3, ($\mu_r = 1000$).*

3.3.3 Calcul effectué avec préconditionnement

Il s'agit ici de la présentation des résultats obtenus avec l'algorithme de Uzawa préconditionné (cf. § 3.2.2). A cet algorithme, nous associons trois paramètres de tolérance notés $\epsilon_{uzz}, \epsilon_{grd}$ et ϵ_{prc}. Les deux premiers de ceux-ci jouent les mêmes rôles que dans les paragraphes précédents, tandis que, ϵ_{prc} est employé comme valeur d'arrêt de l'algorithme du gradient conjugué utilisé pour l'inversion de la matrice de préconditionnement.

Aussi, dans le but de faire des comparaisons avec les résultats déjà présentés, nous distinguerons les cas $\mu_r = 100$ et 1000. La valeur de H_0 demeure fixée comme précédemment. Commençons par considérer $\mu_r = 100$ où nous avons :

	ϵ_{uzz}	ϵ_{prc}	ϵ_{grd}	$\|\|H - H_h\|\|_{L^2}$	$\|\|\text{rot } H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-8}	10^{-6}	10^{-8}	0.1444489E-01	0.3770356E-06	0.7780632E-03	-
S_2	10^{-8}	10^{-6}	10^{-8}	0.4686253E-02	0.1043647E-06	0.2400058E-03	3.52883
S_3	10^{-8}	10^{-6}	10^{-8}	0.1590062E-02	0.1159375E-05	0.8039176E-04	2.51020

	ϵ_{uzz}	ϵ_{prc}	ϵ_{grd}	$\|\|H - H_h\|\|_{L^2}$	$\|\|\text{rot } H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-8}	10^{-6}	10^{-6}	0.1444495E-01	0.3585929E-06	0.7780669E-03	-
S_2	10^{-8}	10^{-6}	10^{-6}	0.4686288E-02	0.4032852E-06	0.2400076E-03	3.52882
S_3	10^{-8}	10^{-6}	10^{-6}	0.1590226E-02	0.8211253E-06	0.8040006E-04	2.50998

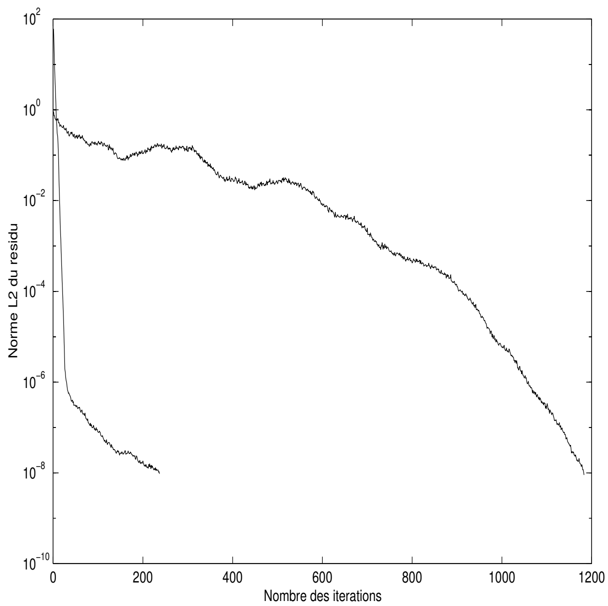
En comparaison avec les calculs effectués sans préconditionnement, les résultats obtenus ici sont semblables. Les variations sur l'erreur relative conservent le même comportement que celui déjà décrit précédemment. Nous présentons aussi, dans le même ordre d'idées mais avec $\mu_r = 1000$, le tableau qui suit :

	ϵ_{uzz}	ϵ_{prc}	ϵ_{grd}	$\|\|H - H_h\|\|_{L^2}$	$\|\|\text{rot } H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-8}	10^{-6}	10^{-6}	0.1508086E-02	0.7422065E-07	0.7907952E-04	-
S_2	10^{-8}	10^{-6}	10^{-6}	0.4898094E-03	0.7315646E-06	0.2442083E-04	3.52545
S_3	10^{-8}	10^{-6}	10^{-6}	0.1663930E-03	0.7513269E-06	0.8189737E-05	2.50745

Outre le fait que ces résultats soient aussi satisfaisants que lors du calcul sans préconditionnement, nous notons également, la réduction très significative du nombre d'itérations effectuées. Avec par exemple $\mu_r = 100$, nous obtenons le tableau ci-dessous qui contient, d'une part le nombre d'itérations ($iter_{uzz}$) et le temps d'exécution sollicités (CPU_{uzz}) pour le calcul sans préconditionnement et d'autre part, les mêmes indications ($iter_{uzp}$ et

CPU_{uzp}) lorsque l'algorithme est préconditionné.

$$\epsilon_{uzz} = 10^{-8}, \quad \epsilon_{prc} = 10^{-6}, \quad \epsilon_{grd} = 10^{-6}$$



	$iter_{uzz}$	CPU_{uzz}	$iter_{uzp}$	CPU_{uzp}
S_2	225	0.2015E+03	106	0.2008E+03
S_3	1183	0.4355E+05	237	0.3917E+05

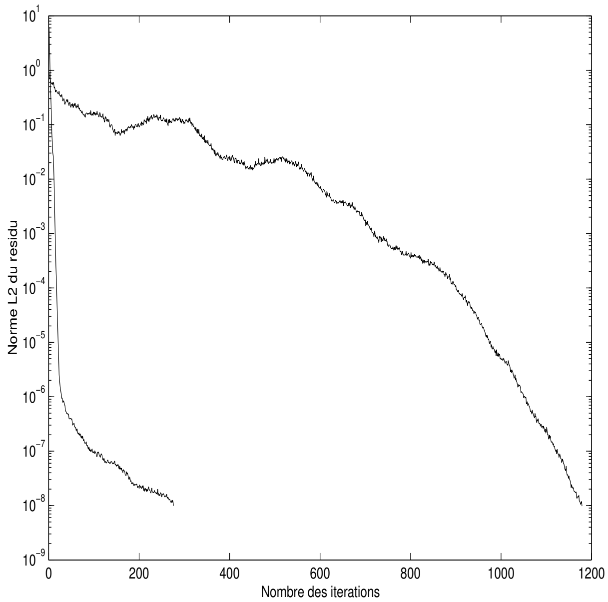
La même remarque est retenue avec $\mu_r = 1000$:

$$\epsilon_{uzz} = 10^{-8}, \quad \epsilon_{prc} = 10^{-6}, \quad \epsilon_{grd} = 10^{-6}$$

	$iter_{uzz}$	CPU_{uzz}	$iter_{uzp}$	CPU_{uzp}
S_2	236	0.2029E+03	110	0.1927E+03
S_3	1179	0.4329E+05	276	0.4078E+05

Outre la réduction significative du nombre d'itérations, on constate avec ces tableaux, le gain de temps (même relativement faible) lorsque le calcul du champ magnétique est effectué avec préconditionnement.

En fait, l'inversion de la matrice de préconditionnement nécessite un nombre d'itérations relativement important dû au moins bon conditionnement de la matrice. En fixant



par exemple $\epsilon_{prc} = 10^{-6}$ avec $\mu_r = 100$, nous avons quelques indications sur ce nombre d'itérations $(iter_{prc})$:

	$\epsilon_{uzz} = \epsilon_{grd}$	$iter_{prc}$	$\epsilon_{uzz} = \epsilon_{grd}$	$iter_{prc}$
S_2	10^{-7}	163	10^{-8}	164
S_3	10^{-7}	931	10^{-8}	943

Cette contrepartie laisse sous-entendre que pour avoir un gain de temps alors plus significatif, il est envisageable d'utiliser une méthode directe (cf. e.g. [36]) qu'un algorithme itératif, pour l'approximation de l'inverse de la matrice de préconditionnement utilisée. En effet, en faisant une factorisation de type "$Q\,R$" sur la matrice B^t apparaissant dans l'écriture (3.22), on obtient une factorisation de Cholesky de la matrice de préconditionnement dont l'approximation de l'inverse peut ainsi être effectuée, en évitant par la même occasion son stockage.

Chapitre 4

Représentation du champ magnétique par un potentiel scalaire

Dans l'idée de faire des comparaisons au point de vue numérique avec l'approche qui consiste en la détermination du champ magnétique à l'aide d'éléments finis mixtes, nous nous préoccuperons dans ce chapitre, d'une méthode faisant appel aux éléments finis nodaux classiques. Le modèle physique $(0.12) - (0.13)$ demeure inchangé.

4.1 Introduction

La détermination du champ magnétique (ou de l'induction magnétique), lorsque ce champ de vecteurs est représenté par un potentiel scalaire, n'est pas une idée nouvelle. Comme l'indique la littérature, cette représentation fut l'un des premiers concepts, adopté pour la résolution numérique des équations de la magnétostatique. Ceci, bien avant l'emploi systématique connu de nos jours, des éléments finis mixtes [9], [37], [21]. Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'emploi des éléments finis nodaux pour la détermination du champ magnétique dans différents contextes. Lorsque le milieu magnétique est homogène, il est facile de constater que le problème modèle $(0.12) - (0.13)$ se reformule en un problème de transmission dans l'espace, où l'inconnue est représentée par un potentiel scalaire continu à la traversée de la frontière de ce milieu magnétique. La discontinuité de la dérivée normale de ce potentiel scalaire est alors interprétée sous forme d'une condition de transmission sur la frontière. Il apparaît dans ce cas que, le problème modèle est similaire à un problème extérieur pour un diélectrique parfait (cf. [23]). Une méthode d'intégrale de frontière est alors appropriée, pour la reformulation de ce problème sur la frontière, et l'emploi des éléments finis nodaux surfaciques est sollicité pour l'étude numérique. Une approche semblable a fait l'objet d'une étude dans [4] pour la détermination du champ magnétique de réaction dans le cadre de l'IRM (Imagerie par Résonance Magnétique). Il est par ailleurs évoqué dans [38], [39], [40], l'emploi des éléments finis nodaux pour la détermination, dans le milieu magnétique, du potentiel scalaire servant à la représentation du champ magnétique, lorsqu'une condition au bord est imposée sur celui-ci. Lorsque le milieu magnétique est hétérogène, la reformulation du problème de la magnétostatique sous forme d'un problème de transmission est encore possible. Sur la frontière, et sur chaque hypersurface séparant deux milieux homogènes, est imposée une condition portant sur les dérivées normales du potentiel scalaire. Le problème fait donc usage d'opérateurs intégraux et sa discrétisation est plus délicate que dans le cas homogène [4]. Lorsque la non-linéarité est prise en compte, il devient alors moins évident de traiter le problème de la magnétostatique, comme précédemment. En revanche, le considérer en potentiel scalaire, comme étant un problème homogène extérieur, couplé avec un problème intérieur qui tient compte de la non-homogénéité ou de la non-linéarité, paraît simple et adéquat.

Dans ce chapitre, nous écrirons un problème continu issu du système $(0.12)-(0.13)$, où l'inconnue est un potentiel scalaire dans l'espace. Celui-ci sera ensuite reformulé avec la méthode d'intégrale de frontière présentée au chapitre 1, en un problème ayant pour inconnue, un potentiel scalaire couplé avec une fonction scalaire surfacique. Puis, en utilisant les éléments finis nodaux classiques, nous introduirons une formulation approchée qui nécessite la discrétisation de l'opérateur d'intégrale de frontière. Une estimation d'erreurs portant sur le potentiel scalaire est donnée, tout comme, les détails sur l'implémentation de la formulation. La fin du chapitre est réservée à la présentation des résultats numériques.

4.2 Problème continu

Soit Ω, le milieu magnétique assimilé à un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, de frontière Γ. La normale sortante sur celle-ci est notée n. Le milieu extérieur $\Omega' = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ est un ouvert connexe et simplement connexe. De manière générale, en désignant par D un ouvert connexe, non borné dans $\mathbb{R}^3$, nous noterons :

$$W^1(D) \;=\; \{\psi \in \mathcal{D}'(D)\,;\, (1+r^2)^{\frac{|\alpha|-1}{2}}\,\partial^\alpha\psi \;\in L^2(D)\;;\; |\alpha| \leq 1\;\}\,,$$

l'espace de Hilbert équipé de la norme $\|\psi\|_{W^1(D)} \;=\; \|\operatorname{grad}\psi\|_{(L^2(D))^3}$.

Considérons le problème modèle $(0.12)-(0.13)$ dont le champ magnétique de réaction H est la principale inconnue. De la relation (0.13), écrivons avec le lemme de Poincaré global :

$$H \;=\; \operatorname{grad}\psi \;\text{ dans }\; \mathbb{R}^3\,,$$

où ψ est un élément de $W^1(\mathbb{R}^3)$.

En tenant compte de la relation (0.12) et de la précédente écriture de H, il vient :

$$\operatorname{div}\left(\mu\left(\operatorname{grad}\psi + h^s\right)\right) \;=\; 0 \quad\text{dans}\quad \mathbb{R}^3\,. \tag{4.1}$$

Comme dans les chapitres précédents, h^s désigne le champ magnétique source et satisfait (1.4) :

$$h^s \in \{u \in (H^1(\mathbb{R}^3))^3\,;\, \operatorname{div} u = 0 \;\text{ dans }\; \mathbb{R}^3\}\,.$$

De même, μ satisfait (1.5) et est élément de

$$\{\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^3)\ ;\ \mu(x) \geq \mu_0\ \forall\, x \in \Omega\ ;\ \mu(x) = \mu_0\ \forall\, x \in \Omega'\}\,.$$

En écrivant (4.1) sous forme faible, nous formulons le problème suivant.

Pour h^s et μ comme ci-dessus, trouver un potentiel scalaire ψ dans $W^1(\mathbb{R}^3)$, tel que :

$$(\mu\ \mathrm{grad}\,\psi, \mathrm{grad}\,\psi')_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3} \;=\; -(\mu\, h^s, \mathrm{grad}\,\psi')_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3} \quad \forall\, \psi' \in W^1(\mathbb{R}^3)\,. \tag{4.2}$$

Nous avons la

Remarque 4.2.1 *Le problème* (4.2) *admet une unique solution* ψ *dans* $W^1(\mathbb{R}^3)$*. Celle-ci vérifie, conformément à* (4.1)*, les relations :*

$$\begin{aligned} \Delta\,\psi &= 0 \quad \textit{dans} \quad \Omega'\,, \\ [n \cdot \mathrm{grad}\,\psi]_\Gamma &\neq 0\,. \end{aligned}$$

Pour déterminer le potentiel scalaire ψ dans Ω', il suffit en fait de connaître sa trace sur la frontière Γ. A cet égard, rappelons que, $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est muni de la norme

$$\|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \inf_{\psi \in W^1(\Omega')\,;\,\psi|_\Gamma = \varphi} \|\psi\|_{W^1(\Omega')}\,.$$

Notons ensuite que, pour φ élément de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, le problème qui consiste à trouver ψ dans $W^1(\Omega')$ tel que :

$$\begin{aligned} \Delta\,\psi &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega'\,, \\ \psi &= \varphi \quad \text{sur} \quad \Gamma\,, \end{aligned}$$

admet une unique solution.

En considérant une fonction φ, comme inconnue surfacique, nous décrirons le potentiel scalaire ψ dans Ω'. Pour une telle description, il est adéquat d'utiliser l'opérateur de Poincaré-Steklov (cf. chapitre 1, § 1.3),

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\ :\quad H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) &\longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \varphi &\longmapsto n \cdot \mathrm{grad}\,\psi\,. \end{aligned}$$

Avec cet opérateur, nous formulerons un problème variationnel qui découle de (4.2), et dont les inconnues sont à supports dans Ω et sur Γ.

Considérons $|\,.\,|_{H^1(\Omega)}$ la semi-norme usuelle sur $H^1(\Omega)$ et définissons :

$$\mathcal{U} \;=\; \{(\psi, \varphi) \in H^1(\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\ ;\ \psi = \varphi \quad \text{sur} \quad \Gamma\}\,,$$

l'espace de Hilbert muni de la norme

$$\|(\psi, \varphi)\|_{\mathcal{U}} \;=\; \sqrt{|\psi|^2_{H^1(\Omega)} + \|\varphi\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}}\,.$$

Soit le problème variationnel formulé comme suit.

