Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques

par
Jean-Marc Fontaine[1]

Table des matières :

0 – Introduction

Dans ce texte on s'intéresse aux représentations p-adiques du groupe de Galois absolu d'un corps p-adique et en particulier, on définit toute une hiérarchie parmi ces représentations (représentations presque de Hodge-Tate, de Hodge-Tate, de de Rham, semi-stables, cristallines).

Ce texte contient des résultats classiques (notamment la théorie de Sen [Sen69], objet essentiel des chapitres 1 et 2) ou déjà publiés ailleurs (notamment le théorème *faiblement admissible implique admissible* [CF00], dont on parle dans le chapitre 5, on ne donne ici qu'une esquisse de la preuve). Il contient aussi des résultats non publiés ailleurs comme

- l'analogue de la théorie de Sen lorsque l'on remplace le corps $\mathbb{C}_p$ par le corps B_{dR} (chapitre 3),
- la notion de représentation p-adique *presque de Hodge-Tate* et de représentation p-adique *presque de de Rham* et le fait que ces deux notions coïncident (chapitre 4),
- le fait qu'il n' y a pas d'autre $\mathbb{Q}_p$-endomorphisme continu de $\mathbb{C}_p$, Galois-équivariant, que les homothéties par un élément du corps de base (chapitre 6). Ceci est - avec une version renforcée du lemme fondamental de [CF00] due à Pierre Colmez [Co00] - à la base de la théorie des *presque* $\mathbb{C}_p$*-espaces vectoriels* qui sera développée ailleurs.

Rentrons un peu plus dans les détails. Dans tout ce texte, K est un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète, à corps résiduel parfait k de

[1] *Institut Universitaire de France et UMR 8628 du CNRS, Mathématique, Université de Paris-Sud, Bâtiment 425, F-91405 ORSAY Cedex*

caractéristique $p > 0$. On choisit une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, on pose $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ et on note I_K le sous-groupe d'inertie. On note C le complété de $\overline{K}$ pour la topologie p-adique (corps souvent noté $\mathbb{C}_p$ lorsque k est algébrique sur $\mathbb{F}_p$) et B_{dR} le corps des périodes p-adiques (la définition de B_{dR} est rappelée au chapitre 3). Il est muni d'une topologie naturelle. Le groupe G_K opère continûment sur C et sur B_{dR}.

Une *représentation p-adique de G_K* consiste en la donnée d'un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de G_K. Avec comme morphismes les applications $\mathbb{Q}_p$-linéaires G_K-équivariantes, les représentations p-adiques de G_K forment une catégorie abélienne que nous notons $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$.

Plus généralement, soient J un groupe topologique et B un corps muni d'une topologie et d'une action continue de J (compatible avec la structure de corps). On appelle *B-représentation de J* la donnée d'un B-espace vectoriel W de dimension finie muni d'une action semi-linéaire et continue de J (dire que l'action est semi-linéaire signifie

i) que l'on a $g(w_1 + w_2) = g(w_1) + g(w_2)$ si $g \in J$ et $w_1, w_2 \in W$,

ii) et que l'on a $g(bw) = g(b)g(w)$ si $g \in J$, $b \in B$ et $w \in W$).

Avec comme morphismes les applications B-linéaires J-équivariantes, les B-représentations de J forment une catégorie abélienne que nous notons $\mathrm{Rep}_B(J)$.

Si l'action de J sur B est non triviale, cette catégorie n'est pas B-linéaire. Dans tous les cas, si $E = B^J$, E est un corps et $\mathrm{Rep}_B(J)$ est E-linéaire.

On sait aussi définir la représentation unité (c'est B muni de l'action donnée de J), le produit tensoriel de deux B-représentations W_1 et W_2 (c'est $W_1 \otimes_B W_2$ avec $g(w_1 \otimes w_2) = g(w_1) \otimes g(w_2)$ si $g \in J$, $w_1 \in W_1$ et $w_2 \in W_2$) et la représentation duale de la B-représentation W (c'est le B-espace vectoriel dual W^* de W, avec $(g(\eta))(w) = g(\eta(g^{-1}(w)))$ si $g \in J$, $\eta \in W^*$ et $w \in W$).

Muni de ces structures, $\mathrm{Rep}_B(J)$ devient ce que l'on appelle *une catégorie tannakienne sur E* (cf. par exemple, [DM82]).

Une sous-catégorie tannakienne de $\mathrm{Rep}_B(J)$ est une sous-catégorie strictement pleine (i.e. une sous-catégorie pleine telle que, si W est un objet de cette catégorie, alors tout objet de $\mathrm{Rep}_B(J)$ isomorphe à W aussi) qui contient l'objet-unité B et est stable par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel et dual.

Ceci s'applique en particulier à $B = \overline{K}, C$ ou B_{dR} et $J = G_K$. Si V est une représentation p-adique de G_K de dimension h, $B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ est de manière naturelle une B-représentation de G_K. Disons que V est *B-admissible* si cette B-représentation est triviale (i.e. isomorphe à B^h). Les représentations B-admissibles forment une sous-catégorie tannakienne de $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$.

PROPOSITION 0.0. — *Soit V une représentation p-adique de G_K. Pour que V soit $\overline{K}$-admissible, il faut et il suffit que le noyau de l'action de G_K sur V soit un sous-groupe ouvert de G_K.*

Preuve : Le fait que la condition est nécessaire résulte immédiatement de ce que l'action de G_K sur $\overline{K}$ est discrète. Réciproquement, supposons que le noyau N de l'action de G_K

sur V soit ouvert dans G_K et soit $L = \overline{K}^N$. Soit h la dimension de V sur $\mathbb{Q}_p$. Choisissons une base $\{e_1, e_2, \ldots, e_h\}$ de V sur $\mathbb{Q}_p$; elle s'identifie aussi, de façon évidente, à une base de $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ sur L ainsi qu'à une base de $\overline{K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ sur $\overline{K}$. L'action de G_K sur V se factorise à travers le groupe $J = \mathrm{Gal}(L/K)$. Pour tout $g \in J$, notons $\rho(g)$ la matrice dont la j-ième colonne est formée des composantes de $g(e_j)$ sur la base $\{e_1, e_2, \ldots, e_h\}$. On obtient ainsi un homomorphisme $\rho : \mathrm{Gal}(L/K) \to GL_h(\mathbb{Q}_p)$ que l'on peut voir, via l'inclusion $GL_h(\mathbb{Q}_p) \subset GL_h(L)$ comme un 1-cocycle de J à valeurs dans $GL_h(L)$. On voit que remplacer ce cocycle par un cocycle équivalent revient à changer la base du L-espace vectoriel $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$. Comme l'ensemble pointé $H^1(J, GL_h(L))$ est trivial (cf., par exemple, [CL], chap.X, prop.3), il existe une base de $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ sur L formée d'éléments fixes par J. C'est aussi une base de $\overline{K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ formée d'éléments fixes par G_K et l'existence d'une telle base permet de définir un isomorphisme de $\overline{K}^h$ sur $\overline{K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ qui commute à l'action de G_K. $\square$

– C'est un théorème profond de Sen dont nous ne parlons pas ici (cf [Sen73], cor.1), que V est C-admissible si et seulement si le noyau de l'action de I_K est un sous-groupe ouvert de I_K (en particulier, lorsque k est algébriquement clos, si une représentation p-adique de G_K est C-admissible, elle est déjà $\overline{K}$-admissible).

– Il n'existe pas (à notre connaissance) de caractérisation de ce type pour les représentations p-adiques de G_K qui sont *de de Rham* (c'est ainsi qu'on appelle les représentations B_{dR}-admissibles).

Si V est une représentation p-adique de G_K, $C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ (resp. $B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$) est une C-représentation (resp. une B_{dR}-représentation) de G_K qui est non triviale si et seulement si V n'est pas C-admissible (resp. n'est pas de de Rham). D'où l'intérêt qu'il y a à étudier les catégories $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ et $\mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K)$(1). L'étude de la première est la théorie de Sen. Nous la reprenons, la poussons "jusqu'au bout" et nous intéressons aussi à la seconde. On obtient une classification complète de ces représentations. Si $\mathcal{C}(\overline{K})$ (resp. $\mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z})$) désigne l'ensemble des orbites de $\overline{K}$ (resp. $\overline{K}/\mathbb{Z}$) sous l'action de G_K, les classes d'isomorphisme d'objets simples de $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ (resp. $\mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K)$ sont paramétrées par $\mathcal{C}(\overline{K})$ (resp. $\mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z})$). Les classes d'isomorphisme d'objets indécomposables de $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ (resp. $\mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K)$ sont paramétrées par $\mathcal{C}(\overline{K}) \times \mathbb{N}^*$ (resp. $\mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{N}^*$).

Décrivons maintenant le contenu des différents chapitres.

L'objectif essentiel du chapitre 1 est d'exposer les résultats de Tate et Sen sur la cohomologie continue du corps C. Ils reposent sur une étude fine de la ramification dans la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K (i.e. l'unique $\mathbb{Z}_p$-extension K_∞ de K contenue dans le sous-corps de $\overline{K}$ engendré sur K par les racines de l'unité d'ordre une puissance de p).

Le point crucial est *le théorème fondamental de Tate* (th.1.8) qui est à la base de toute la théorie des périodes p-adiques et qui, comme on le dit maintenant ([Fa98],§2), signifie que l'anneau des entiers $\mathcal{O}_M$ de toute extension finie M de K_∞ est *presqu'étale*

(1) Le fait que $\overline{K}$ n'est pas complet rend illusoire l'étude de la catégorie $\mathrm{Rep}_{\overline{K}}(G_K)$.

sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_{K_\infty}$ de K_∞. De façon précise, si $\mathrm{tr}_{M/K_\infty} : M \to K_\infty$ est la trace et si $\mathfrak{m}_{K_\infty}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{K_\infty}$, ou bien $\mathrm{tr}_{M/K_\infty}(\mathcal{O}_M) = \mathcal{O}_{K_\infty}$, ou bien $\mathrm{tr}_{M/K_\infty}(\mathcal{O}_M) = \mathfrak{m}_{K_\infty}$.

Posons $H_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$, $\Gamma = G_K/H_K$ et notons L l'adhérence de K_∞ dans C. Les principaux résultats (dus à Tate et Sen) sont (th.1.1) que $C^{H_K} = L$ et que, pour tout $h \in \mathbb{N}$, $H^1_{\mathrm{cont}}(H_K, GL_h(C)) = 1$; puis (th.1.2) que $L^\Gamma = C^{G_K} = K$ et que, pour tout $h \in \mathbb{N}$, l'application naturelle $H^1_{\mathrm{cont}}(\Gamma, GL_h(K_\infty)) \to H^1_{\mathrm{cont}}(\Gamma, GL_h(L)) = H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, GL_h(C))$ est bijective.

Dans le chapitre 2, on étudie la catégorie $\mathrm{Rep}_C(G)_K$. Le premier théorème de Sen dit que, pour toute C-représentation W de G_K, l'application C-linéaire $C \otimes_L W^{H_K} \to W$ déduite de l'inclusion de W^{H_K} dans W est un isomorphisme. Autrement dit, le foncteur $W \mapsto W^{H_K}$ définit une $\otimes$-équivalence de $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ sur la catégorie $\mathrm{Rep}_L(\Gamma)$ des L-représentations de Γ [(1)].

Le deuxième théorème de Sen nous dit que, si X est une L-représentation de Γ et si X_f désigne le sous-K_∞-espace vectoriel de X réunion des sous-K-espaces vectoriels de dimension finie de X stable par G_K, l'application L-linéaire déduite par extension des scalaires de l'inclusion de X_f dans X est un isomorphisme. Autrement dit, le foncteur $X \mapsto X_f$ définit une $\otimes$-équivalence de $\mathrm{Rep}_L(\Gamma)$ sur la catégorie $\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma)$ des K_∞-représentations de Γ.

Enfin, si Y est une K_∞-représentation de Γ, le fait que l'action de Γ sur K_∞ soit discrète implique que l'action de l'algèbre de Lie du groupe de Lie p-adique Γ est linéaire. De façon terre à terre, notons $\chi : G_K \to \mathbb{Z}_p^*$ le caractère qui définit l'action de G_K sur les racines de l'unité d'ordre une puissance de p. En composant avec le logarithme p-adique, on obtient un homomorphisme continu de G_K dans le groupe additif de $\mathbb{Z}_p$ qui se factorise à travers Γ (et on note encore $\log \chi : \Gamma \to \mathbb{Z}_p$ l'application ainsi obtenue). Alors le troisième théorème de Sen dit que, si Y est une K_∞-représentation de G_K, il existe un et un seul endomorphisme s de ce K_∞-espace vectoriel ayant la propriété que, pour tout $y \in Y$, il existe un sous-groupe ouvert Γ_y de Γ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma_y$, on a

$$\gamma(y) = \exp(\log \chi(\gamma).s)(y)$$

(il est immédiat qu'étant donné un endomorphisme s de Y, on peut définir l'endomorphisme $\exp(\log \chi(\gamma).s)$ pour tout γ appartenant à un sous-groupe ouvert suffisamment petit de Γ).

En résumé, pour tout corps E, notons $\mathcal{S}_E$ la catégorie (tannakienne en un sens évident) des E-espaces vectoriels de dimension finie munis d'un endomorphisme. On dispose d'un $\otimes$-foncteur

$$\Delta_{\mathrm{Sen}} : \mathrm{Rep}_C(G_K) \to \mathcal{S}_{K_\infty} .$$

---

(1) une $\otimes$-équivalence entre deux catégories tannakiennes sur un corps E est une équivalence de catégories, commutant, en un sens évident (mais néanmoins pénible à formuler de façon précise), à l'objet-unité, au produit tensoriel et au dual (cf. par exemple, [DM82]).

C'est celui qui associe à W le K_∞-espace vectoriel de dimension finie $\Delta_{\mathrm{Sen}}(W) = (W^{H_K})_f$ muni de l'endomorphisme défini par le théorème précédent. En fait la connaissance de $\Delta_{\mathrm{Sen}}(W)$ détermine W à isomorphisme près (il suffit même de connaître le C-espace vectoriel W muni de son endomorphisme s_W déduit par l'extension des scalaires de K_∞ à C de s). On appelle s_W *l'endomorphisme de Sen de* W.

Nous décrivons ensuite une interprétation due à Colmez des résultats de Sen. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, notons K_r l'unique extension de K de degré p^r contenue dans K_∞ et posons $G_{K_r} = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_r)$. Choisissons un générateur t du module de Tate, noté additivement du groupe multiplicatif et introduisons l'anneau $B_{\mathrm{Sen}} = C\{\{\log t\}\}$ des séries formelles en $\log t$ à coefficients dans C de rayon de convergence non nulle. On peut alors décrire B_{Sen} comme une réunion croissante de sous-$C[\log t]$-algèbres topologiques $B_{\mathrm{Sen},r}$, pour $r \in \mathbb{N}$, avec action semi-linéaire continue de G_{K_r} sur $B_{\mathrm{Sen},r}$, le groupe G_K agissant sur $\log t$ via la formule

$$g(\log t) = \log(\chi(g)) + \log t \text{ pour tout } g \in G_K \ .$$

Pour toute C-représentation de G_K, soit $D_{\mathrm{Sen},\infty}(W)$ la réunion des $(B_{\mathrm{Sen},r} \otimes_C W)^{G_{K_r}}$. C'est un sous-$K_\infty$-espace vectoriel de dimension finie de $B_{\mathrm{Sen}} \otimes_C W$. On construit un isomorphisme canonique de $D_{\mathrm{Sen},\infty}(W)$ sur $\Delta_{\mathrm{Sen}}(W)$ et on montre que l'endomorphisme de $D_{\mathrm{Sen},\infty}(W)$ déduit par transport de structure de l'endomorphisme de $\Delta_{\mathrm{Sen}}(W)$ défini par la théorie de Sen est induit par la C-dérivation continue $-\partial/\partial \log t$ de B_{Sen}.

On donne enfin une variante *algébrique* de la construction de Colmez. Elle consiste à remarquer que l'on ne change pas le résultat en remplaçant B_{Sen} par la sous-C-algèbre B_{Sen}^{alg} de base (en tant que C-espace vectoriel) les $t^{(\alpha)}(\log t)^m$ pour $\alpha \in \overline{K}$ et $m \in \mathbb{N}$, où l'on a posé $t^{(\alpha)} = \exp(\alpha. \log t)$.

Ce dernier résultat peut s'interpréter ainsi : Pour tout corps E, si E^s désigne une clôture séparable de E notons $\mathbb{S}_E^m$ le groupe proalgébrique commutatif diagonalisable défini sur E dont le groupe des caractères $\mathrm{Hom}_{E^s}(\mathbb{S}_E^m \times E^s, \mathbb{G}_m)$ est E^s, muni de l'action naturelle de $\mathrm{Gal}(E^s/E)$; posons aussi $\mathbb{S}_E = \mathbb{S}_E^m \times \mathbb{G}_a$. Alors la catégorie $\mathcal{S}_E$ s'identifie à la catégorie des représentations linéaires de dimension finie de $\mathbb{S}_E$, tandis que B_{Sen}^{alg} peut s'identifier à $C \otimes_{K_\infty} \mathcal{B}_{K_\infty}$ où $\mathcal{B}_{K_\infty}$ désigne l'algèbre affine de $\mathbb{S}_{K_\infty}$.

On donne ensuite la liste des objets simples et des indécomposables, à isomorphisme près, de la catégorie $\mathrm{Rep}_C(G_K)$. On termine avec quelques mots sur certaines représentations particulières : les représentations de Hodge-Tate et les représentations presque de Hodge-Tate.

Dans le chapitre 3, on rappelle la définition du corps B_{dR}, puis on étudie la catégorie $\mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K)$.

On procède d'abord à la Sen :

1 - Posons $L_{\mathrm{dR}} = B_{dR}^{H_K}$. Pour toute B_{dR}-représentation W de G_K, l'application B_{dR}-linéaire $B_{dR} \otimes_{L_{\mathrm{dR}}} W^{H_K} \to W$ évidente est un isomorphisme. Autrement dit, le foncteur $W \to W^{H_K}$ définit une $\otimes$-équivalence entre $\mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K)$ et $\mathrm{Rep}_{L_{\mathrm{dR}}}(\Gamma)$.

2 - Posons $\underline{t} = t^{(1)}$. Le corps L_{dR} contient le corps des séries formelles $K_\infty((\underline{t}))$ qui est stable par Γ. On peut associer, de façon canonique et fonctorielle, à toute L_{dR}-représentation X de Γ, un sous-$K_\infty((\underline{t}))$-espace vectoriel de dimension finie X_f stable par Γ et on définit ainsi une $\otimes$-équivalence de catégories entre $\mathrm{Rep}_{L_{\mathrm{dR}}}(\Gamma)$ et $\mathrm{Rep}_{K_\infty((\underline{t}))}(\Gamma)$.

3 - Comme l'action de Γ sur $K_\infty((\underline{t}))$ n'est pas discrète, si Y est une $K_\infty((\underline{t}))$-représentation de Γ l'action de l'algèbre de Lie de Γ sur Y ne définit plus un endomorphisme mais une connection régulière.

Pour tout corps E de caractéristique 0, notons $\mathcal{R}_{E,\underline{t}}$ la catégorie tannakienne sur E (en un sens évident) des $E((\underline{t}))$-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une connection régulière. La construction qui précède définit un foncteur

$$\Delta_{\mathrm{dR}} : \mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K) \to \mathcal{R}_{K_\infty,\underline{t}} \ .$$

Ici encore la connaissance de $\Delta_{\mathrm{dR}}(W)$ détermine W à isomorphisme près.

Ensuite on transpose la variante algébrique de la construction de Colmez. Pour tout corps E de caractéristique 0, notons $\mathbb{DR}_E^m$ le sous-groupe de $\mathbb{S}_E^m$ dont le groupe des caractères est le quotient de E^s par $\mathbb{Z}$ et posons $\mathbb{DR}_E = \mathbb{DR}_E^m \times \mathbb{G}_a$. On peut considérer l'anneau $B_{dR}^{alg} = B_{dR} \otimes_{K_\infty(\underline{t})} \mathcal{B}_{K_\infty}$ et définir, pour toute B_{dR}-représentation W de G_K, un sous-K_∞-espace vectoriel de dimension finie, canonique et fonctoriel $D_{\mathrm{dR},\infty}(W)$ de $B_{dR}^{alg} \otimes_{B_{dR}} W$, de manière analogue à ce qu'on avait fait pour les C-représentations. Comme on a fait le produit tensoriel au-dessus de $K_\infty(\underline{t})$ et non de K_∞, cet espace vectoriel n'est pas muni d'une action de $\mathbb{S}_{K_\infty}$ mais seulement de son sous-groupe $\mathbb{DR}_{K_\infty}$.

Une façon d'expliquer comment passer de $\Delta_{\mathrm{dR}}(W)$ à $D_{\mathrm{dR},\infty}(W)$ consiste alors à construire une $\otimes$-équivalence entre la catégorie tannakienne $\mathcal{R}_{K_\infty,\underline{t}}$ sur K_∞ et la catégorie des représentations K_∞-linéaires de dimension finie de $\mathbb{DR}_{K_\infty}$ (pour cette équivalence, on peut remplacer K_∞ par n'importe quel corps de caractéristique 0).

Enfin, on donne la liste complète des classes d'isomorphisme d'objets simples et d'objets indécomposables de la catégorie $\mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K)$.

Dans le chapitre 4, on applique les résultats des chapitres 2 et 3 à l'étude des représentations p-adiques de G_K. Pour tout sous-groupe X de $\overline{K}$ stable par G_K, notons $\mathbb{S}_{X,K}^m$ le quotient de $\mathbb{S}_K$ de groupe des caractères X, $\mathbb{S}_{X,K_\infty}^m$ son extension des scalaires à K_∞ et $\mathbb{S}_{X,K}$ (resp. $\mathbb{S}_{X,K_\infty}$) le produit de $\mathbb{S}_{X,K}^m$ (resp. $\mathbb{S}_{X,K_\infty}^m$) par $\mathbb{G}_a$.

On dit alors qu'une représentation p-adique V est *de type* S_X (resp. est *de type* S_X^m) si l'action de $\mathbb{S}_{K_\infty}$ sur $\Delta_{\mathrm{Sen}}(C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$ (ou sur $D_{\mathrm{Sen},\infty}(C \otimes V)$, cela revient au même) se factorise à travers $\mathbb{S}_{X,K_\infty}$ (resp. $\mathbb{S}_{X,K_\infty}^m$). Il revient au même de demander que les valeurs propres de l'endomorphisme de Sen s sur $C \otimes V$ soient dans X (resp. et que s soit semi-simple). Les représentations de type S_X (resp. de type S_X^m) forment une sous-catégorie tannakienne de la catégorie des représentations p-adiques de G_K. Le fait d'être de type S_X est stable par extension.

Les représentations de type $S_{\mathbb{Z}}^m$ sont ce que l'on appelle d'habitude *les représentations de Hodge-Tate*. Nous appelons *représentations presque de Hodge-Tate* les représentations de type $S_{\mathbb{Z}}$.

De même, pour tout sous-groupe X de $\overline{K}$ contenant $\mathbb{Z}$ et stable par G_K, notons $\mathbb{DR}^m_{X,K}$ le quotient de $\mathbb{DR}^m_K$ de groupe des caractères $X/\mathbb{Z}$, $\mathbb{DR}^m_{X,K_\infty}$ son extension des scalaires à K_∞ et $\mathbb{DR}_{X,K}$ (resp. $\mathbb{DR}_{X,K_\infty}$) le produit de $\mathbb{DR}^m_{X,K}$ (resp. $\mathbb{DR}^m_{X,K_\infty}$) par $\mathbb{G}_a$.

On dit qu'une représentation p-adique V est *de type dR_X* (resp. est *de type dR^m_X*) si l'action de $\mathbb{DR}_{K_\infty}$ sur $D_{\mathrm{dR},\infty}(B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$ se factorise à travers $\mathbb{DR}_{X,K_\infty}$ (resp. $\mathbb{DR}^m_{X,K_\infty}$). Les représentations de type dR_X (resp. de type dR^m_X) forment une sous-catégorie tannakienne de la catégorie des représentations p-adiques de G_K. Le fait d'être de type dR_X est stable par extension.

Les *représentations de de Rham* sont les représentations qui sont de type $dR^m_{\mathbb{Z}}$. On dit qu'une représentation est *presque de de Rham* si elle est de type $dR_{\mathbb{Z}}$.

Si X est un sous-groupe de $\overline{K}$ contenant $\mathbb{Z}$ et stable par G_K, pour toute représentation p-adique V de G_K, on a les implications suivantes

$$\begin{array}{ccc} V \text{ est de type } dR^m_X & \Rightarrow & V \text{ est de type } S^m_X \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ V \text{ est de type } dR_X & \Leftrightarrow & V \text{ est de type } S_X \end{array}$$

En particulier, toute représentation de de Rham est de Hodge-Tate (mais il existe des représentations de Hodge-Tate qui ne sont pas de de Rham), tandis qu'une représentation est presque de de Rham si et seulement si elle est presque de Hodge-Tate.

Le chapitre 5 est consacré à l'étude des *représentations p-adiques semi-stables de G_K*. Les démonstrations des résultats déjà publiés ailleurs n'y sont en général pas complètes. En revanche, on décrit complètement la construction des anneaux A_{cris}, B_{cris} et B_{st}, on étudie la notion de *(φ, N)-module filtré* et on énonce le théorème principal de la théorie qui donne une $\otimes$-équivalence entre la catégorie des représentations p-adiques semi-stables de G_K et celle des (φ, N)-modules filtrés sur K qui sont faiblement admissibles. C'est la conjonction de l'équivalence "classique" entre représentations p-adiques semi-stables et *(φ, N)-modules filtrés admissibles* et le résultat principal de [CF00] qui dit que tout (φ, N)-module filtré faiblement admissible est admissible. La preuve de ce résultat est esquissée dans le §5.6. Dans les §5.4 et 5.5, on trouve différents résultats non publiés sur la structure de B_{st} qui nous paraissent intéressants :

- dans le §5.4, on montre qu'il existe un sous-anneau $BW(R)$ de A_{cris}, contenant $\varphi(A_{cris})$ que l'on peut décrire simplement à l'aide de bivecteurs de Witt (la description de $BW(R)$ se trouve essentiellement dans [Fo82] mais pas le lien avec A_{cris}) ;

- dans le §5.5, on explique comment décrire le sous-anneau B^0 de B_{cris} formé des éléments b vérifiant $\varphi(b) = b$ comme sous-anneau de B_{dR} ; puis comment construire la *partie de pentes finies* de B_{st} (qui est la seule utile pour construire les représentations p-adiques semi-stables) à partir de B^0.

Enfin l'objet du chapitre 6 est la preuve du résultat suivant : l'application naturelle $K \to \mathrm{End}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(C)$ est un isomorphisme.

Une conséquence frappante de ce théorème est que, lorsque K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, le foncteur d'oubli de la catégorie $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ dans celle des Banach p-adiques munis d'une action linéaire et continue de G_K est pleinement fidèle.

A l'origine de ce texte, il y a un cours que j'ai fait au centre Emile Borel du 20 février au 15 mai 1997 dans le cadre du semestre spécial consacré aux cohomologies p-adiques et à leurs applications arithmétiques . Dans ce cours, j'avais expliqué les fondements de la théorie des périodes p-adiques (ceux des résultats du chapitre 1 dont on a besoin pour introduire la notion de représentations de Hodge-Tate, définis les représentations de de Rham, puis les représentations semi-stables et les (φ, N)-modules filtrés, expliqués l'équivalence de catégorie entre représentations p-adiques semi-stables et (φ, N)-modules filtrés faiblement admissibles et la conjecture FAA qui dit que tout (φ, N)-module filtré faiblement admissible est admissible. J'avais aussi décrit les grandes lignes d'une théorie en grande partie conjecturale des *presque-C-représentations de G_K* (espaces de Banach p-adiques munis d'une action linéaire continue de G_K, isomorphe à des espaces de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$ près à des C-représentations). J'avais prouvé quelques résultats partiels (notamment ceux que l'on trouve ici au chapitre 6) et expliqué pourquoi cette théorie devait impliquer la conjecture FAA. Cette conjecture a depuis été prouvée. Mieux, des résultats récents de Colmez contiennent ce qui est nécessaire pour faire marcher cette théorie. Cela mérite d'être bien fait et ce sera fait ailleurs. Du coup, cette rédaction ne contient pas tout ce qui avait été fait dans ce cours. En revanche, nous avons essayer de rédiger soigneusement la théorie de Sen, ses développements et ses transpositions au cas de B_{dR}.

Comme le cours du centre Emile Borel, ce texte ne demande que très peu de prérequis : les quatre premiers chapitres du livre de Serre sur les corps locaux (cité [CL]) plus la connaissance de quelques rudiments de cohomologie des groupes sont plus qu'il n'en faut pour pouvoir le lire. Le langage des représentations linéaires des groupes pro-algébriques affines et plus abstraitement des catégories tannakiennes est souvent utilisé : le lecteur constatera que ce n'est ici qu'un langage commode et que nous n'utilisons aucun résultat profond de cette théorie.

Chapitre 1 – Le corps C et sa cohomologie continue

1.1 – Cohomologie continue

Soit H un groupe topologique. Soit M un H-module topologique (i.e. un groupe topologique abélien muni d'une action additive et continue de H). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $C^n_{\text{cont}}(H, M)$ le groupe des *n-cochaînes continues de H à valeurs dans M*, i.e. le groupe des fonctions continues sur H^n à valeurs dans M. En particulier, $C^0_{\text{cont}}(H, M) = M$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'opérateur bord $d_n : C^n_{\text{cont}}(H, M) \to C^n_{\text{cont}}(H, M)$ par les formules usuelles : en particulier,

i) si $a \in M = C^0_{\text{cont}}(H, M)$ et $h_1 \in H$, on a $d_0 a(h_1) = (h_1 - 1)a$,

ii) si $f \in C^1_{\text{cont}}(H, M)$ et $h_1, h_2 \in H$, on a $d_1 f(h_1, h_2) = h_1(f(h_2)) - f(h_1 h_2) + f(h_1)$,

iii) si $f \in C^2_{\text{cont}}(H, M)$ et $h_1, h_2, h_3 \in H$, on a $d_2 f(h_1, h_2, h_3) = h_1(f(h_2, h_3)) - f(h_1 h_2, h_3) + f(h_1, h_2, h_3) - f(h_1, h_2)$.

On obtient ainsi un complexe de groupes abéliens. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Z^n_{\text{cont}}(H, M) = \text{Ker } d_n$ le groupe des *n-cocycles continus* de H à valeurs dans M, $B^n_{\text{cont}}(H, M) \subset Z^n_{\text{cont}}(H, M)$ le groupe des *n-cobords* (on a $B^0_{\text{cont}}(H, M) = 0$ et $B^n_{\text{cont}}(H, M) = \text{Im } d_{n-1}$ si $n > 0$) et $H^n_{\text{cont}}(H, M) = Z^n_{\text{cont}}(H, M)/B^n_{\text{cont}}(H, M)$ le *n-ième groupe de cohomologie continue*. En particulier $H^0_{\text{cont}}(H, M) = M^H$.

Il est immédiat que, si

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

est une suite exacte courte de H-modules topologiques, alors on a une "suite exacte à six termes"

$$\begin{aligned} 0 \to H^0_{\text{cont}}(H, M') \to H^0_{\text{cont}}(H, M) \to H^0_{\text{cont}}(H, M'') \to \\ H^1_{\text{cont}}(H, M') \to H^1_{\text{cont}}(H, M) \to H^1_{\text{cont}}(H, M) \qquad . \end{aligned}$$

Remarque : Si

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

est une suite exacte courte de H-modules topologiques telle qu'il existe une section (ensembliste) continue de la projection de M sur M'', alors la suite exacte à six termes se prolonge en une suite exacte longue comme on pense ([Ta76],§2).

Enfin, si H' est un sous-groupe fermé invariant de H, il est immédiat que, pour tout H-module topologique la suite dite *d'inflation-restriction*

$$0 \to H^1_{\text{cont}}(H/H', M^H) \to H^1_{\text{cont}}(H, M) \to H^1_{\text{cont}}(H', M)^{H/H'}$$

est exacte.

Le cas non abélien

De la même façon, soit M un groupe topologique (pas nécessairement commutatif), muni d'une action multiplicative et continue du groupe topologique H. On note

$Z^1_{\text{cont}}(H,M)$ le sous-ensemble de l'ensemble $C^1_{\text{cont}}(H,M)$ des fonctions continues de H à valeurs dans M vérifiant $f(h_1h_2)=f(h_1)h_1(f(h_2))$ pour $h_1,h_2\in H$ et $H^1_{\text{cont}}(H,M)$ le quotient de $Z^1_{\text{cont}}(H,M)$ par la relation d'équivalence

$$f\simeq f' \Leftrightarrow \text{ il existe } a\in M \text{ tel que } f'(h)=af(h)h(a^{-1}) \text{ pour tout } h\in H\ .$$

C'est un ensemble pointé, i.e. qui contient un élément privilégié, à savoir la classe, notée 1, du 1-cocycle trivial.

Si H' est un sous-groupe fermé invariant de H, la suite *d'inflation-restriction*

$$1\to H^1_{\text{cont}}(H/H',M^H)\to H^1_{\text{cont}}(H,M)\to H^1_{\text{cont}}(H',M)^{H/H'}$$

est maintenant une suite exacte d'ensembles pointés.

1.2 – La cohomologie de C et des $GL_h(C)$

On note $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ l'anneau des entiers de $\overline{K}$, $\mathcal{O}_C=\varprojlim_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{O}_{\overline{K}}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}$ le complété de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ pour la topologie p-adique et $C=\mathcal{O}_C[1/p]$ son corps des fractions. On note v_p la valuation de C normalisée par $v_p(p)=1$ et $|\ |$ la valeur absolue p-adique. Pour tout $c\in C$, on a donc $|c|=p^{-v_p(c)}$. Cette valuation fait de C un corps valué complet et le lemme de Krasner ([La70], p.43) implique que C est algébriquement clos.

L'action de G_K sur $\overline{K}$ s'étend par continuité à C.

On note χ *le caractère cyclotomique*, i.e. l'homomorphisme continu de G_K dans le groupe des unités p-adiques qui donne l'action de G_K sur les racines de l'unité d'ordre p.

Notons $\log:\mathbb{Z}_p^*\to\mathbb{Z}_p$ le logarithme p-adique usuel (on a donc $\log(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-1)^n/n$ si $x-1\in p\mathbb{Z}_p$ et $\log(x)=\frac{1}{(p-1)}\log(x^{p-1})$ en général). L'application $\log\chi:G_K\to\mathbb{Z}_p$ est continue. On note H_K son noyau et Γ_K (ou Γ s'il n'y a pas de risque de confusion) le quotient G_K/H_K.

On note K_∞ la *$\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K*, i.e. l'unique $\mathbb{Z}_p$-extension de K contenue dans le sous-corps de $\overline{K}$ engendré sur K par les racines de l'unité d'ordre une puissance de p. On a donc $H_K=\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K}_\infty)$ et $\Gamma=\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$. On note L l'adhérence de K_∞ dans C.

Le but de la fin de ce chapitre est de démontrer les deux théorèmes suivants dont les parties (i) sont dues à Tate ([Ta67], prop.8 et 10) et les parties (ii) à Sen ([Sen80], th.1) :

Théorème 1.1. — *i) On a $C^{H_K}=L$.*
ii) Pour tout entier $h\geq 1$, $H^1_{\text{cont}}(H_K,GL_h(C))=1$.

Ce théorème implique donc que $C^{G_K}=L^\Gamma$ et que, pour tout entier $h\geq 1$, $H^1_{\text{cont}}(G_K,GL_h(C))=H^1_{\text{cont}}(\Gamma,GL_h(L))$.

THÉORÈME 1.2. — *i) On a $C^{G_K} = L^\Gamma = K$.*
ii) Pour tout entier $h \geq 1$, l'application

$$H^1_{\mathrm{cont}}(\Gamma, GL_h(K_\infty)) \to H^1_{\mathrm{cont}}(\Gamma, GL_h(L)) = H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, GL_h(C)) \ ,$$

induite par l'inclusion de $GL_h(K_\infty)$ dans $GL_h(C)$, est bijective.

Remarque : Tate montre aussi que $H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C)$ est un K-espace vectoriel de dimension 1 et que, si $\eta : \Gamma \to \mathbb{Z}_p$ est un homomorphisme non trivial, $H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C(\eta)) = 0$ ([Ta67], th.1 et 2). Ces résultats dont la démonstration directe est voisine de ceux de Sen en sont aussi des conséquences immédiates.

Dans le §1.3, on fait quelques rappels sur la théorie de la ramification telle qu'elle est développée dans les chapitres III et IV de [CL] et on prouve le théorème fondamental de Tate. Dans le §1.4, on en déduit le théorème 1.1. Enfin on prouve le théorème 1.2 dans le §1.5.

Remarque : Essentiellement la même démonstration permet de montrer aussi que $H^n_{\mathrm{cont}}(G_K, C) = 0$ pour tout $n \geq 2$.

1.3 – Différentes, groupes de ramification et extensions presqu'étales.

On note $\mathfrak{m}_C$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_C$. Pour tout sous-corps E de C, on pose $\mathcal{O}_E = E \cap \mathcal{O}_C$ et $\mathfrak{m}_E = E \cap \mathfrak{m}_C$. L'anneau $\mathcal{O}_E$ est un anneau de valuation, de corps des fractions E et $\mathfrak{m}_E$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_E$. Si E est une extension finie de K, $\mathcal{O}_E$ est un anneau de valuation discrète complet. On note alors v_E l'unique valuation de C normalisée par $v_E(E^*) = \mathbb{Z}$ et $e_E = v_E(p)$ l'indice de ramification absolu de E. Pour tout idéal fractionnaire $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{O}_E$, on note $v_E(\mathfrak{a})$ la valuation d'un générateur quelconque de $\mathfrak{a}$.

Dans toute la suite de ce chapitre, les extensions de K considérées sont toujours supposées contenues dans $\overline{K}$.

Soient E une extension finie de K et F une extension finie de E. Soit $\mathrm{tr} : F \to E$ la trace. L'application de $F \times F$ dans E qui envoie (x,y) sur $\mathrm{tr}(xy)$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée qui permet d'identifier F en tant que E-espace vectoriel à son dual.

Appelons *réseau de F* tout sous-$\mathcal{O}_E$-module de type fini contenant une base de F sur E. Si V est un réseau de F, on définit le *réseau dual V^** par

$$V^* = \{x \in F \mid \mathrm{tr}(xy) \in \mathcal{O}_E, \text{ pour tout } y \in V\} \ .$$

Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$ est une base de V sur $\mathcal{O}_E$, alors V^* est le réseau dont une base sur $\mathcal{O}_E$ est la base duale $\{v_1^*, v_2^*, \ldots, v_d^*\}$ de $\{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$.

Par définition, la *codifférente de l'extension F/E* est le réseau dual $\mathcal{D}^{-1}_{F/E} = (\mathcal{O}_F)^*$ de $\mathcal{O}_F$. C'est un idéal fractionnaire de $\mathcal{O}_F$ contenant $\mathcal{O}_F$. La *différente de l'extension F/E* est l'idéal $\mathcal{D}_{F/E}$ de $\mathcal{O}_F$ inverse de $\mathcal{D}^{-1}_{F/E}$.