Pour h^s et μ satisfaisant (1.4) et (1.5), trouver (ψ, φ) dans $\mathcal{U}$ tel que

$$\begin{aligned} (\mu \operatorname{grad} \psi, \operatorname{grad} \eta)_{(L^2(\Omega))^3} \quad &+ \quad \mu_0 < \mathcal{P}(\varphi), \phi > \quad = \\ -\,(\mu\, h^s, \operatorname{grad} \eta)_{(L^2(\Omega))^3} \quad &- \quad \mu_0 < h^s \cdot n, \phi > \quad \forall\, (\eta, \phi) \in \mathcal{U}\ . \end{aligned} \tag{4.3}$$

Etablissons le

Théorème 4.2.1

i) Le problème (4.3) *admet une unique solution* (ψ, φ) *dans* $\mathcal{U}$ *;*

ii) le couple (ψ, φ) *permet de reconstituer un potentiel scalaire* $\underline{\psi}$ *dans* $W^1(\mathbb{R}^3)$*, satisfaisant la relation* (4.1)*, et*

iii) il existe $C(\mu_0, \mu^\star)$ *une constante positive telle que*

$$|\psi|_{H^1(\Omega)} + \|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \;\leq\; C(\mu_0, \mu^\star)\,(\|h^s\|_{(L^2(\Omega))^3} + \|h^s \cdot n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)})\,.$$

Preuve.

i) Compte tenu des propriétés de l'opérateur $\mathcal{P}$, il en découle la coercivité et la continuité sur $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ de la forme bilinéaire :

$$a((\psi, \varphi), (\eta, \phi)) \;=\; (\mu \operatorname{grad} \psi, \operatorname{grad} \eta)_{(L^2(\Omega))^3} + \mu_0 \;< \mathcal{P}(\varphi), \phi >\ . \tag{4.4}$$

Par ailleurs, il est facile de constater la continuité sur $\mathcal{U}$, de la forme linéaire

$$l(\psi, \varphi) \;=\; -(\mu\, h^s, \operatorname{grad} \psi)_{(L^2(\Omega))^3} - \mu_0 \;< h^s \cdot n, \varphi >\ . \tag{4.5}$$

Ainsi, le problème (4.3) admet une unique solution via le théorème de Lax-Milgram.

ii) Considérons (4.3) et notons par $\underline{\underline{\psi}}$ la fonction harmonique prolongeant φ dans Ω', tout comme $\underline{\underline{\eta}}$ vis à vis de ϕ. Il suit $\psi = \underline{\underline{\psi}}$ et $\eta = \underline{\underline{\eta}}$ sur Γ, puis :

$$\begin{aligned} (\mu \operatorname{grad} \psi, \operatorname{grad} \eta)_{(L^2(\Omega))^3} \quad &+ \quad \mu_0\, (\operatorname{grad} \underline{\underline{\psi}}, \operatorname{grad} \underline{\underline{\eta}})_{(L^2(\Omega'))^3} \quad = \\ -\,(\mu\, h^s, \operatorname{grad} \underline{\underline{\eta}})_{(L^2(\Omega))^3} \quad &- \quad \mu_0\, (h^s, \operatorname{grad} \underline{\underline{\eta}})_{(L^2(\Omega'))^3}\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Posons :

$$\underline{\psi} \;=\; \left\{ \begin{array}{ll} \underline{\underline{\psi}} & \text{dans} \quad \Omega'\,, \\ \psi & \text{dans} \quad \Omega \end{array} \right.$$

et formons de même $\underline{\eta}$ à partir de $\underline{\underline{\eta}}$ et η. Alors, $\underline{\psi}$ et $\underline{\eta}$ sont des fonctions de $W^1(\mathbb{R}^3)$. Par ailleurs, nous avons grâce à (4.6) :

$$(\mu\,(\operatorname{grad} \underline{\psi} + h^s), \operatorname{grad} \underline{\eta})_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3} \;=\; 0 \quad \forall\, \underline{\eta} \in W^1(\mathbb{R}^3)\,.$$

Et par conséquent, le potentiel scalaire $\underline{\psi}$ satisfait la relation (4.1).

iii) Considérons le problème (4.3) où on pose : $\eta = \psi$ et $\phi = \varphi$. Alors, les propriétés de l'opérateur $\mathcal{P}$ et de la fonction μ permettent d'écrire :

$$\mu_0 \left(|\psi|^2_{H^1(\Omega)} + \|\varphi\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\right) \leq \mu^\star \|h^s\|_{(L^2(\Omega))^3} |\psi|_{H^1(\Omega)} + \mu_0 \|h^s \cdot n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} .$$

Et donc,

$$\|(\psi, \varphi)\|_{\mathcal{U}} \leq \frac{\mu^\star}{\mu_0} \left(\|h^s\|_{(L^2(\Omega))^3} + \|h^s \cdot n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\right) .$$

□

Notons que le problème variationnel (4.3) incorpore les relations :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mu\,(\operatorname{grad}\psi + h^s)) &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\,, \\ n \cdot \operatorname{grad}\psi &= \mathcal{P}(\varphi) \quad \text{sur} \quad \Gamma\,, \\ \eta = \psi &= \varphi \quad \text{sur} \quad \Gamma\,. \end{aligned}$$

Il s'agit de la résolution d'un problème de Dirichlet extérieur couplé avec un problème de Dirichlet non homogène intérieur. Dans la suite, ψ sera est aussi nommé *potentiel magnétique scalaire*.

4.3 Problème discret

La triangulation de $\overline{\Omega}$ est celle présentée au § 2.1.1. La détermination de l'espace d'approximation de $\mathcal{U}$ se fait en utilisant les espaces d'éléments finis Ψ_h et $\mathcal{G}_h$ (cf. (2.18) et (2.7)) associés respectivement à $H^1(\Omega)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Soit,

$$\mathcal{U}_h = \{(\psi_h, \varphi_h) \in \Psi_h \times \mathcal{G}_h\,; \ \ \psi_h = \varphi_h \ \text{ sur } \ \Gamma\}$$

ce sous-espace, muni de la norme induite par celle de $\mathcal{U}$. Considérons les notations introduites en (4.4), (4.5) et introduisons le problème discret associé à (4.3).

Pour h^s et μ vérifiant (1.4) et (1.5), trouver (ψ_h, φ_h) dans $\mathcal{U}_h$ tel que :

$$a((\psi_h, \varphi_h), (\eta_h, \phi_h)) = l(\eta_h, \phi_h) \quad \forall \ (\eta_h, \phi_h) \in \mathcal{U}_h\,. \tag{4.7}$$

Nous avons le

Théorème 4.3.1

- *Le problème* (4.7) *admet une unique solution* (ψ_h, φ_h) *dans* $\mathcal{U}_h$.

- *Soit* (ψ, φ) *la solution du problème* (4.3). *Alors, il existe* $C(\mu_0, \mu^\star)$ *une constante positive, telle que*

$$|\psi-\psi_h|_{H^1(\Omega)}+\|\varphi-\varphi_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C(\mu_0,\mu^\star)\,\big(\inf_{\eta_h\in\Psi_h}|\psi-\eta_h|_{H^1(\Omega)}+\inf_{\phi_h\in\mathcal{G}_h}\|\psi-\psi_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\big)\,.$$

Preuve. Des propriétés analogues vérifiées sur l'espace $\mathcal{U}$, nous déduisons la continuité et l'uniforme $\mathcal{U}_h$−ellipticité de la forme bilinéaire $((\psi_h, \varphi_h), (\eta_h, \phi_h)) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{U}_h \longrightarrow a((\psi_h, \varphi_h), (\eta_h, \phi_h))$, ainsi que la continuité de la forme linéaire $(\eta_h, \phi_h) \in \mathcal{U}_h \longrightarrow l(\eta_h, \phi_h)$. Alors, le théorème de Lax-Milgram entraîne l'existence et l'unicité de la solution du problème. Par ailleurs, l'estimation désirée s'obtient aisément en utilisant les techniques classiques. □

Nous envisageons de donner dans la suite une estimation d'erreurs portant sur le potentiel magnétique scalaire.

Reconsidérons la solution (ψ, φ) du problème (4.3) où nous admettons que ψ est élément de $H^{k+1}(\Omega)$, avec k un entier strictement positif. Soit maintenant Π_h^n l'opérateur d'interpolation (cf. e.g. [20]) associé à l'élément fini (K, P_k, Σ_k). Alors, il existe une constante positive C_n indépendante de h telle que

$$|\psi - \Pi_h^n\psi|_{H^1(\Omega)} \leq C_n\, h^k\, \|\psi\|_{H^{k+1}(\Omega)}\,. \tag{4.8}$$

Par ailleurs, en rappelant Π_h^v l'opérateur de projection orthogonale défini comme au chapitre 2, et en admettant que φ soit élément de $H^s(\Gamma)$, il suit [1], [23] :

$$\|\varphi - \Pi_h^v\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C_v\, h^{s-\frac{1}{2}}\, \|\varphi\|_{H^s(\Gamma)} \tag{4.9}$$

avec C_v une constante positive indépendante de h et $\frac{1}{2} < s \leq 2$.

Alors, des relations (4.8), (4.9) et du théorème 4.3.1, nous obtenons grâce à des techniques classiques, la

Proposition 4.3.1 *Supposons que la solution* (ψ, φ) *du problème* (4.3) *soit dans l'espace* $\mathcal{U} \cap (H^2(\Omega) \times H^{\frac{3}{2}}(\Gamma))$ *et considérons la solution* (ψ_h, φ_h) *du problème* (4.7). *Alors, il existe* $C(\mu_0, \mu^\star, C_n, C_v)$ *une constante positive telle que*

$$|\psi - \psi_h|_{H^1(\Omega)} + \|\varphi - \varphi_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C(\mu_0, \mu^\star, C_n, C_v)\, h\,.$$

4.4 Mise en œuvre et résultats numériques

4.4.1 Mise en œuvre numérique

Il s'agit ici de présenter le calcul de chaque terme intervenant dans la formulation (4.7), tout en associant à celui-ci un bloc matriciel ; nous écrivons alors le système matriciel obtenu que nous commentons ensuite.

Commençons par rappeler avec les notations du § 2.1.1 que NS désigne le nombre de sommets de Ω et ns le nombre de sommets frontaliers.

Avec la définition de l'espace Ψ_h, le potentiel magnétique scalaire s'écrit :

$$\psi_h = \sum_{p=1}^{NS} \psi_h^p \lambda_p \tag{4.10}$$

et par ailleurs,

$$\varphi_h = \sum_{p=1}^{ns} \varphi_h^p \lambda_p . \tag{4.11}$$

Le champ magnétique source est tel que

$$h^s = \sum_{p=1}^{NS} h_p^s \lambda_p , \tag{4.12}$$

où h_p^s représente la valeur de h^s au sommet p et

$$h^s \cdot n = \sum_{p=1}^{ns} (h_p^s \cdot n) \lambda_p . \tag{4.13}$$

En tenant compte des formules (4.10) $-$ (4.13) et en prenant comme fonction-test, la fonction barycentrique λ_k en un sommet $1 \leq k \leq NS$ fixé, l'équation (4.7) fournit un système matriciel. Distinguons les deux cas suivants.

i) Degré de liberté associé à un sommet interne k : $\eta_h = \lambda_k$ et $\phi_h = 0$.

Les relations (4.10) et (4.12) permettent d'écrire,

$$\sum_{p=1}^{NS} \psi_h^p \int_\Omega \mu \operatorname{grad} \lambda_p \cdot \operatorname{grad} \lambda_k \, dx = -\sum_{p=1}^{NS} \int_\Omega \mu \, \lambda_p h_p^s \cdot \operatorname{grad} \lambda_k \, dx . \tag{4.14}$$

ii) Degré de liberté associé à un sommet frontalier k : $\eta_h = \lambda_k$ et $\phi_h = \lambda_k$.

Les termes correspondant à des intégrales frontalières apparaissent dans ce cas. Des formules (4.10) $-$ (4.13), on obtient

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{p=1}^{NS} \psi_h^p \int_\Omega \mu \operatorname{grad} \lambda_p \cdot \operatorname{grad} \lambda_k \, dx \;&+\; \mu_0 \textstyle\sum_{p=1}^{ns} \varphi_h^p \int_\Gamma \mathcal{P}(\lambda_p) \lambda_k \, d\sigma \;= \\ -\textstyle\sum_{p=1}^{NS} \int_\Omega \mu \, \lambda_p h_p^s \cdot \operatorname{grad} \lambda_k \, dx \;&-\; \mu_0 \textstyle\sum_{p=1}^{ns} (h_p^s \cdot n) \int_\Gamma \lambda_p \lambda_k \, d\sigma . \end{aligned} \tag{4.15}$$

Les relations (4.14) et (4.15) conduisent au système matriciel :

$$S X = F , \tag{4.16}$$

avec

$$S = \begin{pmatrix} G & M^t \\ M & D+P \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

la matrice du système ;

$$F = \begin{pmatrix} g \\ d+b \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

le second membre et,

$$X = \begin{pmatrix} \psi_h \\ \varphi_h \end{pmatrix}$$

l'inconnue du système.

Le calcul de la sous-matrice P a déjà fait l'objet d'une étude au chapitre 3 (cf. § 3.1.1.1). Il s'agit dans la suite d'expliciter les termes constituant les blocs matriciels G, M, D, b, g et d qui apparaissent dans les formules (4.17) et (4.18). Supposons la fonction scalaire μ constante par tétraèdres. Alors, par un assemblage classique d'éléments finis, on obtient sans difficultés

- la matrice symétrique G à l'aide des termes

$$g_{pk} = \int_\Omega \mu \operatorname{grad} \lambda_p \cdot \operatorname{grad} \lambda_k \, dx \, ,$$

où p et k désignent des sommets internes. Il en est de même pour la matrice rectangulaire M, où k désigne alors un sommet frontalier, et pour la matrice D lorsque p et k sont des sommets frontaliers.

- Par ailleurs, b a pour composantes

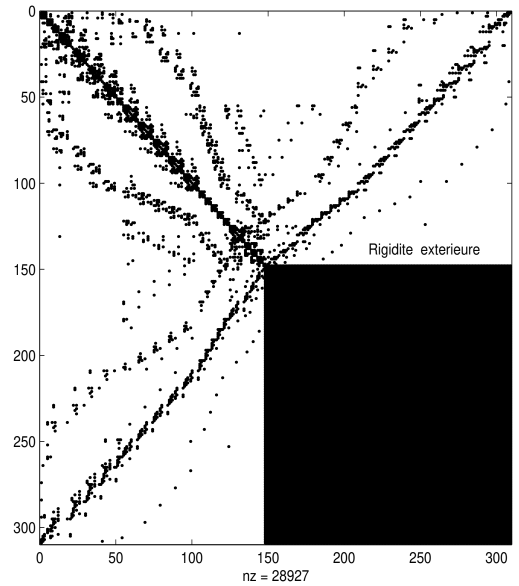
$$b_k = -\mu_0 \sum_{p=1}^{ns} (h_p^s \cdot n) \int_\Gamma \lambda_p \lambda_k \, d\sigma \, ,$$

où k est un sommet frontalier et

- g est déterminé avec

$$g_k = -\sum_{p=1}^{NS} \int_\Omega \mu \, \lambda_p h_p^s \cdot \operatorname{grad} \lambda_k \, dx \, ,$$

où k un sommet interne. Il en est de même pour les termes de d, lorsque k désigne un sommet frontalier.



Avec la numérotation des sommets utilisée, la matrice S, de dimension $NS \times NS$, a une structure symbolisée par la figure ci-dessus. Compte tenu de la structure de cette matrice, seuls les éléments non nuls de la partie triangulaire inférieure sont stockés.

Notons enfin que, l'emploi d'une méthode itérative telle que l'algorithme du gradient conjugué standard est adéquat pour la résolution du système (4.16), étant donné que la matrice S est symétrique et définie positive.

4.4.2 Résultats numériques

La région d'intérêt Ω est assimilée à un milieu sphérique de perméabilité magnétique constante. Comme au chapitre 3, § 3.3.1, le champ magnétique source régnant dans Ω est dirigé suivant l'axe Oz : $h^s = H_0\, e_z$, et le champ magnétique de réaction s'écrit aussi :

$$H = \frac{1-\mu_r}{2+\mu_r}\, h^s\,,$$

où nous rappelons que H_0 est une constante réelle et μ_r est la perméabilité magnétique relative associée à Ω.

Afin de comparer les résultats numériques présentés au chapitre 3, § 3.3.2, à ceux qui seront décrits ici, nous fixerons $H_0 = 10A/m$ et distinguerons aussi chacun des cas $\mu_r = 9, 100$ et 1000. De même, Ω est représenté par des sphères S_k $(1 \leq k \leq 3)$ dont les caractéristiques sont données au § 3.3.2. Aussi définis dans ce paragraphe, nous considérerons ici, les paramètres : α et err_{L^2} que sont le taux de convergence et l'erreur relative en norme L^2 commise sur le champ magnétique de réaction.

Les résultats qui seront décrits dans ce chapitre, relèvent du système matriciel (4.16). Nous désignons par ϵ_{grd}, la valeur d'arrêt de l'algorithme du gradient conjugué utilisé pour la résolution de ce système.

4.4.2.1 Milieu de perméabilité relative $\mu_r = 9$

Nous avons les résultats résumés dans les tableaux suivants :

	ϵ_{grd}	$\|\|H-H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-6}	0.1118061E+00	0.8541285E-01	-
S_2	10^{-6}	0.3610474E-01	0.4727142E-01	1.77497
S_3	10^{-6}	0.1224453E-01	0.2734200E-01	1.25649

	ϵ_{grd}	$\|\|H-H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-7}	0.1118061E+00	0.8541285E-01	-
S_2	10^{-7}	0.3610524E-01	0.4727175E-01	1.77495
S_3	10^{-7}	0.1224450E-01	0.2734197E-01	1.25651

Comme nous l'indique le tableau suivant, la variation de l'erreur relative et du taux de convergence est indépendante de ϵ_{grd}, au-delà de la valeur fixée précédemment.

	ϵ_{grd}	$\|\|H-H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-8}	0.1118061E+00	0.8541285E-01	-
S_2	10^{-8}	0.3610525E-01	0.4727175E-01	1.77495
S_3	10^{-8}	0.1224450E-01	0.2734197E-01	1.25651

On note que l'erreur relative commise sur le champ magnétique de réaction est bien plus importante lorsque celui-ci est déterminé à l'aide d'un potentiel scalaire. Aussi, le taux de convergence est nettement inférieur dans ce cas.

4.4.2.2 Milieu de perméabilité relative $\mu_r = 100$

	ϵ_{grd}	$\|\|H-H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-6}	0.1457483E-01	0.2788584E-01	-
S_2	10^{-6}	0.4730953E-02	0.1548987E-01	1.76399
S_3	10^{-6}	0.1605302E-02	0.8964698E-02	1.25513

	ϵ_{grd}	$\|\|H - H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-7}	0.1457483E-01	0.2788584E-01	-
S_2	10^{-7}	0.4731121E-02	0.1549015E-01	1.76394
S_3	10^{-7}	0.1605360E-02	0.8964859E-02	1.25513

La variation de l'erreur relative et du taux de convergence demeure inchangée au-delà de la valeur de ϵ_{grd} fixée dans le précédent tableau :

	ϵ_{grd}	$\|\|H - H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-8}	0.1457483E-01	0.2788584E-01	-
S_2	10^{-8}	0.4731116E-02	0.1549014E-01	1.76394
S_3	10^{-8}	0.1605389E-02	0.8964940E-02	1.25511

On note une sensibilité de l'erreur relative par rapport à la perméabilité magnétique, puis une très légère diminution du taux de convergence. Une comparaison avec les résultats du § 3.3.2 permet aussi de montrer le faible taux de convergence et l'importante erreur relative qu'on commet en déterminant le champ magnétique à l'aide d'un potentiel scalaire.

4.4.2.3 Milieu de perméabilité relative $\mu_r = 1000$

	ϵ_{grd}	$\|\|H - H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-6}	0.1509274E-02	0.8891897E-02	-
S_2	10^{-6}	0.4900247E-03	0.4940391E-02	1.76328
S_3	10^{-6}	0.1662742E-03	0.2859327E-02	1.25506

	ϵ_{grd}	$\|\|H - H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-7}	0.1509269E-02	0.8891882E-02	-
S_2	10^{-7}	0.4901743E-03	0.4941145E-02	1.76282
S_3	10^{-7}	0.1663179E-03	0.2859702E-02	1.25511

	ϵ_{grd}	$\|\|H - H_h\|\|_{L^2}$	err_{L^2}	α
S_1	10^{-8}	0.1509269E-02	0.8891882E-02	-
S_2	10^{-8}	0.4901709E-03	0.4941128E-02	1.76283
S_3	10^{-8}	0.1663363E-03	0.2859861E-02	1.25497

Ces résultats viennent confirmer les remarques faites au paragraphe précédent. L'erreur relative commise sur le champ magnétique de réaction varie en fonction de la perméabilité magnétique et le taux de convergence (à 10^{-2} près) demeure inchangé.

4.5 Conclusions

Les résultats donnés dans ce chapitre permettent de conclure qu'effectivement le champ magnétique se calcule moins bien en utilisant un potentiel scalaire. En effet, le taux de convergence est double et l'erreur relative commise sur le calcul du champ magnétique est nettement inférieure, lorsqu'on utilise les formulations mixtes.

Chapitre 5

Problèmes formulés en induction magnétique

Dans le cadre des applications de l'électrotechnique, on est souvent confronté, à la détermination de l'induction et non du champ magnétique régnant dans un milieu magnétique que parcourt une source de courant. En conservant le modèle physique décrit dans le chapitre introductif, où seule la densité de courant j sera modifiée, nous présenterons un modèle équivalent où l'inconnue physique est alors représentée par l'induction magnétique. Ensuite, nous formulerons un problème mixte dans l'espace tridimensionnel, étudié sous le formalisme du § 1.1.1. Dans le but de se ramener à un problème variationnel formulé dans le milieu magnétique sollicité, nous ferons appel à une approche d'intégrale de frontière, afin de déterminer l'inconnue physique dans le milieu extérieur. La nouvelle représentation de l'entité physique est faite en considérant, un couple formé de l'induction magnétique (restreinte au milieu magnétique) et d'une inconnue surfacique, destinée à la description de l'induction magnétique dans le milieu extérieur. Il s'agira alors, de la reformulation du problème mixte initialement introduit, en un problème dont les inconnues sont à support dans le milieu magnétique et sur la frontière de celui-ci. Nous terminerons donc ce chapitre, par l'étude du problème ainsi reformulé.

5.1 Introduction

Principalement, les notations et formules des chapitres 0 et 1 sont reprises ici. Le milieu magnétique Ω sera un ouvert borné, de frontière connexe Γ, avec n la normale sortante sur celle-ci. $\Omega' = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ désignera le milieu extérieur assimilé à un ouvert connexe, simplement connexe.

Physiquement, Ω' sera affecté de la réluctance[1] ν_0 et, la constitution de Ω se limitera aux matériaux isotropes caractérisés par la réluctance magnétique ν. Pour rendre compte de phénomènes propres aux matériaux de type para-magnétique, par exemple,

1. Cf. § 0.3 pour la définition de ce terme.

la réluctance ν sera prise comme suit :

$$0 < \nu_\star \leq \nu(x) \leq \nu_0 \ \ \forall\, x \in \Omega, \ \ \nu(x) = \nu_0 \ \ \forall\, x \in \Omega' \tag{5.1}$$

où $\nu_\star$ est une constante réelle.

La densité de courant sera prise comme étant le champ de vecteurs,

$$j \in H_0(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Omega) \tag{5.2}$$

qui permet de considérer le champ magnétique source,

$$\begin{aligned} h^s \in \{u \in (H^1(\mathbb{R}^3))^3\,;\, \mathrm{div}\, u = 0 \ \text{ dans } \ \mathbb{R}^3\}\,, \\ \mathrm{rot}\, h^s \ = \ \widetilde{j}\,. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Au même titre que j, nous admettrons désormais comme dans les chapitres précédents, que h^s est une donnée.

Alors, pour j, h^s et ν donnés comme ci-dessus, nous cherchons à déterminer un champ de vecteurs B s'annulant à l'infini et satisfaisant dans $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{div}\, B \ = \ 0\,, \tag{5.4}$$

$$\mathrm{rot}(\nu\, B) \ = \ \widetilde{j} \tag{5.5}$$

avec la loi de comportement,

$$\nu\, B \ = \ H + h^s\,, \tag{5.6}$$

où H est un champ de vecteurs tel que :

$$\mathrm{rot}\, H \ = \ 0 \ \text{ dans } \ \mathbb{R}^3\,. \tag{5.7}$$

L'interprétation physique donnée est celle qui consiste, pour une densité de courant parcourant un milieu magnétique, en la détermination de l'induction créée dans l'espace tridimensionnel. Dans les formules (5.6) et (5.7), H représente le champ magnétique de réaction, et est pris de rotationnel nul, car aucune source de courant autre que j n'est sensée exister dans l'espace. L'inconnue notée[2] B représente bien l'induction magnétique.

5.2 Problème mixte dans R^3

Des relations (5.4) – (5.7), nous formulons un problème variationnel dont l'entité physique B est une inconnue principale.

2. Pour des faits liés aux notations qui seront utilisées, nous avons choisi de la distinguer par une lettre majuscule.

En notant que

$$H(\mathrm{div}\ ;\ \mathbb{R}^3)\ =\ \{u \in (L^2(\mathbb{R}^3))^3\ ;\ \mathrm{div}\, u \in L^2(\mathbb{R}^3)\}\,,$$

introduisons

$$\mathfrak{B}\ =\ \{u \in H(\mathrm{div}\,;\ \mathbb{R}^3)\ ;\ \mathrm{div}\, u = 0\ \text{ dans }\ \Omega',\ \mathrm{rot}\, u = 0\ \text{ dans }\ \Omega'\}$$

l'espace de Hilbert équipé du produit scalaire

$$(u,v)_{\mathfrak{B}}\ =\ (u,v)_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3} + (\mathrm{div}\, u, \mathrm{div}\, v)_{L^2(\Omega)}$$

et de la norme qui en découle,

$$\|u\|^2_{\mathfrak{B}}\ =\ (u,u)_{\mathfrak{B}}\,.$$

L'appartenance à $\mathfrak{B}$ traite certaines propriétés physiques qui doivent être satisfaites par l'induction magnétique. Cet espace est formé de champs de vecteurs à composante normale continue. Les termes $(u,u)_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3}$, $(\mathrm{div}\, u, \mathrm{div}\, u)_{(L^2(\Omega))^3}$ représentent des énergies [17], [13]. Il est ainsi raisonnable de chercher précisément le champ de vecteurs B dans un tel espace.

Avec le lemme de Poincaré global, la relation (5.7) donne lieu à l'existence d'un unique potentiel scalaire $\psi \in W^1(\mathbb{R}^3)$, tel que :

$$H = \mathrm{grad}\, \psi\,.$$

De la formule (5.6), nous obtenons ainsi dans $\mathbb{R}^3$, la relation :

$$\nu\, B\ =\ \mathrm{grad}\, \psi + h^s\,,$$

tout en notant que, celle-ci permet de satisfaire automatiquement (5.5), compte tenu des propriétés de h^s. En l'écrivant ensuite sous forme variationnelle, nous obtenons

$$(\nu\, B, B')_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3}\ +\ (\mathrm{div}\, B', \psi)_{L^2(\Omega)}\ =\ (h^s, B')_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3}\ \ \forall\ B' \in \mathfrak{B}\,.$$

Par ailleurs, de (5.4) nous avons

$$(\mathrm{div}\, B, \psi')_{L^2(\Omega)}\ =\ 0\ \ \forall\ \psi' \in L^2(\Omega)\,.$$

Avec ces équations variationnelles, nous formulons le problème suivant.

Pour h^s et ν vérifiant (5.3) et (5.1), trouver un couple (B,ψ) dans l'espace $\mathfrak{B} \times L^2(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned}(\nu\, B, B')_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3}\ +\ (\mathrm{div}\, B', \psi)_{L^2(\Omega)}\ &=\ (h^s, B')_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3}\quad \forall\ B' \in \mathfrak{B}\,,\\ (\mathrm{div}\, B, \psi')_{L^2(\Omega)}\ &=\ 0\quad \forall\ \psi' \in L^2(\Omega)\,.\end{aligned} \tag{5.8}$$

Le problème (5.8) dont l'induction magnétique est désignée comme inconnue principale, est par construction, un problème mixte dérivant du modèle physique (5.4) − (5.5). L'inconnue auxiliaire ψ de (5.8) n'a pas de signification physique précise[3]. Pour l'étude de ce problème, nous utilisons le formalisme introduit au chapitre 1, § 1.1.1.

Posons,

$$a(u, v) \;=\; (\nu\, u, v)_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3}\,,$$

la forme bilinéaire continue sur $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$,

$$b(u, \psi) \;=\; (\operatorname{div} u, \psi)_{L^2(\Omega)}\,,$$

celle continue sur $\mathfrak{B} \times L^2(\Omega)$, et notons que, l'application $u \in \mathfrak{B} \;\longrightarrow\; (h^s, u)_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3}$ est continue.

Considérons à présent le sous-espace fermé dans $\mathfrak{B}$, noté

$$V \;=\; \{u \in \mathfrak{B}\ ;\ b(u, \psi) = 0\ \ \forall\, \psi \in L^2(\Omega)\}\,.$$

Remarque 5.2.1 *V coïncide avec*

$$\{u \in \mathfrak{B}\ ;\ \operatorname{div} u = 0\ \ \textit{dans}\ \ \mathbb{R}^3\}\,.$$

Il en découle le

Lemme 5.2.1 *La forme bilinéaire continue a est $V-$elliptique.*

5.2.1 Condition de Babuška-Brezzi

Afin de conclure quant au caractère bien-posé du problème (5.8), introduisons la

Proposition 5.2.1 *Il existe une constante β strictement positive, telle que*

$$\sup_{u \in \mathfrak{B}} \frac{b(u, \psi)}{\|u\|_{\mathfrak{B}}} \;\geq\; \beta\, \|\psi\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, \psi \in L^2(\Omega)\,.$$

Preuve. Soit $\psi \in L^2(\Omega)$. Considérons la solution v dans $H^1_0(\Omega)$ du problème :

$$\begin{aligned} \Delta\, v \;&=\; \psi \quad \text{dans} \quad \Omega\,, \\ v \;&=\; 0 \quad\ \ \text{sur} \quad\ \Gamma\,, \end{aligned} \tag{5.9}$$

et posons ensuite $u = \operatorname{grad} v$. Alors, il vient

$$u \in H(\operatorname{div}\,;\,\Omega) \cap \{u \in H(\operatorname{rot}\,;\,\Omega)\ ;\ u \wedge n|_{\Gamma} = 0\}\,,$$

et il existe une constante C strictement positive et indépendante de ψ, telle que

$$\|u\|_{H(\operatorname{div}\,;\,\Omega)} \;\leq\; C\, \|\psi\|_{L^2(\Omega)}\,. \tag{5.10}$$

3. ψ jouera tout de même un rôle important dans la détermination de l'induction magnétique.

Considérons à présent la solution κ dans $W^1(\Omega')$ du problème extérieur :

$$\begin{aligned} \Delta \kappa &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega' , \\ n \cdot \operatorname{grad} \kappa &= u \cdot n \quad \text{sur} \quad \Gamma , \end{aligned} \tag{5.11}$$

et posons $\underset{\sim}{u} = \operatorname{grad} \kappa$. Alors, il existe une constante C' strictement positive, telle que

$$\| \underset{\sim}{u} \|_{(L^2(\Omega'))^3} \leq C' \, \|u \cdot n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} . \tag{5.12}$$

Soit alors,

$$B_\star = \begin{cases} \underset{\sim}{u} & \text{dans} \quad \Omega' , \\ u & \text{dans} \quad \Omega . \end{cases}$$

Il est aisé de voir que le champ de vecteur $B_\star$ ainsi déterminé est dans l'espace $H(\operatorname{div} \, ; \, \mathbb{R}^3)$. De plus, $B_\star$ est un élément de l'espace $\mathfrak{B}$, car dans Ω' : $\operatorname{div} B_\star = 0$ et $\operatorname{rot} B_\star = 0$.

Par continuité de l'application de trace, nous avons l'existence d'une constante C_1 strictement positive, telle que

$$\|u \cdot n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C_1 \, \|u\|_{H(\operatorname{div} \, ; \, \Omega)} = C_1 \, \|B_\star\|_{H(\operatorname{div} \, ; \, \Omega)} ,$$

ce qui permet alors de déduire de (5.12), la relation :

$$\|B_\star\|_{H(\operatorname{div} \, ; \, \Omega)} \geq \frac{1}{C_1 C'} \, \|B_\star\|_{(L^2(\Omega'))^3} .$$

Ainsi,

$$\|B_\star\|_{H(\operatorname{div} \, ; \, \Omega)} \geq C_2 \, \|B_\star\|_{\mathfrak{B}} ,$$

où $C_2 > 0$ est une constante. La relation (5.10) montre alors que :

$$\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \geq \frac{C_2}{C} \, \|B_\star\|_{\mathfrak{B}} . \tag{5.13}$$

Considérons enfin la forme bilinéaire b qui permet d'écrire suivant la première relation de (5.9) :

$$b(B_\star, \psi) = (\operatorname{div} B_\star, \psi)_{L^2(\Omega)} = \|\psi\|^2_{L^2(\Omega)} .$$

Selon (5.13),

$$b(B_\star, \psi) \geq \frac{C_2}{C} \, \|B_\star\|_{\mathfrak{B}} \|\psi\|_{L^2(\Omega)} ,$$

d'où la proposition. □

Nous avons le

Théorème 5.2.1

i) Le problème (5.8) *admet une unique solution* (B, ψ) *dans l'espace* $\mathfrak{B} \times L^2(\Omega)$ *;*

ii) *B vérifie les relations* (5.4) – (5.5) *dans le domaine Ω et en dehors de celui-ci ;*

iii) *enfin, il existe $C(\nu_\star, \nu_0)$ une constante telle que*

$$\|B\|_{\mathfrak{B}} + \|\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\nu_\star, \nu_0)\, \|h^s\|_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3} .$$

Preuve.

i) D'après le formalisme du § 1.1.1, le lemme 5.2.1 et la proposition 5.2.1 montrent que, le problème (5.8) possède une unique solution (B, ψ) dans $\mathfrak{B} \times L^2(\Omega)$.

ii) Il est immédiat, avec le corollaire 1.1.1, que le champ de vecteurs B est dans l'espace V, et donc satisfait automatiquement la relation (5.4).

L'appartenance de B à V montre, en outre, que B vérifie la relation (5.5) en dehors du domaine Ω. Aussi, avec la première équation variationnelle de (5.8) où, nous adoptons comme fonction-test $B' = \mathrm{rot}\, \tilde{\varphi}\, ;\, \varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^3$, il en découle dans Ω :

$$\mathrm{rot}\, \nu\, B = \mathrm{rot}\, h^s .$$

iii) Déduisons de la deuxième équation variationnelle de (5.8) :

$$\|\mathrm{div}\, B\|_{L^2(\Omega)} \;=\; 0\,, \tag{5.14}$$

ce qui entraîne :

$$\|B\|_{\mathfrak{B}} \;=\; \|B\|_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3} .$$

En posant $B' = B$ dans la première équation variationnelle de (5.8), nous obtenons la relation

$$(\nu\, B, B)_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3} \;=\; -(\mathrm{div}\, B, \psi)_{L^2(\Omega)} + (h^s, B)_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3}\,,$$

qui permet d'établir avec (5.1) et (5.14) :

$$\|B\|_{\mathfrak{B}} \leq \frac{1}{\nu_\star}\, \|h^s\|_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3} . \tag{5.15}$$

Par ailleurs, étant donné que $\psi \in L^2(\Omega)$, considérons (comme dans la preuve de la proposition 5.2.1) le champ de vecteurs $B_\star$ dans l'espace $\mathfrak{B}$ satisfaisant :

$$\mathrm{div}\, B_\star \;=\; \psi\,, \tag{5.16}$$

$$\|B_\star\|_{\mathfrak{B}} \;\leq\; C\, \|\psi\|_{L^2(\Omega)}\,, \tag{5.17}$$

où C est une constante strictement positive. En adoptant ce champ de vecteurs comme fonction-test dans la première équation variationnelle de (5.8), il suit

$$(\mathrm{div}\, B_\star, \psi)_{L^2(\Omega)} \;=\; -(\nu\, B, B_\star)_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3} + (h^s, B_\star)_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3} .$$

Les relations (5.1), (5.16) et (5.17) montrent que

$$\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq C\,(\nu_0\,\|B\|_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3} + \|h^s\|_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3})\,,$$

et la formule (5.15) permet alors d'établir :

$$\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq C\,(\frac{\nu_0}{\nu_\star} + 1)\,\|h^s\|_{(L^2(\mathrm{R}^3))^3}\,. \tag{5.18}$$

Les estimations (5.15) et (5.18) permettent d'achever la preuve. □

5.3 Une approche d'intégrale de frontière et ses conditions

Le problème (5.8) tel qu'écrit ci-dessus ne peut pour l'instant faire l'objet d'une approximation numérique[4]. Celui-ci nécessite auparavant, une reformulation qui consiste en l'élimination de fonctions et d'intégrales à support dans $\mathbb{R}^3$, au profit d'autres ayant alors des supports dans Ω et sur Γ. Il s'agit ici de la description d'une méthode d'intégrale de frontière dont la démarche est voisine de celle présentée dans la section § 1.3. Bien avant, nous aurons besoin de quelques espaces fonctionnels adéquats, définis sur une surface.

5.3.1 Quelques espaces fonctionnels et notations sur Γ

Nous désignons toujours par n le champ normal (supposé être C^∞) externe à Γ (surface de classe C^∞), et par $H^s(\Gamma)$, $s \in \mathbb{R}$, l'espace de Sobolev usuel.

L'espace de champs normaux à Γ est noté,

$$NH^s(\Gamma) = \{p \in (H^s(\Gamma))^3;\ p = v\,n\ ;\ v \in H^s(\Gamma)\}$$

et celui de champs tangents,

$$TH^s(\Gamma) = \{p \in (H^s(\Gamma))^3;\ p \cdot n = 0\}\,.$$

On a la somme directe

$$(H^s(\Gamma))^3 = TH^s(\Gamma) \oplus NH^s(\Gamma)$$

qui peut être aussi une décomposition orthogonale, à condition que, l'espace $(H^s(\Gamma))^3$ soit équipé d'une norme adéquate (cf. [41]). Tout élément de cet espace s'écrit,

$$p = \Pi p + (p \cdot n)\,n$$

où $\Pi p = n \wedge (p \wedge n) = (n \wedge p) \wedge n$ et $(p \cdot n)\,n$ sont respectivement éléments de $TH^s(\Gamma)$ et de $NH^s(\Gamma)$.