Soit r l'unique entier tel que $\mathfrak{m}_E^r = \mathcal{D}_{F/E} \cap \mathcal{O}_E$. On a $\mathfrak{m}_E^r \mathcal{D}_{F/E}^{-1} \subset \mathcal{O}_F$. Si $\{a_1, a_2, \ldots, a_d\}$ est une base de $\mathcal{O}_F$ sur $\mathcal{O}_E$ et si $\{a_1^*, a_2^*, \ldots, a_d^*\}$ est la base duale et b un générateur de $\mathfrak{m}_E^r$, alors $ba_1a_1^* \in \mathcal{O}_F$ et $\mathrm{tr}(ba_1a_1^*) = b$. Comme $\mathrm{tr}(\mathcal{O}_F)$ est un idéal de $\mathcal{O}_E$, on en déduit que

$$\mathfrak{m}_E^r \subset \mathrm{tr}(\mathcal{O}_F) \tag{1}$$

On sait ([CL], chap.III, prop.12) qu'il existe $x \in \mathcal{O}_F$ qui engendre $\mathcal{O}_F$ en tant que $\mathcal{O}_E$-algèbre et qu'alors (*loc.cit.*, cor.2 à la prop.11), si P désigne le polynôme minimal de x sur E, $\mathcal{D}_{F/E}$ est l'idéal de $\mathcal{O}_E$ en engendré par $P'(x)$.

Supposons maintenant l'extension F/E galoisienne et soit $J = \mathrm{Gal}(F/E)$. Pour tout $g \in J$, on pose $i_J(g) = v_F((g-1)x)$. Si $g = 1$, $i_J(g) = +\infty$. Sinon, on a aussi $i_J(g) = v_F((g-1)\mathcal{O}_F)$ et c'est un entier qui ne dépend pas du choix du générateur x de la $\mathcal{O}_E$-algèbre $\mathcal{O}_F$.

On a $P(X) = \prod_{g \in J}(X - g(x))$, d'où l'on déduit que $P'(x) = \prod_{g \neq 1}(x - g(x))$. Par conséquent

$$v_F(\mathcal{D}_{F/E}) = \sum_{g \neq 1} i_J(g) \tag{2}$$

Pour tout nombre réel i, on pose $J_i = \{g \in J \mid i_J(g) \geq i+1\}$. Bien sûr, si $\{i\}$ désigne le plus petit entier $\geq i$, on a $J_i = J_{\{i\}}$. On sait ([CL], chap.IV, prop.1 et cor.1 et 3 à la prop.7) que les J_i sont des sous groupes invariants de J, que $J_{-1} = J$, $J_i = \{1\}$ pour $i >> 0$, J_0 est le groupe d'inertie (en particulier son ordre est égal à l'indice de ramification $e_{F/E}$ de l'extension F/E), J_1 est un p-groupe et, pour chaque entier $i \geq 1$, J_i/J_{i+1} est un groupe abélien annulé par p.

Les *nombres de ramification* de l'extension F/E sont les entiers i tels que $J_{i+1} \neq J_i$.

Soient J' un sous-groupe de J et $E' = F^{J'}$. Il est clair que, pour tout $g \in J'$, $i_{J'}(g) = i_J(g)$. Si J' est invariant dans J, pour tout $\bar{g} \in J/J'$, on a (*loc.cit.*, prop.3)

$$i_{J/J'}(\bar{g}) = \frac{1}{e_{F/E'}} \sum_{g \mapsto \bar{g}} i_J(g) \ . \tag{3}$$

Proposition 1.3. — *Soient E une extension finie de K, F une extension cyclique ramifiée de degré p de E, $\mathrm{tr}_{F/E} : F \to E$ la trace et i l'unique nombre de ramification de l'extension F/E. Alors*

i) on a $i \leq e_F/(p-1)$;

ii) si $x \in F$, $v_F(\mathrm{tr}_{F/E}(x)) \geq v_F(x) + (p-1)i$.

Preuve : Soit τ un générateur de $\mathrm{Gal}(F/E)$. On vérifie facilement que, pour tout $x \in F$, on a $v_F((\tau-1)x) \geq v_F(x)+i$, avec égalité si et seulement si $v_F(x)$ est premier à p. On voit aussi qu'il existe un polynôme $P(T) \in \mathbb{Z}[T]$, vérifiant $P(1)=1$ tel que

$$1+T+T^2\ldots+T^{p-1} = (T-1)^{p-1}+pP(T)\ .$$

Pour tout $x \in F$, on a donc

$$\mathrm{tr}_{F/E}(x) = (\tau-1)^{p-1}(x)+pP(\tau)(x) \tag{4}$$

et $v_F(pP(\tau)(x)) = e_F + v_F(x)$.

Supposons d'abord i divisible par p et choisissons $y \in F$ tel que $v_F(y) = 1$. On a $v_F((\tau-1)^{p-1}(y)) = (p-1)i+1$ qui n'est pas divisible par p; comme $v_F(pP(\tau)(y)) = e_F+1$ ne l'est pas non plus (e_F est divisible par p) et comme $v_F(\mathrm{tr}_{F/E}(y)) = pv_E(\mathrm{tr}_{F/E)}(y))$, on doit avoir $e_F+1 = (p-1)i+1$ et on a bien (i) dans ce cas.

Si au contraire i est premier à p et si on choisit $y \in F$ tel que $v_F(y) = i$, on a $v_F((\tau-1)^{p-1}(y)) = (p-1)i+i = pi$ tandis que $v_F(pP(\tau)(y)) = e_F+i$ est premier à p. Toujours puisque $v_F(\mathrm{tr}_{F/E}(y))$ doit être divisible par p, on doit avoir $pi < e_F+i$ d'où (i).

Dans les deux cas, pour tout $x \in F$, (4) montre que

$$v_F(\mathrm{tr}_{F/E}(x)) \geq v_F(x)+\min\{(p-1)i, e_F\} = v_F(x)+(p-1)i\ . \qquad \square$$

La proposition suivante est un cas particulier d'un résultat de Sen ([Sen69], th.1) :

Proposition 1.4. — *Soient n un entier ≥ 1 et F une extension cyclique totalement ramifiée de degré p^n d'une extension finie E de K. Soit γ un générateur de* $\mathrm{Gal}(F/E)$. *Alors,*
i) L'extension F/E a exactement n nombres de ramification distincts,

$$i_0 < i_1 < \ldots < i_{n-1}\ ,$$

tous strictement positifs,
ii) pour $1 \leq r \leq n-1$, on a $i_r \equiv i_{r-1} \pmod{p^r}$,
iii) pour tout $y \in F$ non nul, il existe $\lambda \in E$ tel que $v_p(y-\lambda) \geq v_p((\gamma-1)y)-1/(p-1)$.

Lemme 1.5. — *Soient m et n des entiers ≥ 1 vérifiant $n \geq m-1$ et $i_0, i_1, \ldots, i_{m-1}$ des entiers vérifiant $i_r \equiv i_{r-1} \pmod{p^r}$ pour $1 \leq r \leq m-1$. Alors les $j+i_{v_p(j)}$ pour $j \in \mathbb{Z}$ vérifiant $0 < j < p^n$ et $v_p(j) < m$ sont tous distincts* mod p^n.

Preuve du lemme : Supposons qu'il existe j, j' distincts comme ci-dessus et un entier $a \in \mathbb{Z}$ tels que $j'+i_{v_p(j')} = j+i_{v_p(j)}+p^n a$. On peut supposer que $s = v_p(j) < s' = v_p(j')$ et on a donc $0 \leq s \leq m-2$. Mais alors $j'-j = (i_s - i_{s'})+p^n a$. On a $v_p(j'-j) = s$, tandis que $v_p((i_s-i_{s'})+p^n a) \geq \min\{s+1, n\} = s+1$, d'où une contradiction. $\square$

Prouvons alors la proposition 1.4 : Notons E' (resp. F') l'unique extension de degré p (resp. p^{n-1}) de E contenue dans F. L'assertion (i) résulte immédiatement des propriétés des groupes de ramification rappelées plus haut de même que le fait que, si $n \geq 2$, les nombres de ramification de l'extension F'/E sont $i_0, i_1, \ldots, i_{n-2}$ et ceux de l'extension F/E' sont $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$.

Soit π une uniformisante de F de sorte que $v_F(\pi) = 1$. Posons $J = \mathrm{Gal}(F/E)$. Pour tout entier r vérifiant $1 \leq r < p^n$, on a $i_J(\gamma^r) = i_{v_p(r)}$ et $v_F(\gamma^r - 1)(\pi) = i_{v_p(r)} + 1$.

Posons $\pi_0 = 1$ et, pour $1 \leq r < p^n$, $\pi_r = \pi\gamma(\pi)\ldots\gamma^{r-1}(\pi)$. Pour tout r, on a $v_F(\pi_r) = r$ et, comme l'extension F/E est totalement ramifiée de degré p^n, les π_r forment une base de F sur E. Pour $1 \leq r < p^n$, on a $(\gamma-1)(\pi_r) = \pi\gamma(\pi)\ldots\gamma^{r-1}(\pi)(\gamma^r(\pi)-\pi)/\pi$ donc $v_F((\gamma - 1)(\pi_r)) = r + i_{v_p(r)}$. On voit aussi que, pour tout entier $s \in \mathbb{Z}$ vérifiant $v_p(s) < n$, il existe $\pi_s \in F$ tel que $v_F(\pi_s) = s$ et $v_F((\gamma - 1)(\pi_s)) = s + i_{v_p(s)}$: on le sait déjà si $0 < s < p^n$; sinon, si r désigne le reste de la division de s par p^n, il existe $\lambda_s \in E$ vérifiant $v_F(\lambda_s) = s - r$ et il suffit de prendre $\pi_s = \lambda_s\pi_r$. En remplaçant E par E' et γ par γ^p, on voit également que, pour tout entier $s \in \mathbb{Z}$ vérifiant $v_p(s) < n - 1$, il existe $z_s \in F$ tel que $v_F(z_s) = s$ et $v_F((\gamma^p - 1)(z_s)) = s + i_{v_p(s)+1}$.

Prouvons (ii) par récurrence sur n. Le cas $n \geq 1$ étant trivial, on peut supposer $n \geq 2$. L'hypothèse de récurrence appliquée à F'/E montre que $i_r \equiv i_{r-1} \pmod{p^r}$ pour $1 \geq r \geq n-2$; quand on l'applique à F/E' on trouve aussi que $i_{n-1} \equiv i_{n-2} \pmod{p^{n-2}}$. Posons $s = i_{n-2} - i_{n-1}$; il suffit de vérifier que si l'on suppose que $v_p(s) = n - 2$, on obtient une contradiction.

Choisissons z_s comme ci-dessus, de sorte que $v_F((\gamma^p - 1)(z_s) = s + i_{n-1} = i_{n-2}$. Soit $x = (1 + \gamma + \gamma^2 \ldots + \gamma^{p-1})(z)$. Comme $1 + \gamma + \gamma^2 \ldots + \gamma^{p-1} = (\gamma - 1)^{p-1} + pA(\gamma)$, où $A(\gamma) \in \mathbb{Z}[\gamma]$, et comme $v_F((\gamma-1)a) > v_F(a)$, pour tout $a \in F$, on a $v_F(x) > s$, tandis que $v_F((\gamma - 1)z) = v_F((\gamma^p - 1)(x_s)) = i_{n-2}$. On peut écrire $x = \sum_{r=0}^{p^n-1} \lambda_r\pi_r$ avec les $\lambda_r \in E$ et on a $v_F(x) = \min_{0\leq r<p^n}\{p^n v_E(\lambda_r) + r\}$, donc $p^n v_E(\lambda_r) + r > s$ pour tout r. On a $(\gamma-1)x = \sum_{r=1}^{p^n} \lambda_r(\gamma-1)(\pi_r)$. Si $v_p(r) = n-1$, on a $v_F(\lambda_r(\gamma-1)(\pi_r)) > s+i_{n-1} = i_{n-2}$. Le lemme précédent, appliqué avec $m = n - 1$, montre alors que

$$i_{n-2} = v_F((\gamma - 1)(x) = \min_{0<r<p^n, v_p(r)<i_{n-1}}\{p^n v_E(\lambda_r) + r + i_{v_p(r)}\} .$$

Il existerait donc r tel que $i_{n-2} \equiv r + i_{v_p(r)} \pmod{p^n}$, ce qui est impossible puisque $v_p(i_{n-2} - i_{v_p(r)}) \geq v_p(r) + 1$.

Prouvons enfin (ii). On peut écrire y de façon unique sous la forme $y = \sum_{r=0}^{p^n-1} \lambda_r\pi_r$, avec les $\lambda_r \in E$ et il suffit de prendre $\lambda = \lambda_0$. Il existe en effet un unique entier r_0 strictement compris entre 0 et p^n tel que $v_F(y - \lambda) = v_F(\lambda_{r_0}\pi_{r_0})$. Le lemme 1.5 appliqué avec $m = n$ montre que $v_F((\gamma-1)y) = \min_{0<r<p^n}\{v_F(\lambda_r\pi_r + i_{v_p(r)})\} \leq v_F(y-\lambda)+i_{n-1}$ et on a donc $v_F(y - \lambda) \geq v_F((\gamma - 1)y) - i_{n-1}$, ou encore, si e_F désigne l'indice de ramification absolu de F, $v_p(y - \lambda) \geq v_p(\gamma - 1)y) - i_{n-1}/e_F \geq v_p((\gamma - 1)y) - 1/(p - 1)$ d'après la proposition 1.3 appliquée à l'extension F/F'. $\square$

Remarque : L'assertion (ii) de la proposition 1.4 est le théorème de Hasse-Arf dans le cas particulier d'une extension cyclique totalement ramifiée (le cas général - cf. par exemple [CL] chap.V, th.1 - qui concerne les extensions abéliennes se ramène à ce cas ci).

Proposition 1.6. — *Soient n un entier ≥ 1, F une extension cyclique totalement ramifiée de degré p^n d'une extension finie E de K et $\mathrm{tr}_{F/E} : F \to E$ la trace. Pour tout $x \in F$, on a $v_p(\mathrm{tr}_{F/E}(x)) \geq v_p(x) + n(p-1)/pe_E$.*

Preuve : Soient $i_0 < i_1 < \ldots < i_{n-1}$ les nombres de ramification de l'extension. On déduit de la proposition 1.3 que $v_p(\mathrm{tr}_{F/E}(x)) \geq v_p(x) + (p-1)(\frac{i_0}{p} + \frac{i_1}{p^2} + \ldots + \frac{i_{n-1}}{p^n})/e_E$. les relations de congruences entre les i_r (prop.1.4) impliquent que $i_r \geq p^r$ pour tout r, d'où $v_p(\mathrm{tr}_{F/E}(x)) \geq v_p(x) + (p-1)(n/p)/e_E$. $\square$

Dans toute la suite de ce chapitre, on note K_∞ une $\mathbb{Z}_p$-extension ramifiée de K (pas nécessairement la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique). *Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on note K_r l'unique extension de K de degré p^r contenue dans K_∞. On pose aussi $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$, $\Gamma_r = \mathrm{Gal}(K_\infty/K_r)$. On choisit un générateur topologique γ_0 de Γ et on pose $\gamma_r = \gamma^{p^r}$* (c'est donc un générateur topologique de Γ_r).

On voit qu'il existe un unique entier $r_0 \geq 0$ et une suite strictement croissante d'entiers > 0

$$i_0 < i_1 < \ldots < i_{r-1} < i_r < \ldots$$

telle que K_{r_0} est l'extension maximale non ramifiée de K contenue dans K_∞ et que, pour tout entier $r > r_0$, les nombres de ramification de l'extension K_r/K_{r_0} sont $i_0, i_1, \ldots, i_{r-r_0-1}$. La suite $(i_r)_{r\in\mathbb{N}}$ s'appelle la *suite des nombres de ramification de l'extension K_∞/K*. La proposition précédente implique que, pour tout entier $r \geq 1$,

$$i_r \equiv i_{r-1} \bmod p^r \ . \tag{5}$$

Soit alors F une extension finie galoisienne de K telle que $K_\infty \cap F = K$. Pour tout entier $r \geq 0$, soit $F_r = K_r F$. Posons aussi $F_\infty = K_\infty F = \cup F_r$. Posons $J = \mathrm{Gal}(F_\infty/K_\infty)$, $J_r = \mathrm{Gal}(F_r/K_r)$ et soit ϖ_r l'isomorphisme canonique de J sur J_r. Pour tout $\tau \in J$, posons $i_r(\tau) = i_{J_r}(\varpi_r(\tau))$.

Proposition 1.7 (cf. [Sen69], Lemma 1, p.40). — *Avec les hypothèses et notations qui précèdent, pour tout $\tau \in J$, la suite des $i_r(\tau)$ est stationnaire.*

Preuve : Quitte à remplacer K par K_m, avec m suffisamment grand, on peut supposer l'extension F_∞/F totalement ramifiée. Soit $(j_r)_{r\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres de ramification de cette extension.

La formule (3) montre que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a

$$i_r(\tau) = \begin{cases} i_{r+1}(\tau) & \text{si} \quad i_{r+1}(\tau) \leq j_r \\ \frac{1}{p}(i_{r+1}(\tau) + (p-1)j_r) & \text{si} \quad i_{r+1}(\tau) > j_r \end{cases}$$

d'où l'on déduit que

$$i_{r+1}(\tau) = \begin{cases} i_r(\tau) & \text{si} \quad i_r(\tau) \leq j_r \\ pi_r(\tau) - (p-1)j_r & \text{si} \quad i_r(\tau) > j_r \end{cases}$$

et il suffit de montrer qu'il existe r tel que $i_r(\tau) \leq j_r$. Sinon on aurait $i_r(\tau) > j_r$ pour tout r, donc aussi $i_{r+1}(\tau) = pi_r(\tau) - (p-1)j_r$, d'où

$$i_r(\tau) = p^r i_0(\tau) - (p-1)(j_{r-1} + pj_{r-2} + \ldots + p^{r-1}j_0)$$

et $j_r < p^r i_0(\tau) - (p-1)(j_{r-1} + pj_{r-2} + \ldots + p^{r-1}j_0)$, ce qui s'écrit aussi

$$j_0 + \frac{j_1 - j_0}{p} + \frac{j_2 - j_1}{p^2} + \ldots + \frac{j_{r-1} - j_{r-2}}{p^{r-1}} + \frac{j_r - j_{r-1}}{p^r} < i_0(\tau)$$

ce qui ne peut être vrai indéfiniment car le membre de gauche est $\geq r+1$ puisque, d'après la proposition 1.4, c'est une somme de $r+1$ entiers ≥ 1. □

Théorème 1.8 ([Ta67], prop.9). — *Soit M une extension finie de K_∞ et $\mathrm{tr}_{M/K_\infty} : M \to K_\infty$ la trace. Alors $\mathrm{tr}_{M/K_\infty}(\mathcal{O}_M) \supset \mathfrak{m}_{K_\infty}$.*

Preuve : Quitte à remplacer M par une extension finie, on peut supposer M galoisienne. Quitte à remplacer K par une extension finie contenue dans K_∞, on peut supposer qu'il existe une extension finie galoisienne F de K telle que $M = K_\infty F$ et $K_\infty \cap F = K$.

Avec les notations utilisées pour la proposition précédente, il résulte de (2) que, pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$v_{F_r}(\mathcal{D}_{F_r/K_r}) = \sum_{\tau \in J, \tau \neq 1} i_r(\tau)$$

et cette proposition montre qu'il existe un entier r_0 et une constante c telle que $v_{F_r}(\mathcal{D}_{F_r/K_r}) = c$ si $r \geq r_0$.

Si e est l'indice de ramification commun à toutes les extensions F_r/K_r pour $r \geq r_0$ et si n est le plus petit entier tel que $en \geq c$, il résulte de (1) que $\mathfrak{m}_{K_r}^n \subset \mathrm{tr}_{F_r/K_r}(\mathcal{O}_{F_r}) \subset \mathrm{tr}_{M/K_\infty}(\mathcal{O}_M)$, et $\mathrm{tr}_{M/K_\infty}(\mathcal{O}_M) \supset \cup_{r \geq r_0} \mathfrak{m}_{K_r}^n = \mathfrak{m}_{K_\infty}$ puisque $v_p(\mathfrak{m}_{K_r}^n) = n/e_{K_r}$ tend vers 0 lorsque r tend vers l'infini. □

1.4 – Calcul de la cohomologie de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$

Dans ce paragraphe, on prouve le résultat suivant, dont le théorème 1.1 est un cas particulier :

Théorème 1.1'. — *Soient L l'adhérence de K_∞ dans C et $H_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$.*
i) On a $C^{H_K} = L$.
ii) Pour tout entier $h \geq 1$, $H^1_{\mathrm{cont}}(H_K, GL_h(C)) = 1$.