4. En tout cas, dans le cadre de l'approche numérique que nous envisageons.

Nous adopterons les identifications usuelles des espaces duaux :

$$\begin{aligned} (TH^s(\Gamma))' &= TH^{-s}(\Gamma)\,, \\ (NH^s(\Gamma))' &= NH^{-s}(\Gamma)\,. \end{aligned}$$

Afin de rappeler les opérateurs différentiels relatifs aux surfaces, considérons un point x_0 sur Γ. Soit S un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel qu'il existe un voisinage V_{x_0} sur Γ et une application $\Psi\,:\,S \longrightarrow V_{x_0}$ tels que,

$$\forall\, x \in V_{x_0},\ \exists!\, y = (y_1, y_2) \in S\,;\ x = \Psi(y)\,.$$

Une base du plan tangent en tout point de V_{x_0} est définie en écrivant :

$$e_1(x) \;=\; \tfrac{\partial \Psi}{\partial y_1}(y)\,, \quad e_2(x) \;=\; \tfrac{\partial \Psi}{\partial y_2}(y)$$

ainsi que le tenseur métrique g_{ij} :

$$\left\{ \begin{aligned} g_{\alpha,\beta} &= e_\alpha \cdot e_\beta\ ;\ 1 \le \alpha, \beta \le 2\,, \\ g_{\alpha,3} &= g_{3,\alpha} \;=\; 0\,, \\ g_{3,3} &= 1\,. \end{aligned} \right.$$

Alors,

- le gradient surfacique d'une fonction ξ de $\mathcal{D}(\Gamma)$ est défini par :

$$\mathrm{grad}_\Gamma\, \xi \;=\; \sum_{1 \le \alpha, \beta \le 2} g_{\alpha,\beta}\, \frac{\partial \xi}{\partial y_\beta}\, e_\alpha$$

  et le rotationnel surfacique par,

$$\mathbf{rot}_\Gamma\, \xi \;=\; \mathrm{grad}_\Gamma\, \xi \wedge n\,.$$

- De même, pour tout élément $p = p^\beta e_\beta$ dans $(\mathcal{D}(\Gamma))^2$ tangent à Γ, la divergence surfacique est

$$\mathrm{div}_\Gamma\, p \;=\; \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{1 \le \beta \le 2} \frac{\partial(\sqrt{g} p^\beta)}{\partial y_\beta}\,,$$

  où on a posé $g = \det(g_{ij})$. Le rotationnel surfacique est défini tel que,

$$\mathrm{rot}_\Gamma\,(n \wedge p) \;=\; \mathrm{div}_\Gamma\, p\,,$$

  et l'opérateur de Laplace-Beltrami est tel que,

$$-\Delta_\Gamma\, \xi \;=\; \mathrm{rot}_\Gamma(\mathbf{rot}_\Gamma\, \xi) \;=\; -\mathrm{div}_\Gamma(\mathrm{grad}_\Gamma\, \xi)\,.$$

Nous avons les relations :

$$
\begin{aligned}
< \mathrm{grad}_\Gamma\, \xi, p > &= - < \xi, \mathrm{div}_\Gamma\, p >, \\
< \mathbf{rot}_\Gamma\, \xi, p > &= < \xi, \mathrm{rot}_\Gamma\, p >.
\end{aligned}
$$

Par dualité, ces opérateurs sont aussi définis[5] pour une distribution scalaire (T) ou vectorielle (U) sur Γ :

$$
\begin{aligned}
< \mathrm{grad}_\Gamma\, T, p > &= - < T, \mathrm{div}_\Gamma\, p >, \\
< \mathbf{rot}_\Gamma\, T, p > &= < T, \mathrm{rot}_\Gamma\, p >, \\
< \mathrm{rot}_\Gamma\, U, \xi > &= < U, \mathbf{rot}_\Gamma\, \xi >, \\
< \mathrm{div}_\Gamma\, U, \xi > &= - < U, \mathrm{grad}_\Gamma\, \xi >
\end{aligned}
$$

Les opérateurs $\mathrm{rot}_\Gamma, \mathrm{div}_\Gamma$ sont linéaires et continus de : $TH^s(\Gamma) \longrightarrow H^{s-1}(\Gamma)$, comme $\mathrm{grad}_\Gamma, \mathbf{rot}_\Gamma$ définis de $H^s(\Gamma) \longrightarrow TH^{s-1}(\Gamma)$.

Pour une étude plus complète de ces définitions, on pourra se référer à Choquet-Bruhat [42]. Néanmoins, celles rappelées ci-dessus suffiront pour l'étude qui va être menée.

Introduisons à présent :

$$TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\,\Gamma) = \{p \in TH^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\ ;\ \mathrm{rot}_\Gamma\, p \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\},$$

l'espace de Hilbert équipé de la norme

$$\|p\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\Gamma)} = \sqrt{\|p\|^2_{(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^3} + \|\,\mathrm{rot}_\Gamma\, p\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}}$$

et

$$TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}\,;\,\Gamma) = \{p \in TH^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\ ;\ \mathrm{div}_\Gamma\, p \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\},$$

l'espace de Hilbert équipé de la norme

$$\|p\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}\,;\Gamma)} = \sqrt{\|p\|^2_{(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^3} + \|\mathrm{div}_\Gamma\, p\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}}\,.$$

Les deux espaces de Hilbert ainsi définis sont duaux l'un de l'autre :

$$
\begin{aligned}
TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\,\Gamma) &= (TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}\,;\,\Gamma))', \\
TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}\,;\,\Gamma) &= (TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\,\Gamma))'.
\end{aligned}
$$

Pour d'autres détails concernant ces espaces, nous renvoyons le lecteur à [43], [44], [45].

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, nous noterons par $< .\,, . >$ le crochet de dualité opérant entre les espaces $TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}\,;\,\Gamma)$ et $TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\,\Gamma)$.

5. Le produit de dualité $< .\,, . >$ de deux vecteurs est considéré comme étant le produit scalaire par rapport à la métrique g_{ij} sur Γ : $< U, p >= \sum_{\alpha,\beta} < U^\alpha, g_{\alpha,\beta}\, p^\beta >$.

5.3.2 Approche d'intégrale de frontière

Nous sommes motivés par la reformulation du problème (5.8) en un autre problème équivalent, alors formé, d'intégrales uniquement définies sur Ω et Γ. Cette démarche nécessite une prise en compte des équations régissant les fonctions dans la région Ω'. Ainsi, la structure de l'espace fonctionnel $\mathfrak{B}$ jouera un rôle essentiel.

Comme l'inconnue B du problème (5.8) est recherchée dans cet espace, nous avons en particulier :

$$\operatorname{div} B = 0 \text{ dans } \Omega'.$$

Ceci permet de déduire l'existence d'un potentiel-vecteur A dans $(W^1(\Omega'))^3$ tel que

$$\begin{aligned} B &= \operatorname{rot} A \quad \text{dans} \quad \Omega', \\ \operatorname{div} A &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega'. \end{aligned} \tag{5.19}$$

En outre, la structure de l'espace $\mathfrak{B}$ permet d'écrire :

$$\operatorname{rot} B = 0 \text{ dans } \Omega'.$$

Ainsi nous constatons avec (5.19) :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\operatorname{rot} A &= 0, \\ \operatorname{div} A &= 0, \end{aligned}$$

et donc le potentiel-vecteur A est harmonique dans Ω'.

Comme le suggère (5.19), connaître A dans Ω' suffirait pour la détermination de l'induction magnétique dans la même région. Encore mieux, connaître A uniquement sur la frontière Γ à l'instar de sa trace tangentielle, suffirait pour la détermination de ce potentiel-vecteur dans Ω' et donc l'induction magnétique dans la même région.

En effet, pour ζ donné dans l'espace $TH^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}; \Gamma)$, il existe un potentiel-vecteur A dans $(W^1(\Omega'))^3$ qui satisfait

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\operatorname{rot} A &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega', \\ \operatorname{div} A &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega', \\ \Pi A &= \zeta \quad \text{sur} \quad \Gamma. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Si la détermination de l'induction magnétique dans le milieu extérieur fait appel à celle de A, les propriétés de l'entité physique nous intéressent cependant en priorité. Bien que le problème (5.20) ne possède pas une unique solution, nous avons néanmoins une caractérisation intéressante de ses solutions, résumée dans le

Lemme 5.3.1 *Tous les potentiel-vecteurs A satisfaisant* (5.20) *sont tels que :*

i) $\operatorname{rot} A$ *est unique,* *ii)* $n \wedge \operatorname{rot} A$ *est un élément de l'espace*

$$TH^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}^0 ; \Gamma) \;=\; \{p \in TH^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div} ; \Gamma) \; ; \; \operatorname{div}_\Gamma p = 0\}\,,$$

iii) *et il existe une constante* C *strictement positive telle que*

$$\|\operatorname{rot} A\|_{(L^2(\Omega'))^3} \;\leq\; C\,\|\zeta\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot} ; \Gamma)}\,.$$

Preuve.

i) Désignons par A une solution du problème (5.20), avec $\zeta = 0$. Il résulte effectivement de la première relation de (5.20), après une intégration par parties, et grâce au comportement de A à l'infini :

$$\|\operatorname{rot} A\|_{(L^2(\Omega'))^3} \;=\; 0\,.$$

ii) D'abord, il suit par définition de l'application trace que, $n \wedge \operatorname{rot} A$ est un élément de $TH^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div} ; \Gamma)$. Ensuite, la relation désirée s'obtient en constatant que, pour toute fonction $v \in \mathcal{D}(\Gamma)$:

$$< \operatorname{div}_\Gamma(n \wedge \operatorname{rot} A), v >= \;-\; < n \wedge \operatorname{rot} A, \operatorname{grad}_\Gamma v > \;.$$

En considérant dans $\mathcal{D}(\Omega')$ un prolongement de la fonction régulière, encore noté v, nous obtenons après une intégration par parties :

$$< \operatorname{div}_\Gamma(n \wedge \operatorname{rot} A), v >= \;-(\operatorname{rot}\operatorname{rot} A, \operatorname{grad} v)_{(L^2(\Omega'))^3}\,.$$

Ceci montre effectivement, compte tenu de la première relation de (5.20), que

$$\operatorname{div}_\Gamma(n \wedge \operatorname{rot} A) \;=\; 0\,.$$

iii) Par ailleurs, il résulte de la première relation de (5.20),

$$\|\operatorname{rot} A\|^2_{(L^2(\Omega'))^3} \;\leq\; \|n \wedge \operatorname{rot} A\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div} ; \Gamma)} \|\zeta\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot} ; \Gamma)}\,.$$

Il existe donc, avec la continuité de l'application trace, une constante C strictement positive telle que

$$\|\operatorname{rot} A\|^2_{(L^2(\Omega'))^3} \;\leq\; C\,\|\operatorname{rot} A\|_{(L^2(\Omega'))^3}\,\|\zeta\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot} ; \Gamma)}\,,$$

ce qui achève la preuve. $\square$

Par le précédent énoncé, nous avons implicitement indiqué, que la détermination de l'induction magnétique dans le milieu extérieur est faite de manière unique. Comme lors de l'étude du champ magnétique (cf. chapitre 1, § 1.3.1), nous envisageons, conformément à cet énoncé, d'exhiber un opérateur liant ζ à la partie tangentielle de l'induction magnétique considérée dans le milieu extérieur.

Introduisons à cet égard l'opérateur linéaire

$$\begin{array}{rcccc} \mathcal{L} & : & TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\,\Gamma) & \longrightarrow & TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Gamma) \\ & & \zeta & \longmapsto & n \wedge \mathrm{rot}\, A \end{array}$$

où A est solution du problème (5.20).

Quelques propriétés de cet opérateur sont résumées dans le

Lemme 5.3.2 *Ainsi défini, $\mathcal{L}$ est symétrique, positif et continu.*

Preuve. Considérons ζ et ζ' dans $TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\,\Gamma)$, auxquels nous associons respectivement, A et A' vérifiant (5.20). Il suit avec la définition de $\mathcal{L}$,

$$< \mathcal{L}(\zeta), \zeta' > = < n \wedge \mathrm{rot}\, A, \zeta' > = \; (\mathrm{rot}\, A, \mathrm{rot}\, A')_{(L^2(\Omega'))^3} \,,$$

ce qui permet alors de constater la symétrie de $\mathcal{L}$.

En outre, comme nous avons de la précédente relation :

$$< \mathcal{L}(\zeta), \zeta > = \; \|\,\mathrm{rot}\, A\|^2_{(L^2(\Omega'))^3} \,,$$

nous notons que $\mathcal{L}$ est positif sur son domaine.

Pour conclure, constatons, avec la continuité de l'application trace que :

$$\|\mathcal{L}(\zeta)\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}\,;\Gamma)} \; = \; \|n \wedge \mathrm{rot}\, A\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}\,;\Gamma)} \; \leq \; C\,\|\,\mathrm{rot}\, A\|_{(L^2(\Omega'))^3} \,,$$

où $C > 0$ est une constante. Le lemme 5.3.1 permet alors de déduire que $\mathcal{L}$ est effectivement continu. □

Pour nous intéresser à la coercivité de $\mathcal{L}$, commençons par faire le lien entre cet opérateur et celui qui s'introduit en considérant le problème suivant (cf. e.g. [41]) :

Pour p donné dans $TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Gamma)$, déterminer un champ de vecteurs A dans $(W^1(\Omega'))^3$ vérifiant :

$$\begin{array}{rcccc} \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, A & = & 0 & \mathrm{dans} & \Omega' \,, \\ \mathrm{div}\, A & = & 0 & \mathrm{dans} & \Omega' \,, \\ \mathrm{rot}\, A \wedge n & = & p & \mathrm{sur} & \Gamma \,. \end{array} \qquad (5.21)$$

Soit

$$\mathcal{A}(p) \; = \; \Pi \int_\Gamma \frac{p(y)}{4\pi |x-y|}\, d\sigma_y \,,$$

l'opérateur continu de $TH^s(\Gamma)$ vers $TH^{s+1}(\Gamma)$ et qui vérifie l'inégalité de Nédélec-Plachard [23] :

$$< p, \mathcal{A}(p) > \geq \alpha \, \|p\|^2_{(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^3} \quad \forall \, p \in TH^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\,, \tag{5.22}$$

où $\alpha > 0$ est une constante.

Souvent utilisé dans le cadre de l'étude des courants induits dans un conducteur (cf. e.g. [11]), cet opérateur met en évidence, le lien entre la distribution p désignant alors une densité surfacique de courant fictif, et la trace tangentielle du champ de vecteurs A qui représente le champ électrique extérieur au conducteur.

Les données ζ et p de (5.20) et (5.21) sont telles que (cf. e.g. [46], [11]) :

$$\zeta \, = \, \mathcal{A}(p)\,. \tag{5.23}$$

Cette formule a bien un sens, étant donné qu'en appliquant à $\mathcal{A}$ un élément p considéré dans $TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Gamma)$ et donc dans $TH^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on définit ainsi un élément de $TH^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et par conséquent, de $TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\,\Gamma)$. Notons, par ailleurs, que l'opérateur $\mathcal{L}$ n'est cependant pas l'inverse de $\mathcal{A}$.

En outre de la continuité de l'opérateur $\mathcal{A}$, signalée ci-dessus, constatons avec la continuité de l'injection canonique, qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\mathcal{A}(p)\|_{(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^3} \, \leq \, C \, \|p\|_{(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^3} \quad \forall \, p \in TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Gamma)\,.$$

Ensuite, comme la coercivité de $\mathcal{A}$ rappelée en (5.22) s'applique aussi sur $TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Gamma)$, déduisons que :

$$< p, \mathcal{A}(p) > \geq \, C' \, \|\mathcal{A}(p)\|^2_{(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^3} \quad \forall \, p \in TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}^{\,0}\,;\,\Gamma)\,,$$

où $C' > 0$ est une constante.

Alors, avec la formule (5.23), il suit que l'opérateur $\mathcal{L}$ introduit précédemment satisfait :

$$< \mathcal{L}(\zeta), \zeta > \geq \, C'' \, \|\zeta\|^2_{(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^3} \quad \forall \, \zeta \in TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\,\Gamma) \tag{5.24}$$

où $C'' > 0$ est une constante.

Ainsi, $\mathcal{L}$ n'est pas coercif sur son domaine. La relation (5.24) suffira, cependant, pour l'étude que nous envisageons de mener.

5.3.3 Condition de raccordement sur Γ

Après l'étude faite ci-dessus, nous voudrions passer de la détermination du champ de vecteurs B dans l'espace tout entier, à celle de ce champ de vecteurs dans le domaine Ω cette fois, puis à celle d'une inconnue[6] supplémentaire ζ à support sur Γ. Il est certain que la détermination d'un tel champ de vecteurs et celle de ζ ne peuvent se faire de manière indépendante.

6. Elle sera aussi désignée : *inconnue surfacique associée à B.*

En effet, comme B s'écrit dans la région Ω' conformément à (5.19) et est initialement un champ de vecteurs de l'espace $H(\mathrm{div}\ ;\ \mathbb{R}^3)$, il en suit que le saut de sa trace normale à travers la frontière Γ est nul. Et par conséquent, nous avons

$$B|_\Omega \cdot n \ = \ \mathrm{rot}\, A \cdot n \ \text{ sur } \ \Gamma\,.$$

Cette condition, liée à l'approche d'intégrale de frontière, est certes due à la structure de l'espace $\mathfrak{B}$, qui contient les champs de vecteurs à composante normale continue sur Γ. Comme nous le constatons, le champ de vecteurs B à support dans Ω et la nouvelle inconnue ζ recherchée sur Γ, sont directement liés par la relation ci-dessus où $\Pi A = \zeta$.

Plus précisément, considérons une fonction v dans $\mathcal{D}(\Gamma)$ dont nous notons encore par v son prolongement dans $\mathcal{D}(\Omega')$. Alors, nous avons avec la première formule de Green,

$$< \mathrm{rot}\, A \cdot n, v > = \ (\mathrm{grad}\, v, \mathrm{rot}\, A)_{(L^2(\Omega'))^3}$$

et avec la deuxième formule de Green,

$$< \mathrm{rot}\, A \cdot n, v > = \ - < \mathrm{grad}\, v, A \wedge n >$$

i.e.,

$$< \mathrm{rot}\, A \cdot n, v > = < \mathrm{div}_\Gamma\, (A \wedge n), v > \ .$$

Comme $\mathrm{div}_\Gamma\, p = \mathrm{rot}_\Gamma\, (n \wedge p)$, il suit,

$$\mathrm{rot}\, A \cdot n \ = \ \mathrm{rot}_\Gamma\, \Pi\, A\,.$$

Et donc, l'induction magnétique et son inconnue surfacique associée sont telles que :

$$B \cdot n \ = \ \mathrm{rot}_\Gamma\, \zeta \ \text{ sur } \ \Gamma\,. \tag{5.25}$$

Nous ferons par la suite référence à (5.25), sous le nom, **condition de raccordement** sur Γ. Pour l'étude qui va être menée, celle-ci jouera un important rôle.

De l'espace $\mathfrak{B}$, nous introduisons l'espace de Hilbert

$$\mathcal{M} \ = \ \{(u,\zeta) \in H(\mathrm{div}\ ;\ \Omega) \times TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot};\ \Gamma)\ ;\ u \cdot n = \mathrm{rot}_\Gamma\, \zeta \ \text{ sur } \ \Gamma\,\}$$

équipé de la norme

$$\|(u,\zeta)\|_{\mathcal{M}} \ = \ \sqrt{\|u\|^2_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)} + \|\zeta\|^2_{TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\Gamma)}}\,.$$

C'est dans cet espace que seront recherchées l'induction magnétique et son inconnue surfacique associée. Nous faisons apparaître explicitement dans $\mathcal{M}$, la condition de raccordement ; celle-ci étant essentielle. Dans l'énoncé qui suit, explicitons quelques propriétés de cet espace.

Théorème 5.3.1 *Soient les espaces de Hilbert $\mathfrak{B}$ et $\mathcal{M}$. Alors, il existe un isomorphisme (algèbrique et topologique) entre ces espaces, donné par*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{I}_f & : & \mathfrak{B} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ & & B & \longmapsto & (B|_\Omega, \zeta)\,. \end{array}$$

Preuve. De tout champ de vecteurs B dans $\mathfrak{B}$, un élément $(B|_\Omega, \zeta)$ de $\mathcal{M}$ se définit comme précédemment.

Soient à présent B_Ω dans l'espace $H(\mathrm{div}\ ; \Omega)$ et ζ dans $TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\ ; \Gamma)$ vérifiant la condition de raccordement. Désignons par A un champ de vecteurs satisfaisant le problème extérieur (5.20) et posons :

$$B_{\Omega'} = \mathrm{rot}\, A \ \text{ dans } \ \Omega' .$$

Il vient : $\mathrm{div}\, B_{\Omega'} = 0$ et $\mathrm{rot}\, B_{\Omega'} = 0$. En outre,

$$B_\Omega \cdot n = \mathrm{rot}_\Gamma\, \zeta = B_{\Omega'} \cdot n \ \text{ sur } \ \Gamma .$$

En posant,

$$B = \begin{cases} B_{\Omega'} & \text{dans} \quad \Omega' , \\ B_\Omega & \text{dans} \quad \Omega \end{cases}$$

nous formons un champ de vecteurs de saut $[B \cdot n]_\Gamma = 0$. Et par conséquent, B est un élément de l'espace $\mathfrak{B}$. De plus,

$$\begin{aligned} \|B\|^2_{\mathfrak{B}} &= \|B_\Omega\|^2_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)} + \|B_{\Omega'}\|^2_{(L^2(\Omega'))^3} \\ &= \|B_\Omega\|^2_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)} + \|\mathrm{rot}\, A\|^2_{(L^2(\Omega'))^3} \\ &= \|B_\Omega\|^2_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)} + < \mathcal{L}(\zeta), \zeta > . \end{aligned}$$

Il suit, de la continuité de l'opérateur $\mathcal{L}$, qu'il existe une constante C strictement positive telle que

$$\|B\|^2_{\mathfrak{B}} \leq C\, (\|B_\Omega\|^2_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)} + \|\zeta\|^2_{TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\Gamma)}) .$$

De même, avec la relation (5.24), il existe une constante C' strictement positive telle que

$$\|B\|^2_{\mathfrak{B}} \geq C'\, (\|B\|^2_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)} + \|\zeta\|^2_{(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^3}) .$$

Avec la continuité de l'application trace normale, il existe une constante $C'' > 0$ telle que

$$\|B\|^2_{\mathfrak{B}} \geq C''\, (\|B\|^2_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)} + \|B \cdot n\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|\zeta\|^2_{(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^3}) ,$$

et la relation (5.25) montre que,

$$\|B\|^2_{\mathfrak{B}} \geq C''\, (\|B\|^2_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)} + \|\zeta\|^2_{TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\Gamma)}) ,$$

ce qui achève la preuve. □

Notons que la première projection de l'isomorphisme $\mathcal{I}_f$ ne coïncide pas avec l'espace $H(\mathrm{div}\ ; \Omega)$, compte tenu du fait que, les éléments de cet espace doivent être soumis à la condition de raccordement.

La méthode d'intégrale de frontière, ainsi abordée, permettra comme nous l'envisageons, d'établir une formulation variationnelle issue de (5.8), alors formée d'intégrales supportées par Ω et Γ uniquement. Nous utiliserons directement les formules exposées dans le présent paragraphe.

5.4 Problème mixte formulé avec l'approche d'intégrale de frontière

5.4.1 Formulation du problème

Considérons l'inconnue principale B du problème (5.8). Par le théorème 5.3.1, il existe un couple (B_Ω, ζ) dans l'espace $\mathcal{M}$, où B_Ω désigne la restriction du champ de vecteurs B dans Ω et ζ la trace tangentielle d'un champ de vecteurs A satisfaisant les relations $(5.19)-(5.20)$. En traitant de même la fonction-test B' considérée dans $\mathfrak{B}$, nous en retenons un couple (B'_Ω, ζ') dans l'espace $\mathcal{M}$, où ζ' désigne la trace tangentielle du champ de vecteurs A' vérifiant aussi $(5.19)-(5.20)$.

Considérons à présent la première équation de (5.8) et écrivons avec la formule (5.19) :

$$\begin{aligned}(\nu\, B_\Omega, B'_\Omega)_{(L^2(\Omega))^3} \quad + \quad \nu_0\,(\mathrm{rot}\, A, \mathrm{rot}\, A')_{(L^2(\Omega'))^3} \quad + \quad (\mathrm{div}\, B'_\Omega, \psi)_{L^2(\Omega)} \quad = \\ (h^s, B'_\Omega)_{(L^2(\Omega))^3} \quad + \quad (h^s, \mathrm{rot}\, A')_{(L^2(\Omega'))^3}\,.\end{aligned} \tag{5.26}$$

Débarrassons-nous du terme $(\mathrm{rot}\, A, \mathrm{rot}\, A')_{(L^2(\Omega'))^3}$, en notant que :

$$(\mathrm{rot}\, A, \mathrm{rot}\, A')_{(L^2(\Omega'))^3} = < \mathcal{L}(\zeta), \zeta' > \;.$$

Avant d'examiner le terme $(h^s, \mathrm{rot}\, A')_{(L^2(\Omega'))^3}$ de (5.26), notons que, le champ magnétique source ayant les mêmes propriétés que B dans la région Ω' :

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\, h^s &= 0\,,\\ \mathrm{rot}\, h^s &= 0\,,\end{aligned}$$

il en découle que la transformation appliquée à B est aussi valable pour h^s. Ensuite, par le lemme 5.3.1, nous avons $n \wedge h^s$ qui est bien un élément de l'espace $TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}\,^0\,; \Gamma)$. Alors, un appel à la seconde formule de Green et à la relation (5.3) montre que,

$$(h^s, \mathrm{rot}\, A')_{(L^2(\Omega'))^3} = < n \wedge h^s, \zeta' > \;.$$

Ainsi, la première équation de (5.8), s'écrit encore :

$$\begin{aligned}(\nu\, B_\Omega, B'_\Omega)_{(L^2(\Omega))^3} \quad + \quad \nu_0 < \mathcal{L}(\zeta), \zeta' > \quad + \quad (\mathrm{div}\, B'_\Omega, \psi)_{L^2(\Omega)} \quad = \\ (h^s, B'_\Omega)_{(L^2(\Omega))^3} \quad + \quad < n \wedge h^s, \zeta' > \qquad \forall\, (B'_\Omega, \zeta') \in \mathcal{M}\,.\end{aligned} \tag{5.27}$$

La seconde équation variationnelle de (5.8) demeure inchangée, étant donné que, celle-ci ne fait pas intervenir des intégrales supportées par Ω'. Avec cette équation variationnelle et (5.27), nous introduisons le problème suivant.

Pour h^s et ν vérifiant (5.3) et (5.1), trouver un couple (B, ζ) dans $\mathcal{M}$ et une fonction ψ dans $L^2(\Omega)$ tels que

$$\begin{aligned} (\nu\, B, B')_{(L^2(\Omega))^3} \quad &+ \quad \nu_0 < \mathcal{L}(\zeta), \zeta' > \quad + \ (\operatorname{div} B', \psi)_{L^2(\Omega)} \quad = \\ (h^s, B')_{(L^2(\Omega))^3} \quad &+ \quad < n \wedge h^s, \zeta' > \quad \forall\ (B', \zeta') \in \mathcal{M}\,, \\ (\operatorname{div} B, \psi')_{L^2(\Omega)} \quad &= \quad 0 \qquad\qquad \forall\ \psi' \in L^2(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Par Comparaison au problème (5.8), nous notons que l'inconnue ψ est toujours recherchée dans le même espace fonctionnel et, constatons que le problème (5.28) est essentiellement formé de fonctions à supportées par Ω et Γ.

5.4.2 Etude du problème

Nous consacrons cette partie à l'étude de (5.28). Posons,

$$\underline{a}((u, \zeta), (v, \eta)) \ = \ (\nu\, u, v)_{(L^2(\Omega))^3} + \nu_0 \ < \mathcal{L}(\zeta), \eta >\,, \tag{5.29}$$

la forme bilinéaire définie sur $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$,

$$\underline{b}((u, \zeta), \phi) \ = \ (\operatorname{div} u, \phi)_{L^2(\Omega)}\,, \tag{5.30}$$

celle définie sur $\mathcal{M} \times L^2(\Omega)$, et

$$\underline{l}((u, \zeta)) \ = \ (h^s, u)_{(L^2(\Omega))^3} + < n \wedge h^s, \zeta > \tag{5.31}$$

la forme linéaire définie sur $\mathcal{M}$.

Proposition 5.4.1 *Les formes définies ci-dessus sont continues : il existe des constantes $C_1, C_2, C_3 > 0$ telles que*

$$\begin{aligned} |\underline{a}((u, \zeta), (v, \eta))| \ &\leq \ C_1\, \|(u, \zeta)\|_{\mathcal{M}} \|(v, \eta)\|_{\mathcal{M}} \quad \forall\, (u, \zeta), (v, \eta) \in \mathcal{M}\,, \\ |\underline{b}((u, \zeta), \phi)| \ &\leq \ C_2\, \|(u, \zeta)\|_{\mathcal{M}} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \quad\ \forall\, (u, \zeta) \in \mathcal{M},\ \forall\, \phi \in L^2(\Omega)\,, \end{aligned}$$

et

$$|\underline{l}((u, \zeta))| \ \leq \ C_3\, \|(u, \zeta)\|_{\mathcal{M}} \ \ \forall\, (u, \zeta) \in \mathcal{M}\,.$$

Preuve. En tenant compte successivement de (5.1) et de la continuité de l'opérateur $\mathcal{L}$ (cf. lemme 5.3.2), il suit

$$|a((u, \zeta), (v, \eta))| \ \leq \ \nu_0\, \|u\|_{(L^2(\Omega))^3} \|v\|_{(L^2(\Omega))^3} + \nu_0\, C\, \|\zeta\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\Gamma)} \|\eta\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\Gamma)}\,.$$

où $C > 0$ est une constante. Nous avons alors,

$$|a((u,\zeta),(v,\eta))| \le \nu_0 (1+C)\, \|(u,\zeta)\|_{\mathcal{M}} \|(v,\eta)\|_{\mathcal{M}} .$$

D'autre part,

$$|\underline{b}((u,\zeta),\phi)| \le \|\mathrm{div}\, u\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)}$$

et donc,

$$|\underline{b}((u,\zeta),\phi)| \le \|(u,\zeta)\|_{\mathcal{M}} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} .$$

Enfin,

$$|\underline{l}((u,\zeta))| \le \|h^s\|_{(L^2(\Omega))^3} \|u\|_{(L^2(\Omega))^3} + \|h^s \wedge n\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}^0\,;\Gamma)} \|\zeta\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\Gamma)} ,$$

d'où

$$|\underline{l}((u,\zeta))| \le (\|h^s\|_{(L^2(\Omega))^3} + \|h^s \wedge n\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}^0\,;\Gamma)})\, \|(u,\zeta)\|_{\mathcal{M}} ,$$

ce qui achève la preuve. □

Avec ces nouvelles notations, (5.28) s'écrit aussi : trouver $((B,\zeta),\psi) \in \mathcal{M} \times L^2(\Omega)$, tel que

$$\begin{aligned} \underline{a}((B,\zeta),(v,\eta)) \;+\; \underline{b}((v,\eta),\psi) &= \underline{l}((v,\eta)) \quad \forall\, (v,\eta) \in \mathcal{M} , \\ \underline{b}((B,\zeta),\phi) &= 0 \qquad\qquad \forall\, \phi \in L^2(\Omega) . \end{aligned}$$

Il admet pour inconnue physique le couple (B,ζ) où le champ de vecteurs B représente l'induction magnétique régnant dans Ω, tandis que, ζ est l'inconnue surfacique associée à B.

Introduisons le sous-espace de $\mathcal{M}$,

$$\underline{V} = \{(u,\zeta) \in \mathcal{M}\ ;\ \underline{b}((u,\zeta),\psi) = 0 \ \ \forall\, \psi \in L^2(\Omega)\} .$$

Remarque 5.4.1 $\underline{V}$ *coïncide avec*

$$\{(u,\zeta) \in \mathcal{M}\ ;\ \mathrm{div}\, u = 0 \ \ \textit{dans}\ \ \Omega\} .$$

Ceci permet d'énoncer le

Lemme 5.4.1 *La forme bilinéaire* $\underline{a}$ *est* $\underline{V}-$*elliptique.*

Preuve. Soit (u,ζ) un élément de $\underline{V}$. De la relation (5.1), il suit

$$\underline{a}((u,\zeta),(u,\zeta)) \ge \nu_\star \|u\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \nu_0 < \mathcal{L}(\zeta),\zeta > .$$

Ensuite, avec (5.24), il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\underline{a}((u,\zeta),(u,\zeta)) \ge \nu_\star \|u\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \nu_0\, C\, \|\zeta\|^2_{(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^3} ,$$

i.e.,

$$\underline{a}((u,\zeta),(u,\zeta)) \,\geq\, \nu_\star \,\|u\|^2_{H(\operatorname{div};\Omega)} + \nu_0\, C\, \|\zeta\|^2_{(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^3}\,.$$

Il existe, de la continuité de l'application trace normale, une constante $C' > 0$ telle que

$$\underline{a}((u,\zeta),(u,\zeta)) \,\geq\, \nu_\star \,\|u\|^2_{H(\operatorname{div};\Omega)} + \nu_\star\, C'\, \|u\cdot n\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \nu_0\, C\, \|\zeta\|^2_{(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^3}\,.$$

Comme (u,ζ) est en particulier un élément de $\mathcal{M}$, il suit :

$$\underline{a}((u,\zeta),(u,\zeta)) \,\geq\, \nu_\star \,\|u\|^2_{H(\operatorname{div};\Omega)} + \nu_\star\, C'\, \|\operatorname{rot}_\Gamma \zeta\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \nu_0\, C\, \|\zeta\|^2_{(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^3}\,.$$

Ainsi, il existe une constante $C(\nu_\star,\nu_0) > 0$ telle que

$$\underline{a}((u,\zeta),(u,\zeta)) \,\geq\, C(\nu_\star,\nu_0)\, \|(u,\zeta)\|^2_{\mathcal{M}} \quad \forall\, (u,\zeta) \in \underline{V}\,.$$

□

Nous pouvons, dès à présent, constater le rôle joué par la condition de raccordement. Malgré la non coercivité de l'opérateur $\mathcal{L}$ sur son domaine, la condition de raccordement permet toutefois d'éluder cet "handicap" et de montrer l'ellipticité de la forme $\underline{a}$.

Afin de conclure quant à la nature du problème (5.28), introduisons la

Proposition 5.4.2 *Il existe une constante β strictement positive, telle que*

$$\sup_{(u,\zeta)\in\mathcal{M}} \frac{\underline{b}((u,\zeta),\psi)}{\|(u,\zeta)\|_{\mathcal{M}}} \,\geq\, \beta\, \|\psi\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, \psi \in L^2(\Omega)\,.$$

Preuve. Soit ψ dans $L^2(\Omega)$. Alors, il existe (comme dans la preuve de la proposition 5.2.1), un champ de vecteurs $B_\star$ dans l'espace $\mathfrak{B}$ satisfaisant :

$$\operatorname{div} B_\star \;=\; \psi\,, \tag{5.32}$$

$$\|B_\star\|_{\mathfrak{B}} \;\leq\; C\, \|\psi\|_{L^2(\Omega)}\,, \tag{5.33}$$

où C est une constante strictement positive indépendante de ψ.

En considérant ensuite l'isomorphisme $\mathcal{I}_f$ introduit dans le théorème 5.3.1, nous avons : $\mathcal{I}_f(B_\star) = (B_\star|_\Omega, \zeta_\star) \in \mathcal{M}$ et,

$$\|(B_\star|_\Omega,\zeta_\star)\|_{\mathcal{M}} \leq C'\, \|B_\star\|_{\mathfrak{B}}\,,$$

où $C' > 0$ est une constante.

En exprimant cette dernière relation dans (5.33), il suit

$$\|(B_\star|_\Omega,\zeta_\star)\|_{\mathcal{M}} \,\leq\, C''\, \|\psi\|_{L^2(\Omega)}\,, \tag{5.34}$$

où $C'' > 0$ est une constante.