Commençons par un lemme :

Lemme 1.9. — *Soient M une extension finie galoisienne de K_∞ de groupe de Galois J et c un nombre réel > 1. Pour tout $\lambda \in M$, il existe $a \in K_\infty$ tel que*

$$|\lambda - a| < c.\sup_{g \in J}|(g-1)\lambda| \ .$$

Preuve : D'après le théorème 1.8, on peut trouver $y \in \mathcal{O}_M$ tel que $x = \mathrm{tr}_{M/K_\infty}(y)$ vérifie $|x| > \frac{1}{c}$. Si $\mu = y\lambda/x$ et si $a = \mathrm{tr}(\mu)$, on a $a = \frac{1}{x}\sum_{g\in J} g(y)g(\lambda) = \frac{\lambda}{x}\mathrm{tr}(y) + \frac{1}{x}\sum_{g\in J} g(y)(g-1)\lambda$ et $|\lambda - a| \leq \sup_{g\in J}|\frac{1}{x}g(y)(g-1)\lambda| < c.\sup_{g\in J}|(g-1)\lambda|$. □

Prouvons l'assertion (i) du théorème : Soit $\lambda \in C^{H_K}$. Choisissons une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\overline{K}$ telle que $|\lambda - \lambda_n| < p^{-n}$. Pour tout $h \in H_K$, on a $|(h-1)\lambda_n| < p^{-n}$. Pour tout n, choisissons une extension finie galoisienne M_n de K_∞ contenant λ_n et soit $J_n = \mathrm{Gal}(M_n/K_\infty)$. On a $|(g-1)\lambda_n| < p^{-n}$, pour tout $g \in J_n$ et, d'après le lemme précédent (en choisissant $c = p$), il existe $a_n \in K_\infty$ tel que $|\lambda_n - a_n| < p.p^{-n} = p^{1-n}$. On a donc $|\lambda - a_n| < p^{1-n}$ et λ limite des a_n est bien dans L. □

Lemme 1.10. — *Soient H un sous-groupe ouvert de H_K et m un entier ≥ 2. Soit $f_m : H \to GL_h(C)$ un 1-cocycle continu vérifiant $f_m(s) - 1 \in p^m M_h(\mathcal{O}_C)$, pour tout $s \in H$. Il existe $b_m \in GL_h(C)$ vérifiant $b_m - 1 \in p^{m-1}M_h(\mathcal{O}_C)$ tel que, si $f_{m+1} : H \to GL_h(C)$ est le 1-cocycle continu défini par $f_{m+1}(s) = b_m^{-1}f_m(s)s(b_m)$, on ait $f_{m+1}(s) - 1 \in p^{m+1}M_h(\mathcal{O}_C)$, pour tout $s \in H$.*

Preuve : La continuité de f_m implique l'existence d'un sous-groupe ouvert invariant H' de H tel que $f_m(g) - 1 \in p^{m+2}M_h(\mathcal{O}_C)$ si $g \in H'$. Soient $J = H/H'$, $K'_\infty = \overline{K}^H$ et $M' = \overline{K}^{H'}$. On peut trouver une extension finie K' de K telle que K'_∞ soit une $\mathbb{Z}_p$-extension ramifiée de K' et M' est une extension finie galoisienne de K'_∞. D'après le théorème 1.8, il existe $y \in \mathcal{O}_{M'} \subset \mathcal{O}_{C^{H'}}$ tel que $\sum_{\tau\in J}\tau(y) = p$.

Choisissons un système de représentants T de J dans H et posons

$$b_m = \frac{1}{p}\sum_{g\in T} f_m(g)g(y) \ .$$

Si l'on pose $f_m(g) = 1 + p^m a_m(g)$, les $a_m(g)$ sont des matrices à coefficients dans $\mathcal{O}_C$ et l'on a $b_m = 1 + p^{m-1}\sum_{g\in T} a_m(g)g(y)$, ce qui fait que $b_m - 1 \in p^{m-1}M_h(\mathcal{O}_C)$. En particulier, $b_m \in GL_h(\mathcal{O}_C) \subset GL_h(C)$.

Par ailleurs, pour tout $s \in H$, on a

$$s(b_m) = \frac{1}{p}\sum_{g\in T} s(f_m(g))(sg)(y) = \frac{1}{p}f_m(s)^{-1}.\sum_{g\in T} f_m(sg)(sg)(y) \ .$$

Quand g parcourt T, sg parcourt aussi un système complet de représentants de J dans H. Comme la condition de cocycle implique que $f_m(s'g) \equiv f_m(g) \bmod p^{m+2}$ si $g \in H$ et $s' \in H'$, on en déduit que

$$s(b_m) \equiv f_m(s)^{-1}b_m \bmod p^{m+1} \ ,$$

i.e. que $b_m^{-1}f_m(s)s(b_m) \equiv 1 \bmod p^{m+1}$. □

Preuve de l'assertion (ii) du théorème : Soit $f : H_K \to GL_h(C)$ un 1-cocycle continu. La continuité implique l'existence d'un sous-groupe ouvert, que l'on peut choisir invariant, H de H_K tel que $f(s) - 1 \in p^2 M_2(\mathcal{O}_C)$ pour tout $s \in H$. En notant f_2 la restriction de f à H, le lemme précédent nous permet de construire une suite $(f_m)_{m\geq 2}$ de 1-cocycles continus vérifiant $f_m(s) - 1 \in p^m M_h(\mathcal{O}_C)$ pour tout $s \in H$ et une suite $(b_m)_{m\geq 2}$ d'éléments de $GL_h(C)$ vérifiant $b_m - 1 \in p^{m-1}M_h(\mathcal{O}_C)$ et $f_{m+1}(s) = b_m^{-1}f_m(s)s(b_m)$, pour tout $s \in H$. On voit alors que la suite des $b_2b_3\dots b_m$ converge dans $GL_h(C)$ vers un élément b vérifiant $b^{-1}f(s)s(b) = 1$ pour tout $s \in H$. La suite exacte d'inflation-restriction (§1.1) montre que f est dans l'image de $H^1_{cont}(H_K/H, (GL_h(C)^H)$. Mais H_K/H s'identifie au groupe de Galois de l'extension finie galoisienne C^H/C^{H_K} et $H^1_{cont}(H_K/H, (GL_h(C)^H) = H^1(\mathrm{Gal}(C^H/C^{H_K}), GL_h(C^H))$ est trivial ([CL, prop.3, p.159). □

1.5 – Calcul de la cohomologie de $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$

On dit que la $\mathbb{Z}_p$-extension K_∞/K est *régulière* si elle est totalement ramifiée et si la suite $(i_r)_{r\in\mathbb{N}}$ des nombres de ramification de l'extension vérifie

$$i_r - i_{r-1} = p^r e_K \text{ pour tout } r \geq 1 .$$

On dit que l'extension K_∞/K est *potentiellement régulière* s'il existe un entier r_0 telle que K_∞/K_{r_0} est régulière. Alors, pour tout $r \geq r_0$, K_∞/K_r est régulière.

Proposition 1.11. — *La $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K est potentiellement régulière.*

Preuve : Supposons d'abord que $e_K = p - 1$ (resp. 2) si $p \neq 2$ (resp $= 2$) et que K contient les racines p-ièmes (resp. 4-ièmes) de l'unité. On vérifie alors (cf [CL], chap.IV, prop.18, du moins lorsque le corps résiduel est $\mathbb{F}_p$, mais la preuve est la même dans le cas général) que K_∞/K est totalement ramifiée et que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $i_r = p^{r+1} - 1$ (resp. $2^{r+2} - 1$) et on en déduit que la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K est régulière.

Le cas général est une conséquence immédiate du lemme suivant :

Lemme 1.12. — *Soit F une extension finie de K. La $\mathbb{Z}_p$-extension K_∞/K est potentiellement régulière si et seulement si FK_∞/F l'est.*

Preuve : cela se vérifie très facilement en utilisant (3) et la proposition 1.7. □

Dans toute la suite de ce chapitre, on suppose l'extension K_∞/K potentiellement régulière et on note L l'adhérence de K_∞ dans C.

Remarque : En fait, toute $\mathbb{Z}_p$-extension ramifiée de K est potentiellement régulière : on peut le montrer facilement à partir de la théorie du corps de classes (cf. la discussion dans [Ta67], p.71 ou [Fo71], prop.4.3).

Le théorème 1.2 est un cas particulier du résultat suivant :

THÉORÈME 1.2'. — *i) On a* $L^\Gamma = K$.

ii) Pour tout entier $h \geq 1$, *l'application* $\iota : H^1_{\text{cont}}(\Gamma, GL_h(K_\infty)) \to H^1_{\text{cont}}(\Gamma, GL_h(L))$, *induite par l'inclusion de* $GL_h(K_\infty)$ *dans* $GL_h(L)$, *est bijective.*

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, notons $\mathrm{tr}_{K_r/K} : K_r \to K$ la trace. Pour tout $x \in K_\infty$, choisissons $r \in \mathbb{N}$ tel que $x \in K_r$ et posons $t_K(x) = \frac{1}{p^r}\mathrm{tr}_{K_r/K}(x)$. Le résultat ne dépend pas du choix de r et l'application t_K ainsi définie est un projecteur du K-espace vectoriel K_∞ sur son sous-K-espace vectoriel K.

Rappelons que γ_0 désigne un générateur topologique de $\Gamma = \mathrm{Gal(K_\infty/K)}$.

PROPOSITION 1.13. — *Pour tout* $x \in K_\infty$, *on a*

$$v_p(t_K(x) - x) \geq v_p((\gamma_0 - 1)x) - p/(p-1) \ .$$

Commençons par établir un résultat auxiliaire :

LEMME 1.14. — *Pour tout entier* $r \geq 0$ *et tout* $x \in K_{r+1}$, *on a* $v_p(x - \frac{1}{p}\mathrm{tr}_{K_{r+1}/K_r}(x)) \geq v_p((\gamma_0 - 1)x) - 1$.

Preuve : Rappelons que l'on a posé $\gamma_r = \gamma_0^{p^r}$. On a
$px - \mathrm{tr}_{K_{r+1}/K_r}(x) = \sum_{m=0}^{p-1}(x - \gamma_r^m(x)) = \sum_{m=1}^{p-1}(x - \gamma_r^m(x)) = A(\gamma_r)(\gamma_r - 1)(x)$,
où $A(\gamma_r) \in \mathbb{Z}[\gamma_r]$ et par conséquent $v_p(px - \mathrm{tr}_{K_{r+1}/K_r}(x)) \geq v_p((\gamma_r - 1)(x)) \geq v_p(\gamma_0 - 1)(x)$ puisque $(\gamma_r - 1) = B(\gamma_0)(\gamma_0 - 1)$, avec $B(\gamma_0) \in \mathbb{Z}[\gamma_0]$. $\square$

Prouvons la proposition 1.13 : Posons $c = 1 - \frac{i_0}{pe_K}$ et, pour tout entier $r \geq 1$, $d_r = c + \frac{i_{r-1}}{p^r e_K}$, de sorte que $d_1 = 1$. Pour tout $r \geq 1$, on a $d_{r+1} - d_r = (i_r - pi_{r-1})/p^{r+1}e_K = (p^r e_K - (p-1)i_{r-1})/p^{r+1}e_K \geq 0$ car $i_{r-1} \leq e_{K_r}/(p-1) = p^r e_K/(p-1)$ (cf. prop.1.3).

Montrons que, pour tout entier $r \geq 1$, on a, pour tout $x \in K_r$,

$$v_p(t_K - 1)x \geq v_p((\gamma_0 - 1)x) - d_r \ .$$

Pour $r = 1$, cela résulte du lemme précédent. Supposons que c'est vrai pour r et montrons-le pour $r+1$: Si $x \in K_{r+1}$ et si $y = \mathrm{tr}_{K_{r+1}/K_r}(x)$, on a

$$x - t_K(x) = \frac{1}{p}(px - y) + \frac{1}{p}(y - t_K(y)) \ .$$

D'après le lemme précédent, $v_p(\frac{1}{p}(px - y)) \geq v_p(\gamma_0 - 1)x) - 1 \geq v_p(\gamma_0 - 1)x - d_{r+1}$. Par hypothèse de récurrence, $v_p(\frac{1}{p}(y - t_K(y))) \geq -1 + v_p((\gamma_0 - 1)y) - d_r$. Mais $(\gamma_0 - 1)y = (\gamma_0 - 1)(\mathrm{tr}_{K_{r+1}/K_r}(x)) = \mathrm{tr}_{K_{r+1}/K_r}((\gamma_0 - 1)x)$ et, d'après la proposition 1.3, $v_p((\gamma_0 - 1)y) \geq v_p((\gamma_0 - 1)x) + (p-1)i_r/p^{r+1}e_K$, de sorte que l'on a aussi $v_p(\frac{1}{p}(y - t_K(y)) \geq v_p((\gamma_0 - 1)x) + (p-1)i_r/p^{r+1}e_K - 1 - d_r = v_p((\gamma_0 - 1)x) - d_{r+1}$ car $d_{r+1} = d_r + \frac{i_r}{p^{r+1}e_K} - \frac{i_{r-1}}{p^r e_K} = d_r + \frac{i_r - i_{r-1}}{p^r e_K} - \frac{(p-1)i_r}{p^{r+1}}e_K$ et $i_r - i_{r-1} = p^r e_K$ puisque K_∞/K est régulière.

On voit que, pour tout r, $i_r = i_0 + p(1 + p + \ldots + p^{r-1})e_K = i_0 + \frac{p(p^r - 1)}{p-1}e_K = i_0 - \frac{pe_K}{p-1} + \frac{p^{r+1}}{p-1}e_K$ donc que $d_r = 1 - \frac{i_0}{pe_K} + \frac{i_{r-1}}{p^r e_K} = 1 - \frac{i_0}{pe_K} + \frac{i_0}{p^r e_K} - \frac{1}{p^{r-1}(p-1)} + \frac{1}{p-1} \leq p/(p-1)$. $\square$

Proposition 1.15. — *i) L'application $t_K : K_\infty \to K$ est continue ;*

ii) notons $\hat{t}_K : L \to K$ le prolongement de t_K par continuité et L_0 le noyau de $\hat{t}_K$; on a $L = K \oplus L_0$, $\gamma_0 - 1$ est bijectif sur L_0 et son inverse ρ est continu ;

iii) si K_∞/K est régulière, on a $v_p(\hat{t}_K(x)) \geq v_p(x) - p/(p-1)$ pour tout $x \in L$ et $v_p(\rho(y)) \geq v_p(y) - p/(p-1)$ pour tout $y \in L_0$;

(iv) pour tout $x \in L$, la suite des $\hat{t}_{K_s}(x)$ tend vers x lorsque s tend vers l'infini.

Preuve :

Choisissons un entier r_0 tel que l'extension K_∞/K_{r_0} est régulière.

Montrons (i) : On a $t_K = p^{-r_0}\mathrm{tr}_{K_{r_0}/K} \circ t_{K_{r_0}}$. L'application $p^{-r_0}\mathrm{tr}_{K_{r_0}/K}$ est évidemment continue et $t_{K_{r_0}}$ l'est d'après la proposition 1.14, donc t_K l'est aussi.

Montrons (ii) et (iii) : Supposons d'abord K_∞/K régulière.

Si $x \in K_\infty$, comme $v_p((\gamma_0 - 1)x) \geq v_p(x)$, il résulte de la proposition 1.14 que $v_p(t_K(x)) \geq v_p(x) - p/(p-1)$ et on en déduit que, si $x \in L$, on a aussi $v_p(\hat{t}_K(x)) \geq v_p(x) - p/(p-1)$.

Si maintenant $x \in K$, $\hat{t}_K(x) = x$, donc $\hat{t}_K^2 = \hat{t}_K$ et $L = K \oplus L_0$. Pour tout $x \in L$, $\hat{t}_K(\gamma_0(x)) = \hat{t}_K(x)$ et $(\gamma_0 - 1)x \in L_0$. En particulier $(\gamma_0 - 1)(L_0) \subset L_0$. Posons $K_{\infty,0} = K_\infty \cap L_0$ et, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $K_{r,0} = K_r \cap L_0$, de sorte que $K_{\infty,0}$ est la réunion des $K_{r,0}$ et que L_0 est l'adhérence de $K_{\infty,0}$ dans L. Comme $\gamma_0 - 1$ est injectif sur chacun des K-espaces vectoriels de dimension finie $K_{n,0}$ il est bijectif sur chacun d'eux de même que sur leur réunion $K_{\infty,0}$. Si ρ est son inverse, pour tout $y \in K_{\infty,0}$, comme $t_K(\rho(y)) = \hat{t}_K(\rho(y)) = 0$, on a, d'après la proposition 1.13, $v_p(\rho(y)) \geq v_p(y) - p/(p-1)$ et ρ est continue. On peut donc la prolonger par continuité en une application continue, que nous notons encore ρ, de L_0 dans lui même qui est bien un inverse de $\gamma_0 - 1$. Le fait que $v_p(\rho(y)) \geq v_p(y) - p/(p-1)$ pour tout $y \in L_0$ se déduit par continuité de ce que c'est vrai pour $y \in K_{\infty,0}$.

Passons au cas général. Soient $\hat{t}_{K_{r_0}}$ le prolongement par continuité de $t_{K_{r_0}}$ à L, L_{r_0} le noyau de $\hat{t}_{K_{r_0}}$ et $\rho_{r_0} : L_{r_0} \to L_{r_0}$ l'inverse de la restriction de $\gamma_{r_0} - 1$.

On a $L = K \oplus L_0 = K_{r_0} \oplus L_{r_0}$ et, comme $L_{r_0} \subset L_0$,

$$L_0 = L_0 \cap K_{r_0} \oplus L_{r_0} \ .$$

Sur $L_0 \cap K_{r_0}$, qui est de dimension finie sur K, $\gamma_0 - 1$ est injectif, donc bijectif et son inverse est continu. Par ailleurs on peut écrire $\gamma_{r_0} - 1 = (\gamma_0 - 1)\delta$, avec $\delta \in \mathbb{Z}[\gamma_0]$. On en déduit que $\gamma_0 - 1$ est bijectif sur L_{r_0} avec comme inverse $\delta\rho_{r_0}$ qui est continu.

Montrons (iv) : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K_∞ telle que $v_p(x - x_n) \geq n$ pour tout n. Pour chaque n, $x_n \in K_s$ si s est suffisamment grand et on a alors $\hat{t}_{K_s}(x_n) = x_n$. Si l'on choisit s suffisamment grand pour que K_∞/K_s soit régulière, on a, d'après (iii) , $v_p(\hat{t}_{K_s}(x) - \hat{t}_{K_s}(x_n)) = v_p(\hat{t}_{K_s}(x - x_n) \geq n - p/(p-1)$, donc, puisque $x - \hat{t}_{K_s}(x) = (x - x_n) - (\hat{t}_{K_s}(x) - \hat{t}_{K_s}(x_n))$, on a $v_p(x - \hat{t}_{K_s}(x)) \geq n - p/(p-1)$ et la suite des $\hat{t}_{K_s}(x)$ tend bien vers x. □

Proposition 1.16 ([Sen80], prop.3). — *Tout sous-K-espace vectoriel de dimension finie de L, stable par γ_0, est contenu dans K_∞.*

Preuve : Soit V un tel sous-espace-vectoriel. La restriction de γ_0 à V est un endomorphisme u de ce K-espace vectoriel. Soit K' l'extension de K obtenue en rajoutant les racines du polynôme caractéristique de u dans $\overline{K}$ et $K'_\infty = K'K_\infty$. L'extension K'_∞/K' est potentiellement régulière (lemme 1.12). Quitte à remplacer K par K', V par $K'V$, γ_0 par $\gamma_0^{p^r}$, si p^r désigne l'ordre du quotient de Γ par l'image de $\mathrm{Gal}(K'_\infty/K')$, et L par le complété de K'_∞, on peut supposer que les valeurs propres de u sont dans K. Quitte à décomposer V en somme directe de ses sous-espaces caractéristiques, on peut supposer que V n'a qu'une seule valeur propre a.