Rappelons à présent la forme bilinéaire $\underline{b}$ qui s'écrit conformément à (5.32) :

$$\underline{b}((B_\star|_\Omega, \zeta_\star), \psi) \;=\; \|\psi\|^2_{L^2(\Omega)} \,.$$

Par suite, nous avons de (5.34) :

$$\underline{b}((B_\star|_\Omega, \zeta_\star), \psi) \;\geq\; \frac{1}{C''}\, \|(B_\star|_\Omega, \zeta_\star)\|_{\mathcal{M}} \|\psi\|_{L^2(\Omega)} \,,$$

ce qui achève la preuve. □

Nous avons le

Théorème 5.4.1

i) (5.28) *admet une unique solution* $((B,\zeta),\psi)$ *dans l'espace* $\mathcal{M} \times L^2(\Omega)$ *et*

ii) *il existe une constante* $C(\nu_\star, \nu_0) > 0$ *telle que*

$$\|(B,\zeta)\|_{\mathcal{M}} + \|\psi\|_{L^2(\Omega)} \;\leq\; C(\nu_\star,\nu_0)\,(\|h^s\|_{(L^2(\Omega))^3} + \|h^s \wedge n\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}^0\,;\Gamma)}) \,.$$

Preuve.

i) La $\underline{V}$−ellipticité de la forme bilinéaire $\underline{a}$ prouvée dans le lemme 5.4.1 et la condition de Babuška-Brezzi justifiée par la proposition 5.4.2, montrent d'après le formalisme du § 1.1.1 que, le problème (5.28) possède une solution unique dans l'espace $\mathcal{M} \;\times\; L^2(\Omega)$.

ii) Il vient de manière immédiate de la deuxième équation variationnelle de (5.28) :

$$\|\mathrm{div}\, B\|_{L^2(\Omega)} \;=\; 0 \,, \tag{5.35}$$

ce qui entraîne,

$$\|B\|_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)} \;=\; \|B\|_{(L^2(\Omega))^3} \,.$$

En choisissant B et ζ comme fonctions-tests dans la première équation variationnelle de (5.28), nous avons

$$\begin{array}{c} (\nu\, B, B)_{(L^2(\Omega))^3} \;\;+\;\; \nu_0 < \mathcal{L}(\zeta), \zeta > \;\;= \\ -\;\; (\mathrm{div}\, B, \psi)_{L^2(\Omega)} \;\;+\;\; (h^s, B)_{(L^2(\Omega))^3} \;\;+\;\; < h^s \wedge n, \zeta > \;. \end{array}$$

Le lemme 5.4.1 permet d'écrire,

$$C\, \|(B,\zeta)\|^2_{\mathcal{M}} \;\leq\; |(\mathrm{div}\, B, \psi)_{L^2(\Omega)}| + |(h^s, B)_{(L^2(\Omega))^3}| + |< h^s \wedge n, \zeta >|$$

où $C > 0$ est une constante. Avec (5.35), nous en déduisons

$$\|(B,\zeta)\|^2_{\mathcal{M}} \;\leq\; C'\,(\|h^s\|_{(L^2(\Omega))^3} \|B\|_{(L^2(\Omega))^3} + \|h^s \wedge n\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}^0\,;\Gamma)} \|\zeta\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\Gamma)}) \,,$$

où $C' > 0$ est une constante. Nous avons :

$$\|(B,\zeta)\|_{\mathcal{M}} \leq C''\left(\|h^s\|_{(L^2(\Omega))^3} + \|h^s \wedge n\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}^0\,;\Gamma)}\right) \tag{5.36}$$

avec $C'' > 0$ une constante.

Considérons à présent ψ dans $L^2(\Omega)$, et comme dans la preuve de la proposition 5.4.2, le couple $(B_\star, \zeta_\star)$ satisfaisant les relations (5.32) et (5.34). En adoptant ensuite ce couple comme fonction-test, dans la première équation variationnelle de (5.28), il suit

$$\begin{aligned}(\mathrm{div}\, B_\star, \psi)_{L^2(\Omega)} \;=\; & -\; (\nu\, B, B_\star)_{(L^2(\Omega))^3} \;-\; \nu_0 < \mathcal{L}(\zeta), \zeta_\star > \\ & +\; (h^s, B_\star)_{(L^2(\Omega))^3} \;+\; < n \wedge h^s, \zeta_\star > .\end{aligned}$$

En faisant appel successivement à (5.1), (5.32) et à la continuité de l'opérateur $\mathcal{L}$, il en découle

$$\begin{aligned}\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)} \;\leq\; & \nu_0\, C'\,(\|B\|_{(L^2(\Omega))^3}\|B_\star\|_{(L^2(\Omega))^3} + \|\zeta\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\Gamma)}\|\zeta_\star\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\Gamma)}) \\ & + \|h^s\|_{(L^2(\Omega))^3}\|B_\star\|_{(L^2(\Omega))^3} + \|h^s \wedge n\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}^0\,;\Gamma)}\|\zeta_\star\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\Gamma)}\end{aligned}$$

où $C' > 0$ est une constante. Nous en déduisons ensuite avec (5.34),

$$\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\nu_0)\,(\|B\|_{(L^2(\Omega))^3} + \|\zeta\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\Gamma)} + \|h^s\|_{(L^2(\Omega))^3} + \|h^s \wedge n\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}^0\,;\Gamma)})$$

où $C(\nu_0) > 0$. Ceci permet d'établir :

$$\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq 2C(\nu_0)\,(\|(B,\zeta)\|_{\mathcal{M}} + \|h^s\|_{(L^2(\Omega))^3} + \|h^s \wedge n\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}^0\,;\Gamma)}). \tag{5.37}$$

(5.36) et (5.37) permettent d'achever la preuve. □

Notons que, le lien entre les problèmes (5.8) et (5.28) est bien un lien biunivoque[7], comme nous l'indique la

Proposition 5.4.3 *Soit* $(B,\psi) \in \mathfrak{B} \times L^2(\Omega)$ *la solution du problème* (5.8). *Alors, il existe* $\zeta \in TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\Gamma)$ *tel que* $((B|_\Omega, \zeta), \psi) \in \mathcal{M} \times L^2(\Omega)$ *soit solution du problème* (5.28).

Inversement, si $((B_\Omega, \zeta), \psi) \in \mathcal{M} \times L^2(\Omega)$ *est la solution du problème* (5.28), *alors il existe un champ de vecteurs* B *prolongeant* B_Ω *en dehors de* Ω, *tel que* $(B,\psi) \in \mathfrak{B} \times L^2(\Omega)$ *soit solution du problème* (5.8).

7. Celui-ci étant assuré par l'isomorphisme établi dans le théorème 5.3.1.

Cet énoncé s'établit de manière aisée en utilisant des arguments déjà évoqués dans les § 5.3.2 et 5.3.3.

Il est par ailleurs aussi important compte tenu du théorème 5.2.1 $- ii)$ et de la proposition 5.4.3, de noter par équivalence, que (5.28) résout bien le problème physique $(5.4) - (5.5)$. Nous avons en effet le

Corollaire 5.4.1 *Soit* $((B_\Omega, \zeta), \psi)$ *la solution du problème* (5.28)*. Alors, le couple* (B_Ω, ζ) *permet de constituer un champ de vecteurs* B *qui vérifie* (5.4) *et* (5.5)*.*

5.5 Quelques remarques

Nous avons présenté dans ce chapitre, une formulation variationnelle en induction magnétique traitant le même modèle physique que les formulations établies pour l'étude du champ magnétique, à la différence près, que la source de courant considérée est à support dans le domaine Ω. Ceci n'est qu'une simplification du modèle, étant donné que l'approche d'intégrale de frontière présentée ici s'adapte aussi bien dans le cas où, on considère une densité de courant à divergence nulle et à support pas forcément contenu dans Ω. En effet, dans ce contexte, il est aussi possible d'écrire dans le milieu extérieur, la densité de courant comme étant un champ de vecteurs qui dérive d'un potentiel-vecteur.

Contrairement au cas de la détermination du champ magnétique, notons que, l'opérateur d'intégrale de frontière ayant permis la représentation de l'induction magnétique dans le milieu extérieur, n'est pas coercif sur son domaine. Toutefois, la condition de raccordement, entre l'induction magnétique et son inconnue surfacique associée, permet de s'affranchir de cet "handicap" dans l'étude de la formulation (5.28). Nous faisons dans la suite de ce travail, une discrétisation de cette formulation.

Chapitre 6

Approximations par éléments finis mixtes et de surface

Nous envisageons dans ce chapitre de formuler un problème discret associé au problème en induction magnétique (5.28), étudié dans le chapitre précédent. Nous commencerons par introduire les éléments finis destinés à l'approximation des différents espaces fonctionnels intervenant dans (5.28). Une description de l'induction magnétique sera alors faite dans un espace d'éléments finis adapté, ainsi que celle de l'inconnue surfacique associée. Ensuite, nous tâcherons, avec les éléments finis utilisés, de satisfaire une condition sur la frontière entre l'induction magnétique et son inconnue associée, semblable à la condition de raccordement (5.25). La formulation discrète qui retiendra notre attention tout au long de ce chapitre repose sur une méthode par approximation conforme utilisant les éléments finis de Raviart-Thomas en association avec les éléments finis de surface [47] et de volumes [2]. Nous montrerons que le problème discret introduit permet de déterminer de manière unique l'induction magnétique, tout en conservant les propriétés physiques de celle-ci. Dans un souci de présentation, nous avons préféré montrer dans la dernière partie de ce chapitre la discrétisation de l'opérateur d'intégrale de frontière intervenant dans la formulation (5.28). Pour le discrétiser, nous ferons essentiellement appel aux éléments finis de surface qui permettront alors de faire des approximations conformes des espaces auxquels il est associé.

6.1 Introduction

Il s'agit dans cette partie de présenter les différents éléments finis qui seront utilisés tout au long du chapitre. Commençons par rappeler que les triangulations $\mathcal{T}_h^1$ du domaine Ω et $\mathcal{T}_h^2$ de la frontière Γ, introduites au chapitre 2, § 2.1.1 demeurent inchangées ici. Nous reprendrons donc, les notations de ce paragraphe. NK, NF, NA et NS sont respectivement le nombre de tétraèdres, de facettes, d'arêtes et de sommets de Ω. Aussi, nf, na et ns sont respectivement le nombre de facettes, d'arêtes et de sommets frontaliers.

6.1.1 Eléments finis de surface

Nous nous limitons à la présentation de deux types d'éléments finis, d'ordre minimal, définis sur la frontière Γ. Il s'agira d'une part de ceux permettant d'avoir une approximation conforme de l'espace

$$TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}\,;\Gamma) \;=\; \{p \in TH^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\,;\, \mathrm{div}_\Gamma\, p \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\}\,,$$

et d'autre part, ceux destinés à l'approximation de

$$TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\Gamma) \;=\; \{p \in TH^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\,;\; \mathrm{rot}_\Gamma\, p \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\}\,.$$

Pour plus de détails concernant ces éléments finis, se référer à [47], [11], [45].

6.1.1.1 Approximation de l'espace $TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}\,;\Gamma)$

L'élément fini local est donné par le triplet $(T, D^1_\Gamma, B^1_\Gamma)$ où

- T est un triangle,
- D^1_Γ est l'espace vectoriel

$$D^1_\Gamma \;=\; \{p = a + c\,x\,;\, c \in P_0, a \in (P_0)^2, x = (x_1, x_2)\}$$

- et B^1_Γ représente l'ensemble des trois moments suivants

$$\int_l p\cdot n_l \quad \forall\, p \in D^1_\Gamma$$

où n_l désigne la normale sortante à l'arête l sur le plan du triangle.

Cet élément fini est conforme et unisolvant dans l'espace $TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}\,;\Gamma)$. Nous définissons ainsi

$$\mathcal{F}_h \;=\; \{p_h \in TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}\,;\Gamma)\,;\, p_h|_T \in D^1_\Gamma \;\;\forall\, T \in \mathcal{T}^2_h\}\,, \tag{6.1}$$

l'espace d'approximation de dimension

$$\dim \mathcal{F}_h \;=\; na\,.$$

Les espaces $\mathcal{F}_h$ et $\mathcal{H}_h$ (cf. (2.1)) héritent des propriétés des espaces continus : $\mathcal{F}_h = \mathcal{H}_h \wedge n$.

6.1.1.2 Approximation de l'espace $TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\Gamma)$

L'élément fini local est donné par $(T, R^1_\Gamma, A^1_\Gamma)$ où

- T est un triangle,
- R^1_Γ est l'espace vectoriel

$$R^1_\Gamma \;=\; \{\zeta = n \wedge p\,;\, p \in D^1_\Gamma\}$$

- et A^1_Γ désigne l'ensemble des trois moments suivants

$$\int_l \zeta \cdot \tau \quad \forall\, \zeta \in R^1_\Gamma$$

avec τ le vecteur tangent à l'arête l.

Cet élément fini est conforme et unisolvant dans l'espace $TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\Gamma)$. Ceci permet alors de définir

$$\mathcal{C}_h \;=\; \{\zeta_h \in TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\Gamma)\,;\; \zeta_h|_T \in R^1_\Gamma \;\;\forall\, T \in \mathcal{T}_h^2\}\,, \tag{6.2}$$

l'espace de dimension

$$\dim \mathcal{C}_h \;=\; na\,.$$

Notons que l'élément fini $(T, R^1_\Gamma, A^1_\Gamma)$ rappelé ci-dessus, est formé à partir de (K, R^1, A^1) (cf. § 2.1.2) où l'élément géométrique est alors tétraédrique. $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{H}_h$ héritent aussi des propriétés des espaces continus : $\mathcal{C}_h = \Pi\,\mathcal{H}_h$. Nous avons par ailleurs : $\mathcal{C}_h = n \wedge \mathcal{F}_h$.

6.1.2 Eléments finis de volumes

C'est dans le but d'approcher l'espace $L^2(\Omega)$ que nous faisons le rappel ci-dessous. L'élément fini local est formé par

- K un tétraèdre,

- P_0 l'espace des polynômes constants,

- et du degré de liberté

$$\int_K q\,dx \quad \forall\, q \in P_0\,.$$

L'espace d'approximation de $L^2(\Omega)$ s'écrit :

$$Q_h \;=\; \{q_h \in L^2(\Omega)\,;\; q_h|_K \in P_0 \;\;\forall\, K \in \mathcal{T}_h^1\} \tag{6.3}$$

et on a,

$$\dim Q_h \;=\; NK\,,$$

où NK est le nombre de tétraèdres de Ω.

Un élément de cet espace s'écrit

$$q_h \;=\; \sum_{t=1}^{NK} q_h^t\,\chi_t \tag{6.4}$$

où

- q_h^t représente l'inconnue scalaire associée au tétraèdre t et

- χ_t est la fonction de forme associée à t, aussi appelée *fonction-volume* :

$$\int_{t'} \chi_t \, dx \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } t \text{ et } t' \text{ sont deux tétraèdres identiques,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En associant respectivement aux quatre sommets s^1, s^2, s^3 et s^4 du tétraèdre K, les coordonnées barycentriques $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 (aussi définies au § 2.2), il est possible d'écrire tout élément de Q_h en fonction de celles-ci. En effet, la fonction-volume s'écrit dans K (cf. e.g. [11]) :

$$\chi_t \;=\; 6\,[\lambda_i\,(\nabla\lambda_j \wedge \nabla\lambda_k).\nabla\lambda_l \;+\; \ldots\,(\text{toutes les autres combinaisons})]\,.$$

Lorsqu'on se réfère à la liste des espaces intervenant dans la formulation (5.28), il est impératif d'approcher $H(\mathrm{div}\;;\Omega)$. Ceci ayant déjà été fait pour d'autres raisons au chapitre 2, nous nous contenterons d'utiliser les propriétés, anoncées au § 2.1.3, concernant son espace d'approximation U_h.

6.2 Description de l'induction magnétique

Pour associer à $\mathcal{M}$ un espace de dimension finie, il faudrait sans doute considérer les espaces U_h (dans lequel est sensée être discrétisée l'induction magnétique) et $\mathcal{C}_h$ (où sera discrétisée l'inconnue surfacique associée à l'induction), puis assurer une condition de raccordement sur la frontière Γ, semblable à (5.25). Commençons par examiner de plus près l'écriture des éléments de tels espaces.

Nous identifions les sommets s^i, s^j, s^k de la facette f du tétraèdre K par $\{i, j, k\}$; $1 \leq i, j, k \leq 4$, $s^i < s^j < s^k$. Ainsi, nous adoptons l'écriture $f \equiv ijk$ pour signifier que la facette f a pour sommets s^i, s^j et s^k. Comme dans [2], où sont décrits les éléments de Whitney, tout champ de vecteurs B_h de l'espace U_h s'écrit :

$$B_h \;=\; \sum_{f=1}^{4} B_h^f\, 2(\lambda_i\nabla\lambda_j \wedge \nabla\lambda_k + \lambda_j\nabla\lambda_k \wedge \nabla\lambda_i + \lambda_k\nabla\lambda_i \wedge \nabla\lambda_j)\,, \tag{6.5}$$

où B_h^f représente le flux de B_h à travers la facette f de sommets i, j, k. Cette inconnue scalaire associée à f est telle que

$$\int_{f'} B_h \cdot df \;=\; \begin{cases} B_h^f & \text{si } f \text{ et } f' \text{ sont deux facettes identiques,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A chaque degré de liberté de l'élément fini, est associée une fonction de forme dont celle correspondant à f est donnée par

$$2\,(\lambda_i\nabla\lambda_j \wedge \nabla\lambda_k + \lambda_j\nabla\lambda_k \wedge \nabla\lambda_i + \lambda_k\nabla\lambda_i \wedge \nabla\lambda_j)\,.$$

Il existe exactement quatre fonctions de forme linéairement indépendantes et formant une base dans chaque tétraèdre. Comme l'élément fini considéré est de classe $H(\text{div})$ (cf. e.g. [9]), il suit que la composante normale de B_h est la même sur une facette commune à deux tétraèdres. En revanche, la composante tangentielle de ce champ de vecteurs est discontinue à la traversée d'une facette commune à deux tétraèdres.

Comme dans [11], il est possible d'écrire tout élément ζ_h de l'espace $\mathcal{C}_h$ sur chaque facette frontalière T, comme suit :

$$\zeta_h = \sum_{l=1}^{3} \zeta_h^l \left(\lambda_i \nabla_T \lambda_j - \lambda_j \nabla_T \lambda_i\right), \tag{6.6}$$

où ∇_T désigne le gradient par rapport à un système orthonormé de coordonnées permettant de représenter T. L'inconnue scalaire ζ_h^l associée à l'arête l de sommets i, j est telle que :

$$\int_{l'} \zeta_h \cdot dl = \begin{cases} \zeta_h^l & \text{si } l \text{ et } l' \text{ sont deux arêtes identiques,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A chaque degré de liberté de l'élément fini, est associée une fonction de forme, avec

$$\lambda_i \nabla_T \lambda_j - \lambda_j \nabla_T \lambda_i$$

celle correspondant à l. Dans cette expression, λ_i représente[1] la coordonnée barycentrique associée au sommet frontalier i. Sur chaque triangle, il existe ainsi trois fonctions de forme linéairement indépendantes et formant une base. La composante tangentielle de ζ_h est continue à la traversée d'une arête commune à deux facettes frontalières.

Dans le but d'approcher $\mathcal{M}$, proposons à présent une condition sur Γ liant l'induction magnétique et son inconnue surfacique associée.