Si v est un vecteur propre non nul, on a $\gamma_0(v) = av$, donc $\gamma_0^{p^r}(v) = a^{p^r}v$, pour tout $r \in \mathbb{N}$ et la continuité de l'action de Γ sur L implique que a est une unité principale. D'après le (ii) de la proposition 1.16, a est une racine de l'unité. Quitte à remplacer K par une extension finie de K contenue dans K_∞, on peut supposer $a = 1$. Quitte à remplacer V par $K + V$, on peut supposer que $V = K \oplus V'$, avec $V' \subset L_0$ où L_0 est comme dans la proposition 1.15. Mais d'après le (ii) de cette proposition $\gamma_0 - 1$ est bijectif sur L_0 et $V' = 0$. □

Prouvons alors le théorème 1.2' : On a $L^{H_K} = \{x \in L \mid (\gamma_0 - 1)x = 0\}$ et (i) résulte de l'assertion (ii) de la proposition 1.15.

Prouvons alors l'injectivité de ι : Soient $f, f' : \Gamma \to GL_h(K_\infty)$ deux 1-cocycles qui deviennent cohomologues dans $GL_h(L)$. Il existe donc $b \in GL_h(L)$ tel que $f'(\gamma_0) = b^{-1}f(\gamma_0)\gamma_0(b)$ et il suffit de montrer que $b \in GL_d(K_\infty)$. Mais cette relation se réécrit

$$\gamma_0(b) = f(\gamma_0)^{-1}bf'(\gamma_0)\ .$$

Soit K' l'extension (finie) de K contenue dans K_∞ engendrée par les coefficients de $f(\gamma_0)$ et de $f'(\gamma_0)$. Le sous-K'-espace vectoriel V de L engendré par les coefficients de b est un K-espace vectoriel de dimension finie et la formule ci-dessus montre qu'il est stable par γ_0. Comme γ_0 est un générateur topologique de Γ et comme V est fermé dans L, la proposition 1.16 implique que $V \subset K_\infty$, donc $b \in GL_h(K_\infty)$.

Pour prouver la surjectivité, commençons par établir un lemme :

LEMME 1.17. — *Pour toute matrice $a \in M_h(L)$, notons $v(a)$ le minimum de la valuation p-adique de ses coefficients. Soient r un entier tel que l'extension K_∞/K_r est régulière et m un entier ≥ 5. Soient $a_m \in GL_h(L)$, $x_m \in GL_h(K_r)$ des matrices vérifiant $v(a_m - 1) \geq 3p/(p-1)$ et $v(a_m - x_m) \geq mp/(p-1)$. Il existe $b_m \in GL_h(L)$ vérifiant $v(b_m - 1) \geq (m-2)p/(p-1)$ et $x_{m+1} \in GL_h(K_r)$ tels que, si $a_{m+1} = b_m^{-1}a_m\gamma_r(b_m)$, on ait $v(a_{m+1} - 1) \geq 3p/(p-1)$ et $v(a_{m+1} - x_{m+1}) \geq (m+1)p/(p-1)$.*

Preuve : Soit $L_r = \mathrm{Ker}\ \hat{t}_{K_r} : L \to K_r$. Alors (prop.1.15 appliquée à l'extension K_∞/K_r), on a $L = K_r \oplus L_r$ et γ_r est bijectif sur L_r. On peut donc écrire

$$a_m = x_{m+1} + (\gamma_r - 1)s \text{ avec } x_{m+1} \in M_h(K_r) \text{ et } s \in M_h(L_r)\ .$$

Posons $b_m = 1 - s$ et montrons que b_m et x_{m+1} conviennent.

On a $x_{m+1}-x_m+(\gamma_r-1)s=a_m-x_m$, donc $v(x_{m+1}-x_m+(\gamma_r-1)s)\geq mp/(p-1)$, $v(\gamma_r-1)^2s\geq mp/(p-1)$ et (assertion (iii) de la proposition 1.15), si ρ_r désigne l'inverse de γ_r-1 sur L_r, $v(\gamma_r-1)s)=v(\rho_r(\gamma_r-1)^2s)\geq(m-1)p/(p-1)$; de même, $v(s)=v(\rho_r(\gamma_r-1)s)\geq(m-2)p/(p-1)$. En particulier, on a bien $v(b_m-1)\geq(m-2)p/(p-1)$ et, comme $(m-2)p/(p-1)\geq 0$, $b_m\in GL_h(L)$.

Si l'on pose $a_m=1+c$, on a $v(c)\geq 3p/(p-1)$ et

$$a_{m+1}=(1+s+s^2+\ldots)(1+c)(1-\gamma_r(s))=1+s+c-\gamma_r(s)+c'=a_m-(\gamma_r-1)s+c'\ ,$$

avec $c'\in M_h(L)$ vérifiant $v(c')\geq\min\{2(m-2)p/(p-1),(m-2)p/(p-1)+3p/(p-1)\}=(m+1)p/(p-1)$ puisque $m\geq 5$. En particulier $a_{m+1}-1=(a_m-1)-(\gamma_r-1)s+c'$ et $v(a_{m+1}-1)\geq\min\{3p/(p-1),(m-1)p/(p-1),(m+1)p/(p-1)\}=3p/(p-1)$. Enfin $a_{m+1}-x_{m+1}=a_m-(\gamma_r-1)s+c'-a_m+(\gamma_r-1)s=c'$ donc $v(a_{m+1}-x_{m+1})\geq(m+1)p/(p-1)$ et $x_{m+1}-1=(a_{m+1}-1)-(a_{m+1}-x_{m+1})$ vérifie $v(x_{m+1}-1)>0$, donc $x_{m+1}\in GL_h(K_r)$. □

Prouvons alors la surjectivité : Soit $f:\Gamma\to GL_h(L)$ un 1-cocycle continu. Il existe un entier r, que l'on peut choisir suffisamment grand pour que l'extension K_∞/K_r soit régulière, tel que $v(f(\gamma_r)-1)\geq 5p/(p-1)$. Posons $a_5=f(\gamma_r)$ et $x_5=1$. Le lemme ci-dessus nous permet de construire des suites de matrices $(a_m)_{m\geq 5},(b_m)_{m\geq 5}$ dans $GL_h(L)$ et $(x_m)_{m\geq 5}$ dans $GL_h(K_r)$ telles que, pour tout $m\geq 5$ on ait $v(a_m-1)\geq 3p/(p-1)$, $v(a_m-x_m)\geq mp/(p-1)$, $v(b_m-1)\geq(m-2)p/(p-1)$ et $a_{m+1}=b_m^{-1}a_m\gamma_r(b_m)$.

La suite des $b_5b_6\ldots b_m$ converge vers une matrice $b\in GL_h(L)$ tandis que la suite des a_m et celle des x_m tendent toutes deux vers la même limite $x\in GL_h(K_r)$. On a $b_{-1}a\gamma_r(b)=x$.

Soit $f':\Gamma\to GL_h(L)$ le 1-cocycle, cohomologue à f défini par $f'(\gamma)=b^{-1}f(\gamma)\gamma(b)$, pour tout $\gamma\in\Gamma$. On a $f'(\gamma_r)=x\in GL_h(K_r)$.

Pour tout $\gamma\in\Gamma$, $\gamma\gamma_r=\gamma_r\gamma$, donc $f'(\gamma)\gamma(f'(\gamma_r))=f'(\gamma_r)\gamma_r(f'(\gamma))$ ou encore $\gamma_r(f'(\gamma))=f'(\gamma_r)^{-1}f'(\gamma)\gamma(f'(\gamma_r))=x^{-1}f'(\gamma)\gamma(x)$. On en déduit que le sous-K_r-espace vectoriel de L engendré par les coefficients de $f'(\gamma)$, qui est de dimension finie, est stable par γ_r. D'après la proposition 1.16, ceci implique que $f'(\gamma)\in GL_h(K_\infty)$. Autrement dit f est cohomologue à un cocycle à valeurs dans $GL_h(K_\infty)$ et est bien dans l'image de ι. □

Chapitre 2 – C-représentations : la théorie de Sen

2.1 – C, L et K_∞-représentations

On reprend les notations de l'introduction. Soient J un groupe topologique, B un corps muni d'une topologie et d'une action continue de J compatible avec la structure de corps et $E = B^J$.

Soient W une B-représentation de J et $\xi : B \to W$ une application B-linéaire J-équivariante. Pour tout $b \in B$, on a $\xi(b) = b\xi(1)$ et l'application $\xi \mapsto \xi(1)$ identifie le E-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_B(J)}(B, W)$ à $H^0_{\mathrm{cont}}(J, W) = W^J$. De même, soit U une B-représentation de J extension de B par une B-représentation W, de sorte que l'on a une suite exacte

$$0 \to W \to U \to B \to 0 \ .$$

Si $x \in U$ est un relèvement de $1 \in B$, l'application $f : J \to W$ qui à g associe $(g-1)x$ est un 1-cocycle continu de J à valeurs dans W, dont la classe $[U]$ dans $H^1_{\mathrm{cont}}(J, W)$ ne dépend pas du choix du relèvement. L'application $U \mapsto [U]$ ainsi définie induit un isomorphisme du E-espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}_B(J)}(B, W)$ sur $H^1_{\mathrm{cont}}(J, W)$ que nous utilisons pour identifier ces deux E-espaces vectoriels.

Soient W_1 et W_2 deux B-représentations de J et $W = W_1^* \otimes_B W_2$.

L'isomorphisme naturel du B-espace vectoriel des applications B-linéaires de W_1 dans W_2 sur W induit un isomorphisme du E-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_B(J)}(W_1, W_2)$ des applications B-linéaires équivariantes de W_1 dans W_2 sur $H^0_{\mathrm{cont}}(J, W) = W^J = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_B(J)}(B, W)$.

Soit V une B-représentation de J, extension de W_1 par W_2. En tensorisant la suite exacte

$$0 \to W_2 \to V \to W_1 \to 0$$

avec W_1^*, on obtient une suite exacte

$$0 \to W \to W_1^* \otimes_B V \to W_1^* \otimes_B W_1 \to 0$$

de sorte que l'image inverse de B identifiée aux homothéties dans $W_1^* \otimes W_1 = \mathrm{End}_B(W_1)$ est une extension de B par W. La classe de cette extension dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}_B(J)}(B, W)$ ne dépend que de la classe de V dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}_B(J)}(W_1, W_2)$ et l'application

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}_B(J)}(W_1, W_2) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}_B(J)}(B, W) = H^1_{\mathrm{cont}}(J, W)$$

ainsi définie est un isomorphisme de E-espaces vectoriels.

Proposition 2.1. — *Soient J, B et E comme ci-dessus. Pour toute B-représentation W de J, l'application B-linéaire*

$$\rho_B(W) : B \otimes_E W^J \to W \ ,$$

déduite par extension des scalaires de l'inclusion de W^J dans W, est injective.

Preuve : Supposons que c'est faux et soit m le plus petit entier tel qu'il existe $w_1, w_2, \ldots, w_m \in W^J$, linéairement indépendants sur K et $b_1, b_2, \ldots, b_m \in B$ pas tous nuls avec $\sum_{j=1}^m b_j w_j = 0$. Si l'on a une telle égalité, la minimalité de m implique que les b_j sont tous non nuls et, quitte à diviser par b_1, on peut supposer $b_1 = 1$. Pour tout $g \in J$, on a alors $0 = g(\sum b_j w_j) = \sum g(b_j) w_j$ donc aussi $\sum_{j=2}^h (g-1)(b_j) w_j = 0$ puisque $g(b_1) = b_1$. L'hypothèse de minimalité implique que les $(g-1)(b_j)$ sont tous nuls, donc que $b_j \in E$ pour tout j, d'où une contradiction. □

On dit qu'une B-représentation W de J est *triviale* si elle est isomorphe à B^h pour un entier h convenable. Pour toute B-représentation W de J, on voit que l'on a $\dim_E W^J \leq \dim_B W$; on a l'égalité si et seulement si la représentation est triviale ou encore si et seulement si ρ_W est bijective. Le foncteur $W \mapsto W^J$ induit une $\otimes$-équivalence entre la sous-catégorie tannakienne de $\mathrm{Rep}_B(J)$ dont les objets sont les représentations triviales et celle des E-espaces vectoriels de dimension finie.

Dans toute la suite du chapitre, K_∞ est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K contenue dans $\overline{K}$ et L son adhérence dans C. On pose $H_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$ et $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$. Comme au chapitre précédent, *on choisit un générateur topologique γ_0 de Γ. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on note K_r l'unique extension de K de degré p^r contenue dans K_∞ et on pose $\gamma_r = \gamma_0^{p^r}$; c'est un générateur topologique de $\Gamma_r = \mathrm{Gal}(K_\infty/K_r)$.* Rappelons (th.1.1) que $C^{H_K} = L$ et (prop.1.16) que K_∞ est la réunion des sous-K-espaces vectoriels de dimension finie de L, stables par Γ.

Soient Y une K_∞-représentation de Γ et $\{y_1, y_2, \ldots, y_h\}$ une base de Y sur K_∞. Les coefficients de la matrice dont les colonnes sont les composantes des $\gamma_0(y_j)$ sur cette base engendrent une extension finie K_r de K ; on appelle *degré de la base* l'entier r. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrices dont les colonnes sont les composantes des $\gamma_0^n(y_j)$ sur la base est encore à coefficients dans K_r. Comme $\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{Z}_p$ et K_r est complet, le fait que l'action de Γ sur Y soit continue implique que le sous-K_r-espace vectoriel de Y engendré par les y_j est stable par Γ.

Si Y est une K_∞-représentation de Γ, $L \otimes_{K_\infty} Y$ est de façon évidente une L-représentation de Γ. Si X est une L-représentation de Γ, $C \otimes_L X$ est une C-représentation de G_K. On obtient ainsi des $\otimes$-foncteurs

$$\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma) \to \mathrm{Rep}_L(\Gamma) \quad \text{et} \quad \mathrm{Rep}_L(\Gamma) \to \mathrm{Rep}_C(G_K) \ .$$

La théorie de Sen construit des foncteurs dans l'autre sens.

Théorème 2.2 ([Sen80], th.2). — *Toute C-représentation de H_K est triviale.*

Preuve : Il s'agit de prouver que, pour toute C-représentation W de H_K, l'application injective $\rho_B(W) : C \otimes_L W^{H_K} \to W$ est bijective.

Soit $\{w_1, w_2, \ldots, w_h\}$ une base de W sur C. L'application $f : H_K \to GL_h(C)$, qui à g associe la matrice dont la j-ième colonne est formée des composantes sur cette base de $g(w_j)$, est un 1-cocycle continu de H_K à valeurs dans $GL_h(C)$. Si l'on change de base et si b est la matrice de passage, le cocycle correspondant à la nouvelle base est donné par $f'(g) = bf(g)g(b^{-1})$. Comme l'ensemble pointé $H^1_{\text{cont}}(H_K, GL_h(C))$ est trivial (th.1.1, (ii)), on peut choisir les w_j pour qu'ils soient fixes par H_K. Si $w = \sum_{i=1}^h c_j w_j \in W$, on voit que $w \in W^{H_K}$ si et seulement si $c_j \in C^{H_K} = L$ (th.1.1, (i)). Alors W^{H_K} est le L-espace vectoriel de base les w_j et le théorème est clair. □

Corollaire 2.3. — *Pour toute C-représentation W de H_K, on a $H^1_{\text{cont}}(H_K, W) = 0$.*

En effet le théorème signifie que le foncteur $W \to W^{H_K}$ induit une équivalence entre la catégorie des C-représentations de H_K et la catégorie semi-simple des L-espaces vectoriels de dimension finie On a donc $H^1_{\text{cont}}(H_K, W) = \text{Ext}^1_{\text{Rep}_C(H_K)}(C, W) = 0$.

Théorème 2.4 ([Sen80], th.3). — *Soit X une L-représentation de Γ.Notons X_f la réunion des sous-K-espaces vectoriels de dimension finie de X stables par Γ. L'application L-linéaire*

$$L \otimes_{K_\infty} X_f \to X \ ,$$

déduite, par extension des scalaires, de l'inclusion de X_f dans X, est bijective.

Preuve : Soit $\{x_1, x_2, \ldots, x_h\}$ une base de X sur L. L'application $f : \Gamma \to GL_h(L)$, qui à γ associe la matrice dont la j-ième colonne est formée des composantes sur cette base de $\gamma(x_j)$, est un 1-cocycle continu de Γ à valeurs dans $GL_h(L)$. Si l'on change de base et si b est la matrice de passage, le cocycle correspondant à la nouvelle base est donné par $f'(\gamma) = bf(\gamma)\gamma(b^{-1})$. La surjectivité de l'application $H^1_{\text{cont}}(\Gamma, GL_h(K_\infty)) \to H^1_{\text{cont}}(\Gamma, GL_h(L))$ (th.1.2, (ii)) implique que l'on peut choisir les x_j pour que le sous-K_∞-espace vectoriel Y de X qu'ils engendrent soit stable par Γ. En particulier Y est une K_∞-représentation de Γ. Comme l'application L-linéaire $L \otimes_{K_\infty} Y \to X$ déduite de l'inclusion de Y dans X est bijective, il suffit pour achever la preuve du théorème de vérifier que $X_f = Y$.

Soit r le degré de la base des x_j. Pour tout entier $s \geq r$, le K_s-espace vectoriel engendré par les x_i est de dimension finie sur K et est stable par Γ. On en déduit que $Y \subset X_f$.

Pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe une matrice carrée $(a_{i,j}(\gamma))_{1 \leq i,j \leq h} \in GL_h(K_r)$ telle que $\gamma(x_j) = \sum_i a_{i,j}(\gamma)x_i$, pour tout j.

Soit maintenant $x = \sum_{i=1}^h c_i x_i$ avec les $c_i \in L$, un élément de X_f. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on peut écrire $\gamma(x) = \sum_{i=1}^h c_i(\gamma)x_i$, avec les $c_i(\gamma) \in L$. Le fait que $x \in X_f$ implique que le sous-K_r-espace vectoriel E de L engendré par les $c_i(\gamma)$, pour $1 \leq i \leq h$ et $\gamma \in \Gamma$ est de dimension finie.

Mais $\sum c_i(\gamma)x_i = \sum \gamma(c_j)\gamma(x_j) = \sum \gamma(c_j)a_{i,j)}(\gamma)x_i$. On en déduit que E est aussi le K_r-espace vectoriel engendré par les $\gamma(c_j)$, pour $\gamma \in \Gamma$ et $1 \leq j \leq h$. En particulier, E est stable par Γ, ce qui implique (prop.1.16) $E \subset K_\infty$. On a bien $c_j \in E \subset K_\infty$, pour tout j et $X_f \subset Y$. □

Le théorème 2.2 implique que le foncteur $W \mapsto W^{H_K}$ induit une $\otimes$-équivalence de la catégorie $\mathrm{Rep}_C(H_K)$ sur la catégorie des L-espaces vectoriels de dimension finie, le foncteur $Y \mapsto C \otimes_L Y$ étant un quasi-inverse. Les théorèmes 2.2 et 2.4 impliquent que les foncteurs

$$\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma) \to \mathrm{Rep}_L(\Gamma) \quad \text{et} \quad \mathrm{Rep}_L(\Gamma) \to \mathrm{Rep}_C(G_K)$$

définis plus haut sont des $\otimes$-équivalences de catégories : un quasi-inverse du premier est celui qui à la C-représentation W de G_K associe W^{H_K} ; un quasi-inverse du second est celui qui à X associe X_f.

2.2 – Etude des K_∞-représentations

Reprenons les notations du début du §1.2. Le caractère additif $\log \chi : G_K \to \mathbb{Z}_p$ se factorise à travers Γ et on note encore $\log \chi : \Gamma \to \mathbb{Z}_p$ le caractère additif de Γ ainsi obtenu. Remarquons que, si $\varepsilon_p = 1$ si $p \neq 2$ (resp. 2 si $p = 2$), on a $\log(\mathbb{Z}_p^*) = p^{\varepsilon_p}\mathbb{Z}_p$. On note r_K l'unique entier tel que $\log \chi(\Gamma) = p^{r_K}\mathbb{Z}_p$. On a $r_K \geq \varepsilon_p$ avec égalité lorsque K est absolument non ramifié.

Si s est un endomorphisme d'un K_∞-espace vectoriel de dimension finie Y, il existe un sous-groupe ouvert Γ_s de Γ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma_s$, la série $\exp(\log \chi(\gamma).s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(\log(\chi(\gamma)))^n}{n!} s^n$ converge dans l'anneau des endomorphismes de ce K_∞-espace vectoriel : En effet, soient $\{y_1, y_2, \ldots, y_h\}$ une base de Y sur K_∞ ; pour tout nombre rationnel m, notons Y_m le sous-$\mathcal{O}_{K_\infty}$-module de Y formé des éléments qui peuvent s'écrire sous la forme $\sum_{i=1}^{h} c_i y_i$, avec les $c_i \in K_\infty$ vérifiant $v_p(c_i) \geq m$; soit a un nombre rationnel tel que $s(Y_0)$ est contenu dans Y_a. Il est bien connu (et facile à vérifier) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_p(n!) = \frac{n - s(n)}{p-1}$ où $s(n)$ désigne la somme des chiffres de l'entier n écrit en base p. Si l'on prend $\Gamma_s = \Gamma_r$, avec r le plus petit entier ≥ 0 tel que $r + r_K + a > 1/(p-1)$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $\gamma \in \Gamma_s$, on a $\frac{(\log(\chi(\gamma)))^n}{n!} s^n(Y_0) \subset Y_{n(r + r_K - \frac{1}{p-1} + a)}$ et la série $\exp(\log \chi(\gamma).s)$ converge bien.

Proposition 2.5 ([Sen80], th.4). — *Soit Y une K_∞-représentation de Γ. Il existe un unique endomorphisme s du K_∞-espace vectoriel Y qui a la propriété que, pour tout $y \in Y$, il existe un sous-groupe ouvert Γ_y de Γ tel que*

$$\gamma(y) = \exp(\log \chi(\gamma).s)(y)$$

pour tout $\gamma \in \Gamma_y$. Le polynôme caractéristique de s est à coefficients dans K.

Preuve : Soient $\{y_1, y_2, \ldots, y_h\}$ une base de Y sur K_∞.

Si s et s' sont deux endomorphismes de Y ayant la propriété requise, on voit qu'il existe un sous-groupe-ouvert Γ_{r_0} de Γ tel que pour tout $\gamma \in \Gamma_{r_0}$, on a $\gamma(y_j) = \exp(\log \chi(\gamma).s)(y_j) = \exp(\log \chi(\gamma).s')(y_j)$. On a donc $\exp(\log \chi(\gamma).s) = \exp(\log \chi(\gamma).s')$, pour tout $\gamma \in \Gamma_{r_0}$, donc $s = s'$ et s, s'il existe, est bien unique.

Soit r_0 le degré de la base des y_j. Le sous-K_{r_0}-espace vectoriel Y_0 de Y engendré par les y_j est stable par Γ et l'action de Γ_{r_0} est linéaire. Pour tout $\gamma \in \Gamma_{r_0}$ suffisamment proche de 1 mais distinct de 1, l'endomorphisme $\log\gamma$ de Y_0 est bien défini et $s_0 = \frac{1}{\log\chi(\gamma)}\log\gamma$ ne dépend pas du choix de γ. Notons s l'unique endomorphisme du K_∞-espace vectoriel Y dont la restriction à Y_0 est s_0. Si $r \geq r_0$ est un entier suffisamment grand, pour tout $\gamma \in \Gamma_r$, l'automorphisme $\exp(\log\chi(\gamma).s)$ de Y est bien défini et, pour tout $y \in Y_0$, $\gamma(y) = \exp(\log\chi(\gamma).s)(y)$. Si maintenant $y = \sum_{i=1}^{h} c_i y_i \in Y$, avec les $c_i \in K_\infty$ et si K_{r_y} est l'extension de K_r engendrée par les c_i, on a $\gamma(y) = \exp(\log\chi(\gamma).s)(y)$, pour tout $\gamma \in \Gamma_{r_y}$ et s convient.

Soit a la matrice de s dans la base des y_j. Pour tout $\gamma \in \Gamma_r$, on a

$$(\gamma(y_1), \gamma(y_2), \ldots, \gamma(y_h)) = (y_1, y_2, \ldots, y_h)\exp(\log\chi(\gamma).a) \ .$$

En écrivant que $\gamma\gamma_0 = \gamma_0\gamma$, on en déduit que, pour tout $\gamma \in \Gamma_r$,

$$(\gamma(\gamma_0(y_1)), \gamma(\gamma_0(y_2)), \ldots, \gamma(\gamma_0(y_h)) = (\gamma_0(y_1), \gamma_0(y_2), \ldots, \gamma_0(y_h))\exp(\log\chi(\gamma).\gamma_0(a)) \ ,$$

donc que la matrice de s relativement à la base des $\gamma_0(y_j)$ est $\gamma_0(a)$. Les matrices $\gamma_0(a)$ et a sont donc semblables, ce qui implique que le polynôme caractéristique de a, qui est aussi celui de s a ses coefficients fixes par γ_0, donc dans K. □

Remarque : Le fait que le polynôme caractéristique de s soit à coefficients dans K signifie qu'il existe une base de Y sur K_∞ par rapport à laquelle la matrice de s est à coefficients dans K ([Sen80], th.5).

Comme dans l'introduction, pour tout corps E, on note $\mathcal{S}_E$ la catégorie suivante :

– un objet est un couple (Y, s) formé d'un E-espace vectoriel de dimension finie Y et d'un endomorphisme s de cet espace,

– un morphisme $f : (Y_1, s_1) \to (Y_2, s_2)$ est une application E-linéaire de Y_1 dans Y_2 telle que $s_2 \circ f = f \circ s_1$.

Cette catégorie a une structure de catégorie tannakienne sur E : l'objet unité est $(E, 0)$, on définit le produit tensoriel par $(Y_1, s_1) \otimes (Y_2, s_2) = (Y_1 \otimes_E Y_2, s_1 \otimes \mathrm{id}_{Y_2} + \mathrm{id}_{Y_1} \otimes s_2$ et le dual de (Y, s) est $(Y^*, -{}^t s)$, où Y^* est le E-espace vectoriel dual de Y et ${}^t s$ est la transposée de s.

Supposons maintenant que E est un corps contenant K_∞ (par exemple $E = K_\infty$ ou $E = C$). Soit Y une K_∞-représentation de Γ. Posons $Y_E = E \otimes_{K_\infty} Y$ et notons s_E le E-endomorphisme de Y_E déduit par extension des scalaires du K_∞-endomorphisme s de Y défini par la proposition 2.5. On peut considérer la correspondance

$$Y \mapsto (Y_E, s_E)$$

comme un $\otimes$-foncteur de la catégorie $\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma)$ dans $\mathcal{S}_E$.

PROPOSITION 2.6 (cf. [Sen80], th.6 et 7). — *Soient E un corps contenant K_∞ et Y_1, Y_2 deux K_∞-représentations de Γ.*

i) L'application E-linéaire naturelle

$$E \otimes_K \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma)}(Y_1, Y_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_E}((Y_{1,E}, s_E), (Y_{2,E}, s_E))$$

est un isomorphisme.

ii) Pour que Y_1 et Y_2 soient isomorphes comme K_∞-représentations de Γ, il faut et il suffit que $(Y_{1,E}, s_E)$ et $(Y_{2,E}, s_E)$ soient isomorphes comme objets de $\mathcal{S}_E$.

Preuve : Montrons (i) : Avec des notations évidentes, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma)}(Y_1, Y_2) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma)}(K_\infty, Y_1^* \otimes Y_2)$$

et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_E}(Y_{1,E}, Y_{2,E}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_E}(E, Y_{1,E}^* \otimes Y_{2,E})$, ce qui nous ramène au cas où $Y_1 = K_\infty$. Si l'on pose $Y = Y_2$, on a alors $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma)}(K_\infty, Y) = Y^\Gamma$ tandis que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_E}(E, Y_E) = \mathrm{Ker}\ s_E$. Il s'agit donc de prouver que l'application naturelle

$$\rho : E \otimes_K Y^\Gamma \to \mathrm{Ker}\ s_E$$

est bijective.

On voit qu'il suffit de prouver ce fait lorsque $E = K_\infty$. Quitte à remplacer Y par $\mathrm{Ker}\ s$, on peut supposer $s = 0$.

On sait que ρ est injective (prop.2.1). Soit $\{w_1, w_2, \ldots, w_h\}$ une base de Y sur K_∞. Soit K_{r_0} l'extension de K engendrée par les coefficients de la matrice dont les colonnes sont les composantes des $\gamma_0(w_j)$ sur la base des w_i. Le fait que $s = 0$ implique qu'il existe un entier r tel que $\gamma_r(w_j) = w_j$ pour tout j. Quitte a remplacer r par un entier plus grand, on peut supposer $r \geq r_0$. Le sous-K_r-espace vectoriel Y_r de Y engendré par les w_j est stable par Γ qui agit à travers le quotient $\mathrm{Gal}(K_r/K)$. Quand on écrit l'action de ce groupe sur les w_j, cela définit un 1-cocycle de $\mathrm{Gal}(K_r/K)$ à valeurs dans $GL_h(K_r)$. Comme $H^1(\mathrm{Gal}(K_r/K), GL_h(K_r)) = 1$ (cf., par exemple [CL], chap.X, prop.3), il existe une base de Y_r sur laquelle $\mathrm{Gal}(K_r/K)$ opère trivialement, i.e. une base de Y formée d'éléments fixes par Γ et ρ est bien surjective.

Compte-tenu de (i), l'assertion (ii) devient un cas particulier du lemme suivant :

Lemme 2.7. — *Soient Z_1 et Z_2 des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps E. Soit E_0 un sous-corps infini de E et L un sous-E_0-espace vectoriel du E-espace vectoriel $\mathcal{L}_E(Z_1, Z_2)$ des applications E-linéaires de Z_1 dans Z_2. Pour que le sous-E-espace vectoriel L_E de $\mathcal{L}_E(Z_1, Z_2)$ engendré par L contienne un isomorphisme de Z_1 sur Z_2, il faut et il suffit que L en contienne un.*

Preuve : Il est clair que la condition est suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Soit donc $f : Z_1 \to Z_2$ un élément de L_E qui est un isomorphisme. Le fait que f existe implique déjà que Z_1 et Z_2 ont même dimension h sur E.

Soit $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ une base du E-espace vectoriel L_E formée d'éléments de L. Choisissons une base de Z_1 et une base de Z_2 sur E et, pour $1 \leq j \leq n$, soit $A_j \in M_h(E)$ la matrice de f_j par rapport à ces bases. Soit $P(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \det(X_1A_1 + X_2A_2 + \ldots + X_nA_n) \in E[X_1, X_2, \ldots, X_n]$.

On peut écrire $f = \sum_{n=1}^{h} \lambda_n f_n$, avec des $\lambda_n \in E$ et le fait que f soit un isomorphisme implique que $P(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \neq 0$. Le polynôme P n'est donc pas identiquement nul. Comme le corps E_0 est infini, il existe donc $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in E_0$ tel que $P(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \neq 0$, ce qui signifie que l'application $\sum \mu_j f_j$ est un élément de L qui est un isomorphisme de Z_1 sur Z_2. □

Soit W une C-représentation de G_K. Alors W^{H_K} est une L-représentation de Γ et $(W^{H_K})_f$ une K_∞-représentation de Γ. On note $\Delta_{\mathrm{Sen}}(W)$ l'objet de $\mathcal{S}_E$ formé du K_∞-espace vectoriel sous-jacent à $(W^{H_K})_f$ et de l'endomorphisme de cet espace défini par la proposition 2.5, que l'on note $s_{W,f}$. On voit que l'on peut considérer Δ_{Sen} comme un foncteur (même un $\otimes$-foncteur) de $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ dans $\mathcal{S}_{K_\infty}$. Ce foncteur est exact et fidèle et la proposition précédente montre que la connaissance de $\Delta_{\mathrm{Sen}}(W)$ détermine W, vu comme C-représentation de G_K, à isomorphisme près. Si s_W désigne le C-endomorphisme de $W = C \otimes_{K_\infty} \Delta_{\mathrm{Sen}}(W)$ déduit par extension des scalaires de l'endomorphisme $s_{W,f}$, on voit aussi que (W, s_W), vu comme objet de $\mathcal{S}_C$, détermine encore W à isomorphisme près.

Remarque : Changement de base : Soient K' une extension de K munie d'une valuation discrète prolongeant celle de K et complet pour cette valuation, $\overline{K'}$ une clôture algébrique de K' contenant $\overline{K}$, ce qui fait que C s'identifie à un sous-corps du complété C' de $\overline{K'}$ pour la topologie p-adique. On a un homomorphisme naturel de $G_{K'} = \mathrm{Gal}(\overline{K'}/K')$ dans G_K. En particulier, si W est une C-représentation de G_K, le C'-espace vectoriel $W' = C' \otimes_C W$ peut être considéré comme une C'-représentation de $G_{K'}$. Avec des notations évidentes, on voit que $K'_\infty \supset K_\infty$ et que $\Delta_{\mathrm{Sen},K'}(W') = K'_\infty \otimes_{K_\infty} \Delta_{\mathrm{Sen}}(W)$, l'endomorphisme de Sen de $\Delta_{\mathrm{Sen},K'}(W')$ étant l'endomorphisme déduit de s par l'extension des scalaires $K_\infty \to K'_\infty$.

Un cas particulier de cette situation est celui où K' est un élément de l'ensemble $\mathcal{K}$ des sous-corps fermés K' de C contenant K tels que la restriction de la valuation à K' est encore discrète. Il revient au même de dire que K' est le complété d'une extension de K contenue dans $\overline{K}$ telle que la restriction de la valuation à cette extension est encore discrète.

Dans ce cas $C' = C$ et l'homomorphisme $G_{K'} \to G_K$ est injectif et identifie $G_{K'}$ à un élément de l'ensemble $\mathcal{H}$ des sous-groupes fermés H de G_K tels que $H \cap I_K$ est ouvert dans I_K (où $I_K \subset G_K$ est le sous-groupe d'inertie). Compte-tenu de cette identification, l'application $K' \mapsto G_{K'}$ est une bijection de $\mathcal{K}$ sur $\mathcal{H}$ (la bijection réciproque étant l'application $H \mapsto C^H$).

2.3 – Le point de vue de Colmez

Soit $\mathbb{Z}_p(1)$ le module de Tate du groupe multiplicatif, noté additivement. Fixons une fois pour toute un générateur t de ce $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang 1. On a donc $g(t) = \chi(g)t$, pour tout $g \in G_K$.

On note $\mathbb{Z}_p[\log t]$ l'anneau des polynômes en une indéterminée, notée $\log t$, à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$. Si $u = mt \in \mathbb{Z}_p(1)$, on pose $\log u = \log m + \log t$ (où $\log(p^r m_0) = \log m_0$ si $r \in \mathbb{Z}$

et $m_0 \in \mathbb{Z}_p^*$). Le groupe G_K opère de façon naturelle sur $\mathbb{Z}_p[\log t]$: c'est l'unique action $\mathbb{Z}_p$-linéaire compatible avec la structure d'anneau telle que $g(\log t) = \log \chi(g) + \log t$, pour tout $g \in G_K$.

Le couple $(\mathbb{Z}_p[\log t], \log)$ est solution d'un problème universel évident et, en particulier, sa construction est indépendante, à isomorphisme unique près, du choix de t. La construction de l'anneau B_{Sen} ci-dessous nécessite, elle, que l'on ait fait un choix de t. Toutefois, le lecteur remarquera que la construction du sous-anneau $B_{\mathrm{Sen},0}$ de B_{Sen} est indépendante de ce choix.

Avec Colmez [Co94], on note $B_{\mathrm{Sen}} = C\{\{\log t\}\}$ l'anneau des séries formelles à coefficients dans C, en l'indéterminée $\log t$, à rayon de convergence non nul. On note aussi $s : B_{\mathrm{Sen}} \to B_{\mathrm{Sen}}$ la dérivation $-\partial/\partial \log t$, i.e. on a $s(\sum_{n\geq 0} c_n(\log t)^n) = -\sum_{n\geq 1} nc_n(\log t)^{n-1}$.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on note $B_{\mathrm{Sen},r}$ le sous-anneau de B_{Sen} formé des $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\log t)^n$, avec les $c_n \in C$ vérifiant $v_p(c_n) + n(r_K + r)$ tend vers l'infini avec n (l'entier r_K a été défini au début du §2.2). C'est une sous-C-algèbre stable par s et $B_{\mathrm{Sen}} = \cup_{r\in\mathbb{N}} B_{\mathrm{Sen},r}$. Si $b \in C$ vérifie $v(b) \geq r_K + r$, alors, pour tout $\sum c_n(\log t)^n \in B_{\mathrm{Sen},r}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{m\in\mathbb{N}} c_{m+n} \begin{pmatrix} m+n \\ n \end{pmatrix} b^m$ converge dans C et $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(\log t + b)^n = \sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{m\in\mathbb{N}} c_{m+n} \begin{pmatrix} m+n \\ n \end{pmatrix} b^m)(\log t)^n \in B_{\mathrm{Sen},r}$.

Soit alors $G_{K,r}$ le sous-groupe ouvert de G_K image inverse de Γ_r. Le groupe $G_{K,r}$ opère semi-linéairement sur $B_{\mathrm{Sen},r}$ par

$$g(\sum c_n(\log t)^n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g(c_n)(\log t + \log(\chi(g))^n \ .$$

L'action de $G_{K,r}$ commute à celle de s.

Pour toute C-représentation W de G_K et tout $r \in \mathbb{N}$, posons

$$D_{\mathrm{Sen},r}(W) = (B_{\mathrm{Sen},r} \otimes_C W)^{G_{K,r}} \ .$$

Si l'on fait agir s sur $B_{\mathrm{Sen},r} \otimes_C W$ par $s(b\otimes w) = s(b)\otimes w$, cette action commute à celle de $G_{K,r}$ et on note $s_{W,r}$ le K_r-endomorphisme de $D_{\mathrm{Sen},r}(W)$ qui est la restriction de s à ce K_r-espace vectoriel. Pour tout r, on a une inclusion évidente $D_{\mathrm{Sen},r}(W) \subset D_{\mathrm{Sen},r+1}(W)$ et $s_{W,r}$ est la restriction à $D_{\mathrm{Sen},r}(W)$ de $s_{W,r+1}$. On pose $D_{\mathrm{Sen},\infty}(W) = \cup_{r\in\mathbb{N}} D_{\mathrm{Sen},r}(W) \subset B_{\mathrm{Sen}} \otimes_C W$. C'est un K_∞-espace vectoriel. On note $s_{W,\infty}$ l'unique K_∞-endomorphisme de $D_{\mathrm{Sen},\infty}(W)$ tel que, pour tout r, sa restriction à $D_{\mathrm{Sen},r}(W)$ est $s_{W,r}$.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'anneau $B_{\mathrm{Sen},r}$ est intègre et l'action de $G_{K,r}$ s'étend à son corps des fractions Frac $B_{\mathrm{Sen},r}$.

Proposition 2.8 (Colmez, [Co94], th.2). — *i) Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a $(B_{\mathrm{Sen},r})^{G_{K,r}} = (\mathrm{Frac}\ B_{\mathrm{Sen},r})^{G_{K,r}} = K_r$.*

ii) Soit W une C-représentation de G_K. On a $\dim_{K_\infty} D_{\mathrm{Sen},\infty}(W) = \dim_C W$ *(*et donc $(D_{\mathrm{Sen},\infty}(W), s_{W,\infty})$ est un objet de $\mathcal{S}_{K_\infty}$*). Soit* $\mathrm{Col}_W : \Delta_{\mathrm{Sen}}(W) \to B_{\mathrm{Sen}} \otimes_C W$ *l'application qui envoie x sur* $\exp(-(\log t)s_{W,f})(x) \in B_{\mathrm{Sen}} \otimes_C W$*. Alors* Col_W *induit un isomorphisme, dans la catégorie $\mathcal{S}_{K_\infty}$, de $(\Delta_{\mathrm{Sen}}(W), s_{W,f})$ sur $(D_{\mathrm{Sen},\infty}(W), s_{W,\infty})$.*

Preuve : (i) Pour tout sous-corps E de C, notons $E\{\{\log t\}\}_r$ l'anneau des séries de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} x_n(\log t)^n$ avec les $x_n \in E$ vérifiant $v_p(x_n)+n(r_K+r)$ tend vers l'infini avec n. En particulier, $B_{\mathrm{Sen},r} = C\{\{\log t\}\}_r$.