6.2.1 Condition de raccordement sur Γ

Afin de satisfaire la condition de raccord liant B_h et ζ_h, nous proposons d'adopter la projection ci-dessous, prise sur toute facette frontalière f d'arêtes l_1, l_2, l_3 :

$$B_h^f = \zeta_h^{l_1} + \zeta_h^{l_2} - \zeta_h^{l_3},$$

où $\zeta_h^{l_1}, \zeta_h^{l_2}$ et $\zeta_h^{l_3}$ sont respectivement la circulation de ζ_h le long des arêtes frontalières l_1, l_2 et l_3. En effet, cette projection devra assurer le raccordement voulu entre l'induction magnétique et son inconnue surfacique associée. Introduisons à cet égard la

1. Pour simplifier, nous utilisons la même notation pour distinguer une coordonnée barycentrique associée à un sommet interne et celle associée un sommet frontalier.

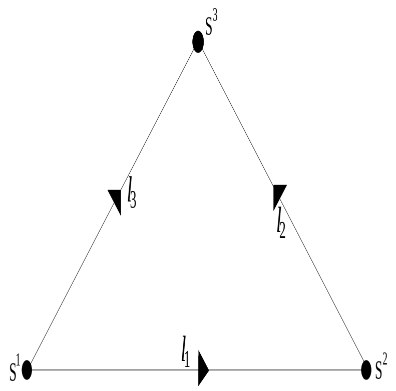


FIG. 6.1 –

Définition 6.2.1 *Nous désignons par $\mathcal{M}_h$ le sous-espace de $U_h \times \mathcal{C}_h$ formé par les couples (B_h, ζ_h), où ζ_h est défini comme en (6.6) et le champ de vecteurs B_h donné par (6.5) avec :*

$$B_h^f = \zeta_h^{l_1} + \zeta_h^{l_2} - \zeta_h^{l_3}\,,$$

sur toute facette frontalière f d'arêtes l_1, l_2, l_3.

Nous avons la

Proposition 6.2.1 *Soit (B_h, ζ_h) un élément de l'espace $\mathcal{M}_h$. Alors, il suit :*

$$B_h \cdot n \;=\; \mathrm{rot}_\Gamma\, \zeta_h \;\; sur \;\; \Gamma\,. \tag{6.7}$$

Preuve. Il suffira par linéarité de montrer la relation sur un élément géométrique T de la triangulation $\mathcal{T}_h^2$ (cf. figure 6.1). Par définition, T est une facette frontalière d'un tétraèdre K de $\mathcal{T}_h^1$, dont nous noterons par n_T la normale sur T sortante par rapport à K, et par l_1, l_2, l_3 les arêtes de T. Soit à présent (B_h, ζ_h) un élément de l'espace $\mathcal{M}_h$. De (6.6), nous avons

$$\mathrm{rot}_\Gamma\, \zeta_h \;=\; 2\,(\zeta_h^{l_1}\, \nabla_T\lambda_1 \wedge \nabla_T\lambda_2 + \zeta_h^{l_2}\, \nabla_T\lambda_2 \wedge \nabla_T\lambda_3 + \zeta_h^{l_3}\, \nabla_T\lambda_1 \wedge \nabla_T\lambda_3) \cdot n_T\,.$$

Et comme sur T nous avons

$$\nabla_T\lambda_3 \;=\; -\nabla_T\lambda_1 - \nabla_T\lambda_2\,, \tag{6.8}$$

il suit,

$$\mathrm{rot}_\Gamma\, \zeta_h \;=\; 2\,(\zeta_h^{l_1} + \zeta_h^{l_2} - \zeta_h^{l_3})\, \nabla_T\lambda_1 \wedge \nabla_T\lambda_2 \cdot n_T\,.$$

Par ailleurs, avec la définition 6.2.1, le champ de vecteurs B_h est tel que :

$$B_h \cdot n_T \;=\; 2\,[\zeta_h^{l_1} + \zeta_h^{l_2} - \zeta_h^{l_3}]\,(\lambda_1 \nabla_T\lambda_2 \wedge \nabla_T\lambda_3 + \lambda_2 \nabla_T\lambda_3 \wedge \nabla_T\lambda_1 + \lambda_3 \nabla_T\lambda_1 \wedge \nabla_T\lambda_2) \cdot n_T\,.$$

En tenant compte successivement de (6.8) et du fait que sur T, on a $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$, il en découle

$$B_h \cdot n_T \;=\; 2\,(\zeta_h^{l_1} + \zeta_h^{l_2} - \zeta_h^{l_3})\, \nabla_T\lambda_1 \wedge \nabla_T\lambda_2 \cdot n_T\,.$$

Ceci achève la preuve, étant donné que le raisonnement est encore le même lorsqu'on considère une union de facettes frontalières. □

La condition (6.7) traduit le raccordement entre l'induction magnétique et l'inconnue surfacique associée. La continuité de la composante normale de l'induction magnétique est ainsi satisfaite. Analogue du cas continu, cette condition essentielle est explicitement prise en compte dans $\mathcal{M}_h$. Suivant la proposition 6.2.1, $\mathcal{M}_h$ est une approximation conforme de l'espace continu $\mathcal{M}$, aussi écrit :

$$\mathcal{M}_h \;=\; \{(B_h, \zeta_h) \in U_h \times \mathcal{C}_h \,;\; B_h \cdot n = \mathrm{rot}_\Gamma\, \zeta_h \;\; \text{sur} \;\; \Gamma\}\,. \tag{6.9}$$

Tout élément de celui-ci est entièrement déterminé par les degrés de liberté pris

- sur toutes les facettes internes et
- sur toutes les arêtes frontalières.

Tout comme dans le cas de l'étude du champ magnétique, on constate ici que le traitement numérique de la condition (5.25) impose un choix rigoureux d'espaces de dimension finie pour l'approximation de $\mathcal{M}$.

6.3 Problème mixte

Avec les espaces de dimension finie notés en (6.3) et (6.9), nous proposons d'associer au problème (5.28) la formulation discrète définie comme suit.

Pour h^s et ν vérifiant (5.3) et (5.1), trouver un couple (B_h, ζ_h) dans $\mathcal{M}_h$ et une fonction ψ_h dans Q_h, tels que

$$\begin{aligned}
(\nu\, B_h, v_h)_{(L^2(\Omega))^3} \;&+\; \nu_0 < \mathcal{L}(\zeta_h), \eta_h > \;+\; (\mathrm{div}\, v_h, \psi_h)_{L^2(\Omega)} \;= \\
(h^s, v_h)_{(L^2(\Omega))^3} \;&+\; < n \wedge h^s, \eta_h > \qquad \forall\, (v_h, \eta_h) \in \mathcal{M}_h\,, \\
(\mathrm{div}\, B_h, \phi_h)_{L^2(\Omega)} \;&=\; 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, \phi_h \in Q_h\,.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Les espaces de dimension finie

$$\mathcal{M}_h \subset \mathcal{M} \quad \text{et} \quad Q_h \subset L^2(\Omega)\,,$$

sont respectivement munis de la norme induite par celle de $\mathcal{M}$ et celle de $L^2(\Omega)$.

Dans cette section, il est essentiellement question de l'analyse du problème (6.10). Commençons donc par considérer les formes bilinéaires continues $\underline{a}$ et $\underline{b}$ introduites respectivement en (5.29) et (5.30), ainsi que la forme linéaire continue $\underline{l}$ notée en (5.31).

Alors, (6.10) s'écrit aussi : trouver $((B_h,\zeta_h),\psi_h) \in \mathcal{M}_h \times Q_h$ tel que

$$\begin{array}{rcl} \underline{a}((B_h,\zeta_h),(v_h,\eta_h)) \;+\; \underline{b}((v_h,\eta_h),\psi_h) & = & \underline{l}((v_h,\eta_h)) \quad \forall\,(v_h,\eta_h) \in \mathcal{M}_h\,, \\ \underline{b}((B_h,\zeta_h),\phi_h) & = & 0 \qquad\qquad\quad \forall\,\phi_h \in Q_h\,, \end{array}$$

où (B_h,ζ_h) constitué de l'induction magnétique et de son inconnue surfacique associée, représente l'inconnue physique discrétisée.

Le lien entre les espaces $\mathcal{M}_h$ et Q_h est exercé par l'intermédiaire de l'opérateur de divergence. Notons

$$\underline{V}_h \;=\; \{(v_h,\eta_h) \in \mathcal{M}_h\;;\; \underline{b}((v_h,\eta_h),\phi_h) = 0 \;\;\forall\,\phi_h \in Q_h\}\,,$$

le sous-espace de $\mathcal{M}_h$ qui s'écrit encore :

$$\underline{V}_h \;=\; \{(v_h,\eta_h) \in \mathcal{M}_h\;;\; \operatorname{div} v_h = 0 \;\text{ dans }\; \Omega\}\,.$$

En faisant ensuite référence aux notations du paragraphe 5.4.2 et à la remarque 5.4.1, nous concluons

$$\underline{V}_h \subset \underline{V}\,.$$

En tenant compte du lemme 5.4.1, ceci permet d'établir le

Lemme 6.3.1 *Il existe une constante $\alpha^\star$, strictement positive et indépendante de h, telle que*

$$\underline{a}((v_h,\eta_h),(v_h,\eta_h)) \;\geq\; \alpha^\star\,\|(v_h,\eta_h)\|^2_{\mathcal{M}} \quad \forall\,(v_h,\eta_h) \in \underline{V}_h\,.$$

Nous avons le

Théorème 6.3.1

i) De toute solution $((B_h,\zeta_h),\psi_h)$ du problème (6.10)*, (B_h,ζ_h) est unique et est élément de $\underline{V}_h$;*

ii) il existe une constante C, strictement positive indépendante de h, telle que

$$\|(B_h,\zeta_h)\|_{\mathcal{M}} \;\leq\; C\,\big(\|h^s\|_{(L^2(\Omega))^3} + \|h^s\wedge n\|_{TH^{-\frac12}(\operatorname{div}^0;\Gamma)}\big)\,.$$

Preuve.

i) L'existence et l'unicité de (B_h,ζ_h) dans $\underline{V}_h$ résulte (conformément au formalisme du paragraphe 2.1.4) de la $\underline{V}_h-$ellipticité de la forme bilinéaire $\underline{a}$. En outre, *ii)* (B_h, ζ_h) étant solution du problème variationnel

$$\underline{a}((B_h, \zeta_h), (v_h, \eta_h)) \;=\; \underline{l}((v_h, \eta_h)) \;\; \forall\, (v_h, \eta_h) \in \underline{V}_h\,,$$

il suit en tenant compte de la $\underline{V}_h$−ellipticité de $\underline{a}$ et de la continuité de $\underline{l}$:

$$\alpha^\star \, \|(B_h, \zeta_h)\|^2_{\mathcal{M}} \;\leq\; (\|h^s\|_{(L^2(\Omega))^3} + \|h^s \wedge n\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}^0\,;\,\Gamma)})\, \|(B_h, \zeta_h)\|_{\mathcal{M}}\,,$$

où $\alpha^\star > 0$ est une constante indépendante de h. Ceci permet d'achever la preuve. □

Ainsi, le problème (6.10) permet de déterminer de manière unique l'induction magnétique, tout en tenant compte de la propriété physique qu'est la condition de divergence nulle de l'induction. En revanche, bien que dans le cas où le domaine Ω est convexe, on ait (cf. e.g. [48]) : pour toute fonction $\phi_h \in Q_h$ donnée, l'existence d'un champ de vecteurs $u_h \in U_h$, satisfaisant

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\, u_h &\;=\; \phi_h\,, \\ \|u_h\|_{H(\mathrm{div}\,;\,\Omega)} &\;\leq\; C\, \|\phi_h\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

où C est une constante strictement positive, il est moins évident d'établir une condition inf-sup discrète uniforme portant sur la forme bilinéaire $\underline{b}$. En effet, contrairement au cas continu, la condition de racordement ne permet plus d'éluder le fait que l'opérateur $\mathcal{L}$ n'est pas coercif sur son domaine. Toujours est-il que, si (6.10) apparaît comme un problème mal-posé, l'inconnue physique de ce problème est néanmoins déterminée de manière unique. Cet aspect du problème (6.10) mérite une attention particulière, au niveau du choix des méthodes de résolution numérique.

6.3.1 Calcul de l'impédance

L'objectif principal de ce paragraphe est de présenter la discrétisation de l'opérateur d'intégrale de frontière $\mathcal{L}$ introduit au paragraphe 5.3.2. A $\mathcal{L}$, nous associerons une matrice dite *impédance* ou encore *rigidité extérieure*. Le calcul qui sera présenté ici est basé sur une méthode détaillée dans Bossavit [11].

Rappelons que l'opérateur $\mathcal{L}$ est tel que :

$$\forall\, \zeta \in TH^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{rot}\,;\,\Gamma) \quad \mathcal{L}(\zeta) \;=\; n \wedge \mathrm{rot}\, A\,,$$

où A est solution dans $(W^1_0(\Omega'))^3$ du problème extérieur (5.20).

Le potentiel-vecteur A harmonique dans Ω' peut être exprimé [11] sous la forme d'un potentiel de simple couche sur Γ. Considérant une densité superficielle p de courants fictifs, de divergence nulle et suffisamment régulière, nous écrivons :

$$\Pi A(x) \;=\; \zeta(x) \;=\; \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{p(y)}{|x-y|}\, d\Gamma_y \quad \forall\, x \in \Omega'\,, \tag{6.11}$$

$$n \wedge \mathrm{rot}\, A(x) \;=\; \frac{1}{2} p(x) \;+\; \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma n(x) \wedge \big(\frac{y-x}{|x-y|^3} \wedge p(y)\big)\, d\Gamma_y \,. \tag{6.12}$$

La discrétisation des équations (6.11) et (6.12) par une méthode de Galerkin permet d'établir une relation liant la trace tangentielle du champ de vecteurs A à $n \wedge \mathrm{rot}\, A$. Commençons par faire les remarques suivantes.

- L'approximation de la trace tangentielle sur Γ du potentiel-vecteur A s'écrit conformément à (6.6) et aux notations des paragraphes 2.1.1 et 6.1.1.2 :

$$\zeta_h \;=\; \sum_{l=1}^{na} \zeta_h^l \, w_l \,, \tag{6.13}$$

  où na est le nombre d'arêtes frontalières, ζ_h^l est l'inconnue scalaire associée à l'arête l de sommets s^i, s^j et

$$w_l \;=\; \lambda_i \nabla_\Gamma \lambda_j - \lambda_j \nabla_\Gamma \lambda_i \,,$$

  la fonction de forme correspondante. Dans cette expression, ∇_Γ désigne le gradient surfacique.

- En ce qui concerne l'approximation de p, un appel aux éléments finis introduits au § 6.1.1.1 demeure insuffisant étant donné que la condition de divergence surfacique nulle doit être satisfaite. A cet effet, nous écrivons comme dans [11] :

$$p_h \;=\; \sum_{i=1}^{ns} p_h^i \, g_i \,,$$

  où ns est le nombre de sommets frontaliers, p_h^i désigne la densité que prend p_h en un sommet frontalier s^i et

$$g_i \;=\; n \wedge \nabla_\Gamma \lambda_i \,,$$

  la fonction de forme associée. La fonction vectorielle ainsi définie est constante par triangle et a pour support l'union des triangles dont s^i est l'un des sommets. Etant donné que cette fonction est de divergence nulle sur chaque triangle et qu'elle est continue sur une arête frontalière commune à deux triangles, il en découle qu'elle répond aux critères que doit satisfaire la densité de courants p_h.

Avec ces approximations, il suit de (6.11) :

$$\zeta_h \;=\; \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{1}{|x-y|} \sum_{i=1}^{ns} p_h^i \, g_i(y)\, d\Gamma_y \,.$$

La définition de g_l permet alors d'écrire

$$\zeta_h \;=\; \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{ns} p_h^i \int_{S(i)} \frac{g_i(y)}{|x-y|}\, d\Gamma_y \,,$$

où $S(i)$ est l'union des triangles dont s^i est l'un des sommets. Dans cette dernière relation, adoptons l'approximation faite sur ζ et multiplions par une fonction-test g_t. Il suit,

$$\int_\Gamma \sum_{l=1}^{na} \zeta_h^l \, w_l(x) \cdot g_t(x) \, d\Gamma_x \;=\; \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{ns} p_h^i \int_\Gamma \int_{S(i)} \frac{g_i(y) \cdot g_t(x)}{|x-y|} \, d\Gamma_y d\Gamma_x \, .$$

Clairement, de par la définition de g_t, les deux membres de cette relation sont nuls dès que x n'est pas sur un triangle dont t est l'un des sommets. En effet, $g_t(x) = 0$ dans ce cas ; nous avons

$$\int_{S(t)} \sum_{l=1}^{na} \zeta_h^l \, w_l(x) \cdot g_t(x) \, d\Gamma_x \;=\; \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{ns} p_h^i \int_{S(t)} \int_{S(i)} \frac{g_i(y) \cdot g_t(x)}{|x-y|} \, d\Gamma_y d\Gamma_x \, .$$

Ainsi, nous pouvons écrire sous forme matricielle

$$\sum_{l=1}^{na} b_{tl} \, \zeta_h^l \;=\; \sum_{i=1}^{ns} G_{ti} \, p_h^i \, ,$$

et donc

$$B \, \zeta_h \;=\; G \, p_h \, , \tag{6.14}$$

où

- B est une matrice de dimension $ns \times na$ dont les termes sont

$$b_{tl} \;=\; \int_{S(t)} w_l(x) \cdot g_t(x) \, d\Gamma_x \, .$$

- G est une matrice pleine, symétrique, régulière et de dimension $ns \times ns$ dont les termes sont

$$G_{ti} \;=\; \frac{1}{4\pi} \int_{S(t)} \int_{S(i)} \frac{g_i(y) \cdot g_t(x)}{|x-y|} \, d\Gamma_y d\Gamma_x \, .$$

  La détermination de G_{ti} se fait par l'intermédiaire du calcul de

$$\int_{S(t)} \int_{S(i)} \frac{1}{|x-y|} \, d\Gamma_y d\Gamma_x \, ,$$

  qui sollicite à son tour un calcul analytique de l'intégrale

$$\int_{S(i)} \frac{1}{|x-y|} \, d\Gamma_y \, .$$

Soit à présent la relation (6.12) où les approximations faites précédemment permettent d'écrire :

$$\mathcal{L}(\zeta_h) \;=\; \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{ns} p_h^k \, g_k(x) \;+\; \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \sum_{k=1}^{ns} p_h^k \, n(x) \wedge \Big(\frac{y-x}{|x-y|^3} \wedge g_i(y)\Big) \, d\Gamma_y \, ,$$

i.e.,

$$\mathcal{L}(\zeta_h) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{ns} p_h^k\, g_k(x) + \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{ns} p_h^k \int_{S(k)} n(x) \wedge (\frac{y-x}{|x-y|^3} \wedge g_k(y))\, d\Gamma_y\,.$$

En considérant ensuite une fonction-test w_l, il suit

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathcal{L}(\zeta_h)\cdot w_l\, d\Gamma_x &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{ns} p_h^k \int_\Gamma g_k(x)\cdot w_l(x)\, d\Gamma_x \\ &+ \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{ns} p_h^k \int_\Gamma\int_{S(k)} n(x)\wedge(\frac{y-x}{|x-y|^3}\wedge g_k(y))\cdot w_l(x)\, d\Gamma_y d\Gamma_x\,.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{na}\zeta_h^k \int_\Gamma \mathcal{L}(w_k)\cdot w_l\, d\Gamma_x &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{ns} p_h^k \int_{S(k)} g_k(x)\cdot w_l(x)\, d\Gamma_x \\ &+ \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{ns} p_h^k \int_\Gamma\int_{S(k)} n(x)\wedge(\frac{y-x}{|x-y|^3}\wedge g_k(y))\cdot w_l(x)\, d\Gamma_y d\Gamma_x\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{na}\zeta_h^k \int_\Gamma \mathcal{L}(w_k)\cdot w_l\, d\Gamma_x &= \sum_{k=1}^{ns} p_h^k (\frac{1}{2}\int_{S(k)} g_k(x)\cdot w_l(x)\, d\Gamma_x \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\int_{S(k)} n(x)\wedge(\frac{y-x}{|x-y|^3}\wedge g_k(y))\cdot w_l(x)\, d\Gamma_y d\Gamma_x)\,.\end{aligned}$$

Nous avons alors sous forme matricielle,

$$\sum_{k=1}^{na}\zeta_h^k \int_\Gamma \mathcal{L}(w_k)\cdot w_l\, d\Gamma_x = \sum_{k=1}^{ns} Q_{lk}\, p_h^k\,,$$

i.e.,

$$L\,\zeta_h = Q\,p_h\,, \tag{6.15}$$

où

- L correspond à la matrice de dimension $na \times na$ définie par la formule

$$L_{lk} = \int_\Gamma \mathcal{L}(w_k)\cdot w_l\, d\Gamma_x\,.$$

- Q est une matrice de dimension $na \times ns$ de terme générique

$$\begin{aligned}Q_{lk} &= \frac{1}{2}\int_{S(k)} g_k(x)\cdot w_l(x)\, d\Gamma_x \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\int_{S(k)} n(x)\wedge(\frac{y-x}{|x-y|^3}\wedge g_k(y))\cdot w_l(x)\, d\Gamma_y d\Gamma_x\,.\end{aligned}$$

La matrice L correspondant à la discrétisation de l'opérateur $\mathcal{L}$ s'obtient en éliminant des équations (6.14) et (6.15) la densité fictive p_h. En effet, nous avons le système

$$\begin{aligned} B\,\zeta_h &= G\,p_h\,, \\ L\,\zeta_h &= Q\,p_h \end{aligned}$$

qui permet d'écrire compte tenu du fait que G est régulière,

$$L\,\zeta_h = QG^{-1}B\,\zeta_h\,.$$

$L = QG^{-1}B$ devrait donc être la matrice d'impédance désirée, mais celle-ci n'est pas symétrique alors que l'opérateur $\mathcal{L}$ l'est. En fait, on obtient une bonne approximation (cf. e.g. [11]) en prenant la partie symétrique :

$$\frac{L + L^t}{2}\,.$$

Cette matrice, de dimension $na \times na$, est pleine.

6.4 Quelques remarques

La mise en œuvre numérique du problème (6.10), lorsque la réluctance magnétique est prise constante par éléments géométriques, est similaire à celle du problème en champ magnétique (2.35). C'est dans cet ordre d'idées qu'à (6.10) peut être associé un système linéaire dont la matrice est semi-définie positive, étant donné que la matrice issue de la forme bilinéaire $\underline{a}$ est définie positive. La matrice du système n'étant pas idéalement bien conditionnée, compte tenu du fait que celle-ci est singulière, il est risqué de faire appel à une méthode directe pour la résolution numérique. En revanche, le fait d'utiliser une méthode itérative (cf. § 3.2.2) telle que l'algorithme de Uzawa permet de calculer de manière unique et précise l'induction magnétique et son inconnue surfacique associée, et d'éluder en outre la difficulté que pourrait provoquer le dimensionnement (relativement important ici), de la matrice du système. Avec un tel algorithme, l'étape la plus coûteuse demeure, comme dans le cas de la détermination du champ magnétique, l'inversion de la matrice issue de $\underline{a}$.

Conclusions et perspectives

Pour la détermination de l'induction et du champ magnétique en magnétostatique tridimensionnelle, nous avons établi différentes formulations, en faisant appel à une méthode d'intégrale de frontière qui s'adapte à la description de chacune de ces grandeurs physiques. Celles-ci sont déterminées dans un milieu magnétique non homogène où aucune condition au bord n'est explicitement prise en compte. Nous avons constaté que la régularité du champ magnétique dépend essentiellement de la nature du milieu magnétique sollicité.

D'un point de vue numérique, nous avons décrit :

- deux formulations mixtes, en champ magnétique, qui utilisent les élements finis nodaux de surface et les éléments finis d'arêtes ;
- une formulation en potentiel scalaire, où sont considérés les éléments finis nodaux et enfin,
- une formulation mixte destinée à la détermination de l'induction magnétique, qui utilise les éléments finis de surface, de facettes et de volumes.

La mise en œuvre des formulations en potentiel scalaire et en champ magnétique se révèle plus commode que celle de la formulation en induction magnétique. La résolution numérique est plus coûteuse dans le cas du calcul de l'induction car, la matrice du système est moins bien conditionnée et son dimensionnement est relativement important. En calculant le champ magnétique à l'aide des formulations mixtes, on obtient un taux de convergence double et on commet une erreur relative nettement inférieure, qu'avec une formulation en potentiel scalaire.

Si le bon comportement numérique des formulations en champ magnétique a été constaté, il serait aussi intéressant d'aboutir à la même conclusion, en utilisant les éléments finis d'arêtes d'ordre élevé. La condition de raccordement numérique liant le champ magnétique et son potentiel surfacique associé doit dans ce cas faire l'objet d'une modification. Enfin, en tenant compte de la non-linéarité des milieux magnétiques sollicités, un autre travail futur [49] portera sur la comparaison des résultats obtenus des formulations en induction et en champ magnétique.

Bibliographie

[1] A. Bendali.
Approximation par éléments de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques.
Thèse d'Etat, Université Paris VI, 1984.

[2] A. Bossavit.
Mixed methods and the marriage between "mixed" finite elements and boundary elements.
Numerical Methods for Partial Differential Equations, 7:347–362, 1991.

[3] R. Stenberg and P. Trouvé.
A mixed finite element method for the magnetic field.
In *Proc. of the Fifth. Int. Symp. Numer. Meth. Eng.*, volume 2, pages 137–141, 1989.

[4] S. Balac.
Artefacts de susceptibilité magnétique en IRM: étude du problème de magnétostatique et simulation numérique.
Thèse, Université de Rennes I, 1997.

[5] C. Daveau.
Etablissement d'une formulation variationnelle en champ pour la magnétostatique. Mise en œuvre numérique dans le cas tridimensionnel par association d'éléments finis et d'intégrale de frontière.
Thèse, Université de Tours, 1994.

[6] B. Bandelier, C. Daveau, and F. Rioux-Damidau.
An h-formulation for the computation of magnetostatic fields. Implementation by combining a finite element method and a boundary element method.
J. Phys III France, 3:995–1004, 1993.

[7] J. Laminie and S. M. Mefire.
Quelques formulations mixtes utilisant une méthode d'intégrale de frontière pour le calcul du champ magnétique en magnétostatique-3D.
Technical Report 98-02, Laboratoire d'Analyse Numérique et EDP d'Orsay, Université Paris-Sud, 1998.

[8] J. Laminie and S. M. Mefire.

A saddle-point approach associated with a boundary integral method for study of magnetic field in magnetostatics.
(submitted), 1998.

[9] J.-C. Nédélec.
Mixed finite elements in $\boldsymbol{R}^3$.
Numer. Math., 35:315–341, 1980.

[10] J. E. Roberts and J.-M. Thomas.
Mixed and hybrid finite element methods.
Technical Report 737, INRIA, Le Chesnay Cedex, France, 1987.

[11] A. Bossavit.
The computation of eddy-currents, in dimension 3, by using mixed finite elements and boundary elements in association.
Mathl. Comput. Modelling, 15:33–42, 1991.

[12] A. Bossavit, C. Emson, and I. D. Mayergoyz.
Méthodes numériques en électromagnétisme.
Eyrolles, Paris, 1991.

[13] F. William and Brown Jr.
Magnetostatic principles in ferromagnetism, volume 1 of *Selected topics in solid state physics.*
North-Holland, Amsterdam, 1962.

[14] E. Durand.
Magnétostatique.
Masson, Paris, 1968.

[15] I. Babuška.
The finite element method with Lagrangian multipliers.
Numer. Math., 20:179–192, 1973.

[16] F. Brezzi.
On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers.
RAIRO, 8:129–151, 1974.

[17] R. Dautray and J. L. Lions.
Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, volume 5.
Masson, Paris, 1988.

[18] J. Deny and J. L. Lions.
Les espaces du type Beppo-Levi.
Ann. Inst. Fourier, 5:305–370, 1953-54.

[19] F. Dubois.
Discrete vector potential representation of a divergence free vector field in three-dimensional domains: numerical analysis of a model problem.

SIAM J. Numer. Anal., 27:1103–1141, 1990.

[20] V. Girault and P. A. Raviart.
Finite element methods for Navier-Stokes equations, volume 5.
Springer-Verlag, New-York, 1986.

[21] A. Bossavit.
Electromagnétisme, en vue de la modélisation.
Springer-Verlag, Paris, 1993.

[22] J. L. Lions and E. Magenes.
Problèmes aux limites non homogènes et applications, volume 1.
Dunod, Paris, 1986.

[23] J.-C. Nédélec and J. Planchard.
Une méthode variationnelle d'éléments finis pour la résolution numérique d'un problème extérieur dans $\boldsymbol{R}^3$.
RAIRO, 3:105–129, 1973.

[24] H. Whitney.
Geometric integration theory.
Princeton U. P., Princeton, 1957.

[25] F. Brezzi and M. Fortin.
Mixed and hybrid finite element method.
Springer Verlag, New-York, 1991.

[26] J.-C. Nédélec.
Elements finis mixtes incompressibles pour l'équation de Stokes dans $\boldsymbol{R}^3$.
Numer. Math., 39:97–112, 1982.

[27] J.-C. Nédélec.
Ondes acoustiques et électromagnétiques, équations intégrales.
Cours, Ecole Polytechnique, France, 1996.

[28] G. Golub.
Numerical methods for solving linear least squares problems.
Numer. Math., 7:206–216, 1965.

[29] A. Björck.
Numerical methods for least squares problems.
SIAM, Philadelphia, 1996.

[30] A. Björck.
Solving linear least squares problems by Gram-Schmidt orthogonalization.
BIT, 7:1–21, 1967.

[31] J. R. Rice.
Experiments on Gram-Schmidt orthogonalization.
Math. Comp., 20:325–328, 1996.

[32] A. Björck, T. Elfving, and Z. Strakos.
Implementing conjuguate gradient-type methods for linear least squares problems.
Technical Report 95-26, Departement of Mathematics, Linköping University, Sweden, 1995.

[33] J. H. Laminie.
Quelques aspects de la résolution numérique de problèmes de la mécanique des fluides : discrétisation par éléments finis, mise en œuvre sur calculateurs parallèles.
Thèse d'Etat, Université Paris-Sud, 1994.

[34] R. Glowinski and O. Pironneau.
On a mixed finite element approximation of the Stokes problem. Convergence of the approximate solution.
Numer. Math., 33:397–424, 1979.

[35] J. Cahouet and J-P. Chabard.
Some fast 3D finite element solvers for the generalized Stokes problem.
International Journal for Numerical Methods in Fluids, 8:869–895, 1988.

[36] P. Le Tallec.
Domain decomposition methods in computational mechanics.
Comp. Mech. Adv., 1:121–220, 1994.

[37] J.-C. Nédélec.
A new family of mixed finite elements in $\boldsymbol{R}^3$.
Numer. Math., 50:57–81, 1986.

[38] J. Simkin and C. W. Trowbridge.
On the use of the total scalar potential for field problems in electromagnetics.
Int. J. Numer. Meth. Eng., 14:434–440, 1979.

[39] J. L. Coulomb.
Finite element threedimensional magnetic field computation.
IEEE Trans. Mag., 17:3241–3246, 1981.

[40] K. Preis, I. Bardi, O. Biro, C. Magele, W. Renhart, K. R. Richter, and G. Vrisk.
Numerical analysis of 3D magnetostatic fields.
IEEE Trans. Mag., 27:3798–3803, 1991.

[41] A. Bendali.
Numerical analysis of the exterior boundary value problem for the time-harmonic Maxwell equations by a boundary finite element method. Part 1: the continuous problem.
Math. Comp., 43:29–46, 1984.

[42] Y. Choquet-Bruhat.
Géométrie différentielle et systèmes extérieurs.
Dunod, Paris, 1968.

[43] M. Kern.
Etude mathématique et numérique d'un modèle de propagation du champ électrique en milieu conducteur tridimensionnel.
Thèse, Université Paris 9 Dauphine, 1987.

[44] C. Paquet.
Problèmes mixtes pour le système de Maxwell.
In *Annales de la faculté des sciences.* Toulouse IV, France, 1982.

[45] V. Levillain.
Couplage éléments finis-équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène.
Thèse, Ecole polytechnique, 1991.

[46] J.A. Stratton.
Electromagnetic theory.
Mac Graw Hill, New York, 1941.

[47] A. Bendali.
Numerical analysis of the exterior boundary value problem for the time-harmonic Maxwell equations by a boundary finite element method. Part 2: the discrete problem.
Math. Comp., 43:47–68, 1984.

[48] J.-C. Nédélec.
Notions sur les techniques d'éléments finis.
Ellipses, Paris, 1991.

[49] J. Laminie and S. M. Mefire.
On the computation of magnetic induction by mixed finite elements and boundary method in 3D-magnetostatics.
(in preparation).

[50] H. Ammari et J.-C. Nédélec.
Couplage éléments finis-équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène.
(à paraître).

[51] I. Babuška.
Trends in finite elements.
IEEE Trans. Mag., 25:2799–2803, 1989.

[52] A. Bendali and S. Gallic.
Formulation du système de Stokes en potentiel-vecteur.
Rapport Technique 79, Ecole Polytechnique, CMAPX, France, 1982.

[53] A. Bossavit.
Edge elements for magnetostatics.
International Journal of Numerical Modelling: Electronical Networks, Devices and Fields, 9:19–34, 1996.

[54] A. Bossavit.
TRIFOU et la magnétostatique.
Rapport Technique 2, DER, EDF, 1986.

[55] A. Bossavit.
On the condition 'h normal to the wall' in magnetic field problems.
Int. J. Numer. Meth. Eng., 24:1541–1550, 1987.

[56] F. Brezzi, J. Douglas, and L. D. Marini.
Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems.
Numer. Math., 47:217–235, 1985.

[57] P. L. Butzer and H. Berens.
Semi-groups of operators and approximations.
Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[58] M. Cessenat.
Exemples en électromagnétisme et en physique quantique.
In *R. Dautray and J. L. Lions, Analyse mathématique et calcul numerique pour les sciences et les techniques*, volume 5, chapitre 9, pages 235–273. Masson, Paris, 1988.

[59] P. G. Ciarlet.
The finite element method for elliptic problems.
North-Holland, Amsterdam, 1978.

[60] G. Dhatt and G. Touzot.
Une présentation de la méthode des éléments finis.
Maloine, Paris, 1984.

[61] G. Duvaut and J. L. Lions.
Les inéquations en mécanique et en physique.
Dunod, Paris, 1972.

[62] P. Constantin and C. Foias.
Navier-Stokes equations.
Chicago Lectures in Mathematics, Chicago, 1988.

[63] M. Fortin.
An analysis of the convergence of mixed finite element methods.
RAIRO, 11:341–354, 1977.

[64] J. M. Ghidaglia.
Régularité des solutions de certains problèmes aux limites linéaires liés aux équations d'Euler.
Comm. in Partial Differential Equations, 9:1265–1298, 1984.

[65] J. Giroire.
Integral equation for exterior problems for the Helmholtz equation.
Technical Report 40, Ecole Polytechnique, CMAPX, France, 1978.

[66] B. Hanouzet.
Espaces de Sobolev avec poids. Application au problème de Dirichlet dans un demi-espace.
In *Rend. del Sem. Math. della*, volume XLVI. Univ. di Padova, 1971.

[67] B. Heron.
Quelques propriétés des applications de trace dans des espaces de champs de vecteurs à divergence nulle.
Comm. in Partial Differential Equations, 6:1301–1334, 1981.

[68] H. Brezis.
Analyse fonctionnelle.
Masson, Paris, 1983.

[69] F. Kikuchi.
Mixed formulations for finite element analysis of magnetostatic and electrostatic problems.
Japan J. Appl. Math., 6:209–221, 1989.

[70] C. Daveau and S. M. Mefire.
Three dimensional magnetostatic problem: application of the Babuška-Brezzi theory.
(submitted), 1996.

[71] M. Kern and S. Mefire Mbouayoueyou.
Parallel solution of the wave equation using higher order finite elements.
In *2nd MPI Developpers' and Users Group Conference*. IEEE Computer Society, 1996.

[72] P. Monk.
A mixed method for approximating Maxwell's equations.
SIAM Numer. Anal., 28:1610–1634, 1991.

[73] J.-C. Nédélec.
Computation of eddy currents on a surface in $\boldsymbol{R}^3$ by finite element methods.
SIAM Numer. Anal., 15:580–594, 1978.

[74] A. Ouldkhal.
Modélisation d'antennes d'imagerie médicale par une méthode d'éléments finis, couplée avec une méthode d'intégrale de frontière.
Thèse, Université Paris-Sud, 1996.

[75] P. A. Raviart and J.-M. Thomas.
A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems.
In *Mathematical aspects of finite element methods, Rome 1975*, number 606 in Lecture Notes in Math.,. Springer Verlag, Berlin, 1975.

[76] J. C. Vérité.
Trifou: A 3D eddy-current program.
Rapport Technique 2, DER, EDF, 1983.

[77] O. C. Zienkiewicz, D. W. Kelly, and P. Bettess.
The coupling of the finite element method and boundary solution procedures.
Int. J. Numer. Meth. Eng., 11:355–375, 1977.

N° d'impression : 2107
4^{eme} trimestre 1998