On a $K_r \subset (B_{\mathrm{Sen},r})^{G_{K,r}}$. Soit $b \in (\mathrm{Frac}\ B_{\mathrm{Sen},r})^{G_{K,r}}$. On veut montrer que $b \in K_r$ et il est clair qu'il suffit de prouver que $b \in K_\infty$, i.e. on peut remplacer r par un entier plus grand. Comme l'anneau B_{Sen}, qui est la réunion des $B_{\mathrm{Sen},s}$ pour $s \in \mathbb{N}$, est un anneau de valuation discrète (non complet) admettant $\log t$ comme uniformisante, ceci nous permet de supposer que b peut s'écrire $b = (\log t)^{-m}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\log t)^n$, avec $m \in \mathbb{N}$, les $c_n \in C$ vérifiant $v_p(c_n) + n(r_K + r)$ tend vers l'infini avec n et $c_0 \neq 0$ si $m \neq 0$.

Pour tout $g \in H_K$, $g((\log t)^{-m}\sum c_n(\log t)^n) = (\log t)^{-m}\sum g(c_n)(\log t)^n$, donc chaque $c_n \in C^{H_K} = L$ et $\sum c_n(\log t)^n \in L\{\{\log t\}\}_r$.

Pour tout entier $s \geq r$, soit γ_s un générateur topologique de Γ_s et posons $a_s = \log(\chi(\gamma_s))$. C'est un élément non nul de $\mathbb{Z}_p$. Le groupe Γ_r opère sur $K_s\{\{\log t\}\}_r$. Si $\sum x_n(\log t)^n \in K_s\{\{\log t\}\}_r$, on a $\gamma_s(\sum x_n(\log t)^n) = \sum x_n(\log t + a_s)^n$, ce qui fait que $(K_s\{\{\log t\}\}_r)^{\Gamma_s} = K_s$, donc $(K_s\{\{\log t\}\}_r)^{\Gamma_r} = K_r$.

On a $\gamma_r(b) = (\log t + a_r)^{-m}\sum c_n(\log t + a_r)^n$ et on doit avoir

$$(\log t)^m \sum c_n(\log t + a_r)^n = (\log t + a_r)^m \sum c_n(\log t)^n \ .$$

Si m était non nul, le terme constant du membre de gauche serait nul, contrairement au terme constant du membre de droite qui est $a^m c_0$, donc $m = 0$.

Rappelons (prop.1.15) que, pour tout s, on dispose d'une application continue, Γ-équivariante $\hat{t}_{K_s} : L \to K_s$. Quitte à remplacer r par un entier plus grand, on peut supposer l'extension K_∞/K_r régulière (prop.1.11). Comme, pour tout entier $s \geq r$ et tout $x \in L$, on a $v_p(\hat{t}_{K_s}(x)) \geq v_p(x) - p/(p-1)$ (prop.1.15,(iii)) , on peut définir une application $t_s : L\{\{\log t\}\}_r \to K_s\{\{\log t\}\}_r$, en posant $t_s(\sum x_n(\log t)^n) = \sum \hat{t}_{K_s}(x_n)(\log t)^n$. On voit que t_s est Γ_r-équivariante. Par conséquent $t_s(\sum c_n(\log t)^n) \in (K_s\{\{\log t\}\}_r)^{G_{K,r}} = K_r$, ce qui implique que, pour tout $n \geq 1$, on a $t_s(c_n) = 0$ pour tout $s \geq r$, ou encore (prop.1.15, (iv)) que $c_n = 0$. Donc $b = c_0$ et l'assertion résulte de ce que $C^{G_{K,r}} = K_r$ (th.1.2).

(ii) D'après la proposition 2.1, l'application naturelle

$$B_{\mathrm{Sen},r} \otimes_{K_r} D_{\mathrm{Sen},r}(W) \to B_{\mathrm{Sen},r} \otimes_C W$$

est injective, donc $\dim_{K_r} D_{\mathrm{Sen},r}(W) \leq \dim_C W$; par conséquent, $\dim_{K_\infty} D_{\mathrm{Sen},\infty}(W) \leq \dim_C W$.

Il est clair que Col_W est une application K_∞-linéaire injective. Par ailleurs, soit $\{w_1, w_2, \ldots, w_h\}$ une base de $\Delta_{\mathrm{Sen}}(W)$ sur K_∞. Il existe un entier r tel que le sous-K_r-espace vectoriel Δ_r engendré par les w_j est stable par $s_{W,f}$ et Γ_r et que, si

$\gamma \in \Gamma_r$, alors l'action de γ sur Δ_r est l'endomorphisme $\exp(\log(\chi(\gamma))s)$, si s désigne la restriction de $s_{W,f}$ à Δ_r. On voit alors que $\mathrm{Col}_W(\Delta_r) \subset D_{\mathrm{Sen},r}(W)$. On en déduit que $\dim_{K_r} D_{\mathrm{Sen},r}(W) = \dim_{K_\infty} D_{\mathrm{Sen},\infty}(W) = h = \dim_C W$ et que Col_W est un isomorphisme de $\Delta_{\mathrm{Sen}}(W)$ sur $D_{\mathrm{Sen},\infty}(W)$. Enfin le fait que, dans cet isomorphisme l'endomorphisme $s_{W,f}$ de $D_{\mathrm{Sen}}(W)$ correspond à l'endomorphisme $s_{W,\infty}$ de $D_{\mathrm{Sen},\infty}(W)$ est immédiat. □

2.4 – Quelques rappels sur les groupe pro-algébriques commutatifs

Dans ce paragraphe, E est un corps de caractéristique 0, $\overline{E}$ est une clôture algébrique de E et $G_E = \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{E}}/\mathrm{E})$.

Si $\mathbb{G}$ est un groupe pro-algébrique affine sur E, on note $\mathcal{O}_E(\mathbb{G})$ son algèbre affine. On fait opérer $\mathbb{G}$ sur $\mathcal{O}_E(\mathbb{G})$ par *translation à gauche*, i.e., si $f \in \mathcal{O}_E(\mathbb{G})$ et $g, h \in \mathbb{G}$, on convient que $(gf)(h) = f(g^{-1}h)$.

Il revient au même de se donner un *groupe pro-algébrique multiplicatif* $\mathbb{T}^m$ sur E ou un G_E-module discret X (i.e. un groupe abélien muni d'une action linéaire discrète de G_E) : à $\mathbb{T}^m$, on associe son groupe des caractères

$$X = X(\mathbb{T}^m) = \mathrm{Hom}_{\overline{E}}(\mathbb{T}^m \times \overline{E}, \mathbb{G}_m)$$

que nous notons multiplicativement.

Se donner une action de $\mathbb{T}^m \times \overline{E}$ sur un $\overline{E}$-espace vectoriel $\overline{V}$ revient à se donner une graduation indexée par X, $\overline{V} = \oplus_{x\in X} \overline{V}_x$: on a $g(v) = x(g)v$ si $g \in \mathbb{G}$ et $v \in \overline{V}_x$. Se donner une action de $\mathbb{T}^m$ sur un E-espace vectoriel V revient à se donner une graduation $\overline{V} = \oplus_{x\in X} \overline{V}_x$ de $\overline{V} = \overline{E} \otimes_E V$ telle que $\gamma(\overline{V}_x) = \overline{V}_{\gamma(x)}$ si $\gamma \in G_E$ et $x \in X$ (on a muni $\overline{V}$ de l'action semi-linéaire naturelle de G_E).

Les *poids de la représentation* V sont les $x \in X$ tels que $V_x \neq 0$.

L'algèbre affine de $\mathbb{T}^m \times \overline{E}$ est l'algèbre $\overline{E}[X]$ du groupe X à coefficients dans $\overline{E}$. On a donc $\overline{E}[X] = \oplus_{x\in X} \overline{E}x$. On prendra garde que, pour tout $x \in X$, $(\overline{E}[X])_x = \overline{E}x^{-1}$, autrement dit la représentation $(\overline{E}[X])_x$ a un seul poids et celui-ci est x^{-1}. Enfin, le groupe G_E opère semi-linéairement sur $\overline{E}[X]$ et on a $\mathcal{O}_E(\mathbb{T}) = (\overline{E}[X])^{G_E}$.

Se donner une action du groupe additif $\mathbb{G}_a$ sur un E-espace vectoriel V revient à se donner un endomorphisme nilpotent ν de V (alors $\lambda \in E = \mathbb{G}_a(E)$ agit sur V via $\exp(\lambda\nu)$). Si l'on note u la coordonnée canonique de $\mathbb{G}_a$ (un élément de $\mathcal{O}_E(\mathbb{G}_a)$ peut être vu comme une fonction polynomiale de E dans E et u est l'identité sur E), alors $\mathcal{O}_E(\mathbb{G}_a) = E[u]$ et l'endomorphisme ν sur $E[u]$ est $-\frac{\partial}{\partial\nu}$.

Posons $\mathbb{T} = \mathbb{T}^m \times \mathbb{G}_a$. Se donner une action de $\mathbb{T}$ sur un E-espace vectoriel V revient à se donner

– une action de $\mathbb{T}^m$, donc une décomposition de $\overline{V} = \overline{E} \otimes_E V$ en somme directe $V = \oplus_{x\in X} \overline{V}_x$ telle que $\gamma(\overline{V}_x) = \overline{V}_{\gamma(x)}$ si $\gamma \in G_E$ et $x \in X$,

– une action de $\mathbb{G}_a$, donc un endomorphisme nilpotent ν de V,

ces deux actions commutant, ce qui signifie, que, si on note encore ν l'endomorphisme de $\overline{V}$ déduit de ν par l'extension des scalaires, chaque $\overline{V}_x$ est stable par ν.

Si X' (resp. X'') est un sous-groupe (resp. un quotient) de X stable par G_E, le groupe multiplicatif $\mathbb{T}^m_{X'}$ (resp. $\mathbb{T}^m_{X''}$) de groupe des caractères X' (resp. X'') s'identifie à un quotient (resp. un sous-groupe) de $\mathbb{T}^m$ et tout quotient (resp. tout sous-groupe) est de ce type. De même,

– les quotients de $\mathbb{T}$ sont d'une part les $\mathbb{T}^m_{X'}$ et d'autre part les $\mathbb{T}_{X'} = \mathbb{T}^m_{X'} \times \mathbb{G}_a$ pour X' sous-groupe de X stable par G_E ;

– les sous-groupes de $\mathbb{T}^m$ sont d'une part les $\mathbb{T}^m_{X''} \times \mathbb{G}_a$ et d'autre part les $\mathbb{T}^m_{X''}$ pour X'' quotient de X stable par G_E.

Nous notons $\mathbb{S}^m_E$ le groupe $\mathbb{T}^m$ de groupe des caractères $\overline{E}$ avec action naturelle de G_E et $\mathbb{DR}^m_E$ le sous-groupe correspondant au groupe des caractères $\overline{E}/\mathbb{Z}$. On pose $\mathbb{S}_E = \mathbb{S}^m_E \times \mathbb{G}_a$ et on note $\mathbb{DR}_E$ son sous-groupe $\mathbb{DR}^m_E \times \mathbb{G}_a$. Remarquons que, pour toute extension algébrique F de E, $\mathbb{S}_F$ s'identifie à $\mathbb{S}_E \times_E F$ et $\mathbb{DR}_F$ à $\mathbb{DR}_E \times_E F$.

En fait le groupe $\mathbb{S}_E$ s'identifie au groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre tautologique de la catégorie $\mathcal{S}_E$ introduite plus haut. De façon terre à terre, si V est un E-espace vectoriel de dimension finie muni d'un endomorphisme s, on obtient une action de $\mathbb{S}_E$ sur V en procédant ainsi : on écrit $s = s_0.s_u$, avec s_0 semi-simple, s_u unipotent et $s_0 s_u = s_u s_0$ et on note encore s_0 l'endomorphisme du $\overline{E}$-espace vectoriel $\overline{V} = \overline{E} \otimes_E V$ déduit de s_0 par extension des scalaires ; alors

– pour tout $\alpha \in \overline{E}$, le sous-espace $\overline{V}_\alpha$ de $\overline{V}$ est le sous-espace propre correspondant à la valeur-propre α de s_0 ;

– l'endomorphisme nilpotent ν de V est $\log s_u$.

Cette construction est fonctorielle en V, envoie l'objet-unité sur l'objet-unité, commute au produit tensoriel et à la formation du dual. Le résultat suivant est évident :

Proposition 2.9. — *La construction ci-dessus induit une $\otimes$-équivalence entre $\mathcal{S}_E$ et la catégorie* $\mathrm{Rep}_E(\mathbb{S}_E)$ *des représentations E- linéaires de dimension finie de $\mathbb{S}_E$.*

Comme cette équivalence envoie le foncteur fibre tautologique de la première catégorie sur celui de la seconde, elle permet d'identifier le groupe $\mathbb{S}_E$ au groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre tautologique de la catégorie $\mathcal{S}_E$.

Dans la suite, on note $\mathcal{B}^m_E$ (resp. $\mathcal{B}_E$) l'algèbre affine du groupe $\mathbb{S}^m_E$ (resp. $\mathbb{S}_E$). On convient de noter $(t^{(\alpha)})_{\alpha \in \overline{E}}$ le groupe additif de $\overline{E}$ noté multiplicativement de sorte que ces $t^{(\alpha)}$ forment une base de $\mathcal{B}^m_{\overline{E}}$ sur $\overline{E}$ et que

$$\mathcal{B}^m_E = \{\sum b_\alpha t^{(\alpha)} \in \mathcal{B}^m_{\overline{E}} \mid b_{g(\alpha)} = g(b_\alpha) \text{ pour } g \in G_E \text{ et } \alpha \in \overline{E}\} \ .$$

On convient de noter $\log t$ la coordonnée canonique de $\mathbb{G}_a$, de sorte que $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}^m_E[\log t]$, algèbre des polynômes en l'indéterminée $\log t$ à coefficients dans $\mathcal{B}_E$.

Pour tout sous-groupe du groupe additif X de $\overline{E}$ stable par G_E, on pose $\mathbb{S}^m_{E,X} = (\mathbb{S}_E)^m_X$ (resp. $\mathbb{S}_{E,X} = (\mathbb{S}_E)_X = \mathbb{S}^m_{E,X} \times \mathbb{G}_a$) et on note $\mathcal{B}^m_{E,X}$ (resp. $\mathcal{B}_{E,X}$) son algèbre affine. Tout élément de $\mathcal{B}^m_X$ s'écrit donc, d'une manière et d'une seule sous la forme $\sum_{\alpha \in X} b_\alpha t^{(\alpha)}$

avec les b_α presque tous nuls vérifiant $g(b_\alpha) = b_{g(\alpha)}$ pour $g \in G_E$ et $\alpha \in X$. On a $\mathcal{B}_{E,X} = \mathcal{B}^m_{E,X}[\log t]$.

2.5 – Le point de vue algébrique

Nous nous proposons d'identifier $\mathcal{B}_K$ à une sous-K-algèbre de B_{Sen}. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'anneau $\mathcal{B}_{K,r} = \mathcal{B}_K \cap B_{\mathrm{Sen},r}$ sera stable par $G_{K,r}$ (le groupe $G_{K,r}$ va agir sur $\mathcal{B}_{K,r}$, de façon non triviale, via son quotient $\Gamma_r = \mathrm{Gal}(K_\infty/K_r)$). Pour toute C-représentation W de G_K, $D_{\mathrm{Sen},r}(W)$ va s'identifier à $(\mathcal{B}_{K,r} \otimes_K W)^{G_{K,r}}$.

Pour cela, il suffit de reprendre les notations ci-dessus et de poser, pour tout $\alpha \in \overline{K}$

$$t^{(\alpha)} = \exp(\alpha \log t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (\log t)^n \ .$$

Alors $\mathcal{B}_{\overline{K}}$ s'identifie à la sous-$\overline{K}$-algèbre de B_{Sen} dont une base, en tant que $\overline{K}$-espace vectoriel est formée des $t^{(\alpha)}(\log t)^j$, pour $\alpha \in \overline{K}$ et $j \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{B}_K$ s'identifie au sous-anneau de B_{Sen} formé des éléments qui s'écrivent sous la forme

$$\sum_{\alpha \in \overline{K}, j \in \mathbb{N}} \lambda_{\alpha,j} t^{(\alpha)} (\log t)^j$$

avec les $\lambda_{\alpha,j} \in \overline{K}$ presque tous nuls et vérifiant $g(\lambda_{\alpha,j}) = \lambda_{g(\alpha),j}$ pour tout $g \in G_K$, $\alpha \in \overline{K}$ et $j \in \mathbb{N}$ (et une telle écriture est unique). On voit aussi que, par extension des scalaires, $C \otimes_K \mathcal{B}_K$ s'identifie à la sous-C-algèbre de B_{Sen} dont une base sur C est formée des $t^{(\alpha)}(\log t)^j$ pour $\alpha \in \overline{K}$ et $j \in \mathbb{N}$.

L'action de $\mathbb{S}_K$ sur $\mathcal{B}_K$ par translation à gauche correspond par la proposition 2.9 à une application K-linéaire de $\mathcal{B}_K$ dans lui-même. On voit que c'est la K-dérivation, restriction à $\mathcal{B}_K$ de la C-dérivation $s = -\partial/\partial \log t$ de B_{Sen}. On a $s(\log t) = -1$ et $s(t^{(\alpha)}) = -\alpha t^{(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \overline{K}$.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, notons $\mathfrak{a}_r$ le sous-$\mathcal{O}_{\overline{K}}$-module de $\overline{K}$ formé des α vérifiant $v_p(\alpha) > -r - r_K + \frac{1}{p-1}$. Rappelons que, pour tout entier $n > 0$, si $s(n)$ désigne la somme des chiffres de n écrit en base p, on a $v_p(n!) = (n - s(n))/(p-1)$. Un petit calcul montre que, si $\alpha \in \overline{K}$ et $r \in \mathbb{N}$, alors $t^{(\alpha)} \in B_{\mathrm{Sen},r}$ si et seulement si $\alpha \in \mathfrak{a}_r$. On en déduit que $\mathcal{B}_{K,r} = \mathcal{B}_K \cap B_{\mathrm{Sen},r}$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{B}_K$ qui lorsqu'on les écrit sous la forme ci-dessus vérifient $\lambda_{\alpha,j} = 0$ si $\alpha \notin \mathfrak{a}_r$. C'est l'algèbre affine du quotient $\mathbb{S}_{K,\mathfrak{a}_r}$ de $\mathbb{S}_K$ et on a $\mathbb{S}_K = \varprojlim_{r \in \mathbb{N}} \mathbb{S}_{K,r}$.

Si $b = \sum \lambda_{\alpha,j} t^{(\alpha)} (\log t)^j \in \mathcal{B}_{K,r}$, on voit que pour tout $h \in G_{K,r}$,

$$\begin{gathered} h(b) = \sum h(\lambda_{\alpha,j}) \exp(h(\alpha) \log \chi(h)) t^{(h(\alpha))} (\log \chi(h) + \log t)^j = \\ \sum \lambda_{h(\alpha),j} \exp(h(\alpha) \log \chi(h)) t^{(h(\alpha))} (\log \chi(h) + \log t)^j = \\ \sum \lambda_{\alpha,j} \exp(\alpha \log \chi(h)) t^{(\alpha)} (\log \chi(h) + \log t)^j \in \mathcal{B}_{K,r} \ . \end{gathered}$$

En outre, $h(b) = b$ si $b \in H_K$, ce qui fait que $G_{K,r}$ agit sur $\mathcal{B}_{K,r}$ via son quotient Γ_r.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, $C \otimes_K \mathcal{B}_{K,r}$ s'identifie à la sous-C-algèbre de $B_{\mathrm{Sen},r}$ dont une base sur C est formée des $t^{(\alpha)}(\log t)^j$, avec $\alpha \in \mathfrak{a}_r$ et $j \in \mathbb{N}$.

Soit alors W une C-représentation de G_K. On a $\mathcal{B}_{K,r} \otimes_K W = (C \otimes_K \mathcal{B}_{K,r}) \otimes_C W \subset B_{\mathrm{Sen},r} \otimes_C W$, pour tout $r \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{B}_K \otimes_K W = (C \otimes_K \mathcal{B}_K) \otimes_C W \subset B_{\mathrm{Sen}} \otimes_C W$. En outre $\mathbb{S}_K$ opère sur $\mathcal{B}_K \otimes_K W$ (avec des conventions évidentes, $\sigma(b \otimes w) = \sigma(b) \otimes w$) ; comme cette action est K_∞-linéaire, cela définit en fait une action de $\mathbb{S}_{K_\infty}$. Chaque $\mathcal{B}_{K,r} \otimes W$ est stable par $\mathbb{S}_{K_\infty}$ qui opère via son quotient $\mathbb{S}_{K_\infty,\mathfrak{a}_r}$.

Proposition 2.10. — *Soit W une C-représentation de G_K.*
i) Pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'inclusion

$$(\mathcal{B}_{K,r} \otimes_K W)^{G_{K,r}} \subset D_{\mathrm{Sen},r}(W)$$

déduite de l'inclusion de $\mathcal{B}_{K,r} \otimes_K W$ dans $B_{\mathrm{Sen},r} \otimes_C W$ est une égalité.
*ii) Le K_∞-espace vectoriel $D_{\mathrm{Sen},\infty}(W)$ est alors un sous-K_∞-espace vectoriel de $\mathcal{B}_K \otimes_K W$ stable par $\mathbb{S}_{K_\infty}$; l'action de $\mathbb{S}_{K_\infty}$ sur $D_{\mathrm{Sen},\infty}(W)$ que l'on obtient ainsi coïncide avec celle qui est définie (*prop.2.9*) par l'endomorphisme $s_{W,\infty}$.*

Preuve : Le fait que tout élément de $D_{\mathrm{Sen},\infty}(W)$ soit de la forme $\exp(-\log t)s_{W,f}))(x)$ avec $x \in \Delta_{\mathrm{Sen}}(W) \subset W$ (prop.2.7) implique que $D_{\mathrm{Sen},\infty}(W) \subset C[(t^{(\alpha)}]_{\alpha \in \overline{K}}[\log t] \otimes_C W = (C \otimes_K \mathcal{B}_K) \otimes_C W = \mathcal{B}_K \otimes_K W$. L'assertion (i) résulte alors de ce que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a $B_{\mathrm{Sen},r} \cap (C \otimes_K \mathcal{B}_K) = C \otimes_K \mathcal{B}_{K,r}$.

L'assertion (ii) est alors une conséquence immédiate de ce que l'action de $\mathbb{S}_K$ sur $\mathcal{B}_K$ correspond à l'application K-linéaire de $\mathcal{B}_K$ dans lui-même qui est la restriction à $\mathcal{B}_K$ de la dérivation $s = -\partial/\partial \log t$ (cf. plus haut). □

2.6 – Classification des C-représentations

Soit W une C-représentation de G_K. On appelle *poids de Sen de* W l'ensemble des valeurs propres de $s_{W,\infty}$ (ou de $s_{W,f}$, ou de s_W, cela revient au même) dans $\overline{K}$. Le fait que le polynôme caractéristique de $s_{W,\infty}$ soit à coefficients dans K signifie que cet ensemble est stable par G_K.

Soit X une partie de $\overline{K}$ stable par G_K. On dit qu'une C-représentation W de G_K est *de type S_X* si ses poids de Sen sont dans X. On dit que W est *de type S_X^m* si en outre $s_{W,\infty}$ est semi-simple.

Lorsque X est un sous-groupe de G_K, dire qu'une C-représentation W de G_K est de type S_X (resp. de type S_X^m) revient à dire que $\mathbb{S}_{K_\infty}$ agit sur $D_{\mathrm{Sen},\infty}(W)$ à travers son quotient $\mathbb{S}_{K_\infty,X}$ (resp. $\mathbb{S}_{K_\infty,X}^m$).

L'énoncé suivant est évident :

Proposition 2.11. — *Soit X un sous-groupe de $\overline{K}$ stable par G_K. La sous-catégorie pleine* $\mathrm{Rep}_{C,X}(G_K)$ *(resp.*$\mathrm{Rep}_{C,X}^m(G_K)$*) de* $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ *dont les objets sont les C-représentations de G_K qui sont de type S_X (resp. de type S_X^m) est une sous-catégorie tannakienne.*

La catégorie $\mathrm{Rep}_{C,X}(G_K)$ *est stable par extension et* $\mathrm{Rep}^m_{C,X}(G_K)$ *est la sous-catégorie pleine de* $\mathrm{Rep}_{C,X}(G_K)$ *dont les objets sont ceux qui sont semi-simples.*

Soient $r \in \mathbb{N}$ et X un sous-groupe de $\mathfrak{a}_r$ stable par G_K. On a $\mathcal{B}^m_{K,X} \subset \mathcal{B}_{K,X} \subset B_{\mathrm{Sen},r}$. Si l'on pose $B^m_X = C \otimes_K \mathcal{B}^m_{K,X}$ et $B_X = C \otimes_K \mathcal{B}_{K,X}$, on a

$$B^m_X = \oplus_{\alpha \in X} C t^{(\alpha)} \text{ et } B_X = B^m_X[\log t] \ .$$

On a $(B^m_X)^{G_{K,r}} = (B_X)^{G_{K,r}} = K_r$. Pour toute C-représentation W de G_K, les K_r-espace vectoriels $D_{X,r}(W) = (\mathcal{B}_{K,X} \otimes_K W)^{G_{K,r}} = (B_X \otimes_C W)^{G_{K,r}}$ et $D^m_{X,r}(W) = (\mathcal{B}^m_{K,X} \otimes_K W)^{G_{K,r}} = (B^m_X \otimes_C W)^{G_{K,r}}$ sont de dimension finie inférieure ou égale à la dimension de W sur C. Les applications évidentes

$\rho_{X,r}(W) : B_X \otimes_{K_r} D_{X,r}(W) \to B_X \otimes_C W$ et $\rho^m_{X,r}(W) : B^m_X \otimes_{K_r} D^m_{X,r}(W) \to B^m_X \otimes_C W$ sont injectives. La représentation W est de type S_X (resp. de type S^m_X) si et seulement si $\dim_{K_r} D_{X,r}(W)$ (resp. $\dim_{K_r} D^m_{X,r}(W)) = \dim_C W$, ce qui se produit si et seulement si $\rho_{X,r}(W)$ (resp. $\rho^m_{X,r}(W)$) est bijective.

Il est maintenant facile de donner une classification complète à isomorphisme près des C-représentations de G_K.

Pour tout entier $d \geq 1$, notons $\mathbb{Z}_p(0;d)$ le sous-$\mathbb{Z}_p$-module de $\mathcal{B}_{K,\{0\}}$ formé des polynômes en $\log t$ de degré $< d$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$. Il est libre de rang d et stable par G_K.

Les représentations à poids de Sen 0, ou encore de type $S_{\{0\}}$, correspondent aux représentations de $\mathbb{G}_a$. On voit donc qu'à isomorphisme près, il y a un et un seul indécomposable de poids 0 de dimension d sur C qui est $C^K(0;d) = C \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(0;d)$.

Notons $\mathcal{C}(\overline{K})$ l'ensemble des classes de conjugaison de $\overline{K}$ (i.e. des orbites de $\overline{K}$ sous l'action de G_K).

Pour tout objet indécomposable de $\mathrm{Rep}_C(G_K)$, il existe un unique $A \in \mathcal{C}(\overline{K})$ tel que cet objet est de type S_A.

Soient W un objet simple de $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ et A l'unique classe de conjugaison de $\overline{K}$ telle que W est de type S_A. Alors, pour tout entier $d \geq 1$, $W \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(0;d)$ est un objet indécomposable de type S_A. Inversement une C-représentation W' de G_K est un indécomposable de type S_A si et seulement s'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ (nécessairement unique) tel que $W' \simeq W \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(0;d)$ et alors W' est simple si et seulement si $d = 1$.

Pour obtenir une classification complète des C-représentations de G_K, il suffit donc de rechercher, pour tout $A \in \mathcal{C}(\overline{K})$ si oui ou non il existe un objet simple de $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ de type S_A. Nous allons voir que la réponse est toujours oui en construisant effectivement un tel objet.

Mais auparavant, commençons par un préliminaire sur les algèbres simples centrales.

Soient F un corps commutatif, E un sous-corps de F, E^s une clôture séparable de E, $G_E = \mathrm{Gal}(E^s/E)$, $\eta : G_E \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ un homomorphisme continu et $b \in F$ un élément non nul. A ces données nous allons associer une F-algèbre $\Lambda_{E,F}(\eta, b)$.

Notons E' le sous-corps de E^s formé des éléments fixés par le noyau de η, N le degré de l'extension cyclique E'/E et σ le générateur de $\mathrm{Gal}(E'/E)$ tel que, si $\hat{\sigma}$ est un relèvement de η dans G_E, alors $\eta(\hat{\sigma}) = 1/N \bmod \mathbb{Z}$.

On note alors $\Lambda_{E,F}(\eta, b)$ la $E' \otimes_E F$-algèbre associative et unitaire (mais non commutative si $N > 1$) engendrée par un élément c soumis aux relations

$$c^N = 1 \otimes b \text{ et } c(u \otimes x) = (\sigma(u) \otimes x)c \text{ si } u \in E' \text{ et } x \in F\ .$$

Proposition 2.12. — *L'algèbre $\Lambda_{E,F}(\eta, b)$ est une algèbre simple centrale de centre F et de dimension N^2 sur son centre. Toute extension F' de F telle qu'il existe un E-plongement de E' dans F' neutralise $\Lambda_{E,F}(\eta, b)$.*

Il est clair que c'est une algèbre contenant F dans son centre et de rang N^2 sur son centre. Il suffit donc de montrer que s'il existe un E-plongement ι de E' dans F, alors on peut fabriquer un homomorphisme (de F-algèbres) de $\Lambda_{E,F}(\eta, b)$ dans l'anneau $M_N(F)$ des matrices carrées à N-lignes et N-colonnes à coefficients dans F. Si l'on utilise ι pour identifier E' à un sous-corps de F, on voit qu'il suffit d'envoyer c sur la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et, pour tout $u \in E$ et $x \in F$, $u \otimes x$ sur la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \sigma^{N-1}(u)x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{N-2}(u)x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma(u)x & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & ux \end{pmatrix}$$

□

L'algèbre $\Lambda_{E,F}(\eta, b)$ s'identifie donc à une algèbre de matrices carrées à coefficients dans un corps gauche et nous notons $D_{E,F}(\eta, b)$ ce corps gauche. Notons (η, b) la classe d'isomorphisme de $D_{E,F}(\eta, b)$ dans le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(F)$ de F. Le choix d'une clôture séparable F^s de F et d'un E-plongement de E^s dans F^s définissent un homomorphisme continu $\nu : G_F = \mathrm{Gal}(F^s/F) \to G_E$. Notons $\delta\eta \in H^2(E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ l'image de $\eta \in H^1(G_E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ par le cobord correspondant à la suite exacte

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

et $\nu^*(\delta\eta)$ son image dans $H^2(G_F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. On vérifie facilement que $(\eta, b) = b.\nu^*(\delta\eta)$, cup-produit de $b \in H^0(G_F, (F^s)^*)$ avec $\nu^*(\delta\eta)$. Dans le cas particulier où $E = F$, on retrouve le symbole local usuel (cf [CL], chap.XIV, §1). Le cas général s'y ramène puisque $(\eta, b) = (\nu^*(\eta), b) = (\eta \circ \nu, b)$. Dans le cas où F est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, on sait donc calculer l'invariant du corps gauche $D_{E,F}(\eta, b)$ (*loc.cit*, prop.3).

Soit alors $A \in \mathcal{C}(\overline{K})$. Posons $P_A = \prod_{\alpha \in A}(X - \alpha) \in K[X]$. C'est aussi le polynôme minimal de n'importe quel élément de A sur K. Notons K_A le corps $K[X]/(P(X))$ et β l'image de X dans F. Notons aussi d_A le nombre d'éléments de A. C'est aussi le degré de P_A et celui de l'extension K_A/K. Notons enfin $r_A \in \mathbb{N}$ le plus petit entier r tel qu'un élément quelconque $\alpha \in A$ soit dans $\mathfrak{a}_r$. Si l'on note encore v_p la valuation p-adique sur K_A c'est le plus petit entier r tel que $v_p(\beta \log \chi(\gamma)) > \frac{1}{p-1}$ pour tout $\gamma \in \Gamma_r$. Ceci permet de définir un homomorphisme continu $\rho_A : \Gamma_{r_A} \to K_A^*$ en posant

$$\rho_A(\gamma) = \exp(\beta \log \chi(\gamma)) \ ,$$

pour tout $\gamma \in \Gamma_{r_A}$. On note $M[A]$ le K_A-espace vectoriel de dimension 1 qui est K_A lui-même, muni de l'action linéaire et continue de Γ_{r_A} définie par le caractère ρ_A. On note $N[A]$ la représentation K_A-linéaire de Γ induite. On a donc $N[A] = K_A[\Gamma] \otimes_{K_A[\Gamma_{r_A}]} M[A]$. C'est un K_A-espace vectoriel de dimension p^{r_A}, puisque, si γ_0 est un générateur topologique de Γ, les $\gamma_0^i \otimes 1$, pour $0 \leq i < p^{r_A}$ forment une base de $N[A]$ sur K_A. On note $N_\infty[A] = K_\infty \otimes_K N[A]$ la K_∞-représentation de Γ déduite de $N[A]$ par l'extension des scalaires $K \to K_\infty$. On choisit un sous-objet simple de $N_\infty[A]$ dans $\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma)$ et on le note $K_\infty[A]$. On note $C[A] = C \otimes_{K_\infty} K_\infty[A]$ la C-représentation de G_K déduite par extension des scalaires.

Proposition 2.13. — *Choisissons un générateur topologique γ_0 de Γ et soit $\eta : G_K \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ l'unique caractère qui se factorise à travers Γ et envoie γ_0 sur $1/p^{r_A}$ mod $\mathbb{Z}$. Posons $b = \rho_A(\gamma_0^{p^{r_A}})$. La K_A-algèbre $E_A = \mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma)}(N_\infty[A])$ s'identifie à $\Lambda_{K,K_A}(\eta, b)$. Le corps gauche $D_A = D_{K,K_A}(\eta, b)$ est de rang p^{2s_A} sur son centre K_A, où s_A est un entier qui vérifie $0 \leq s_A \leq r_A$. On a $\dim_{K_\infty}(K_\infty[A]) = \dim_C C[A] = d_A.p^{s_A}$. En outre $C[A]$ est un objet simple de $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ de type S_A et on a $\mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma)}(K_\infty[A]) = \mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_C(G_K)}(C[A]) = D_A$.*

Preuve : Posons $M_\infty[A] = K_\infty \otimes_K M[A]$. Pour tout $s \in \mathbb{N}$, posons aussi $M_s[A] = K_s \otimes_K M[A]$ et $N_s[A] = K_s \otimes_K N[A]$.

Avec des conventions évidentes, on a des inclusions

$$\begin{array}{ccccc} M[A] & \subset & M_s[A] & \subset & M_\infty[A] \\ \cap & & \cap & & \cap \\ N[A] & \subset & N_s[A] & \subset & N_\infty[A] \end{array}$$

Posons $r = r_A$. Pour tout entier $s \geq r$, $\gamma_s = \gamma_0^{p^s}$ est un générateur topologique de Γ_s qui agit sur $M[A]$ par multiplication par $b^{p^{s-r}} = \exp(\beta \log \chi(\gamma_0^{p^s}))$. L'anneau des

K-endomorphismes de $M[A]$ qui commutent à l'action de Γ_s s'identifie à l'anneau des K-endomorphismes f de K_A tels que $f(b^{p^{s-r}}x) = b^{p^{s-r}}f(x)$ pour tout $x \in K_A$. Mais on a $K_A = K(\beta) = K(b^{p^{s-r}})$ puisque $\beta = \frac{\log(b^{p^{s-r}})}{\log(\chi(\gamma_0^{p^s}}))$. Comme K_A est une sous-K-algèbre commutative maximale de l'anneau des K-endomorphismes de K_A, l'injection naturelle de K_A dans $\mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_K(\Gamma_s)}(M[A])$ est un isomorphisme.

Soit $\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$ une base de K_A, vu comme anneau des endomorphismes Γ_s-équivariants du K-espace vectoriel $M[A]$, sur K. Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma_r)}(M_\infty[A])$. Il existe un entier s que l'on peut supposer $\geq r$ tel que $f(M[A]) \subset M_s[A]$. Comme f est K_s-linéaire, on a aussi $f(M_s[A]) \subset M_s[A]$ et la restriction f_s de f à $M_s[A]$ est un K_s-endomorphisme Γ_r-équivariant de $M_s[A]$. Comme Γ_s opère trivialement sur K_s, l'anneau $\mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{K_s}(\Gamma_s)}(M_s[A])$ s'identifie à $K_s \otimes_K \mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_K(\Gamma_s)}(M[A]) = K_s \otimes_K K_A$ et il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d \in K_s$ tels que $f_s = \sum \lambda_i \otimes e_i$. En écrivant que f_s commute à l'action de γ_r, on voit que l'on doit avoir $\gamma_r(\lambda_i) = \lambda_i$ pour tout i, i.e. que $\lambda_i \in K_r$. il en résulte que l'anneau $\mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma_r)}(M_\infty(A))$ s'identifie à $K_r \otimes_K K_A$.

L'application de E_A dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma_r)}(M_\infty[A], N_\infty[A])$ qui à f associe sa restriction φ à $M_\infty[A]$ est bijective (tout élément de $N_\infty[A]$ s'écrit, d'une manière et d'une seule sous la forme $x = \sum_{i=0}^{p^r-1} \gamma_0^i(x_i)$, avec les $x_i \in M_\infty[A]$ et on a $f(x) = \sum \gamma_0^i(\varphi(x_i))$). Par ailleurs, il existe un unique $c \in E_A$ tel que $c(x) = \gamma_0(x)$ pour tout $x \in M[A]$ (on a $c(\lambda x) = \lambda c(x) = \lambda\gamma_0(x)$ si $\lambda \in K_\infty$ et $x \in M[A]$). Il est alors immédiat que tout $f \in E_A$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $\sum_{i=0}^{p^r-1} c^i f_i$ où la restriction de f_i à $M_\infty[A]$ est un endomorphisme de $M_\infty[A]$, donc un élément de $K_r \otimes_K K_A$. Par conséquent E_A est une $K_r \otimes_K K_A$-algèbre engendrée par un élément c dont on vérifie immédiatement qu'il satisfait les relations $c^{p^r} = b$ et $c(u \otimes x) = (\gamma_0(u) \otimes x)c$. D'où $E_A = \Lambda_{K,K_A}(\eta, b)$. Le reste de la proposition est alors évident. □

Le résultat suivant est alors clair.

Théorème 2.14. — *Soit W une C-représentation de G_K.*

i) Pour que W soit simple, il faut et il suffit qu'il existe $A \in \mathcal{C}(\overline{K})$ tel que $W \simeq C[A]$; alors W est de type S_A^m et de dimension $d_A p^{s_A}$ sur C.

ii) Pour que W soit indécomposable, il faut et il suffit qu'il existe $A \in \mathcal{C}(\overline{K})$ et $d \in \mathbb{N}^*$ tels que $W \simeq C[A; d] = C[A] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(0; d)$; alors W est de type S_A et de dimension $d.d_A p^{s_A}$ sur C.

iii) Il existe des entiers naturels $(h_{A,d}(W))_{A \in \mathcal{C}(\overline{K}), d \in \mathbb{N}^*}$ presque tous nuls, uniquement déterminés, tels que

$$W \simeq \oplus_{A \in \mathcal{C}(\overline{K}), d \in \mathbb{N}^*} C[A; d]^{h_{A,d}(W)} \ .$$

Remarques : 1 – On a aussi le même énoncé en remplaçant les C-représentations de G_K par les *K_∞-représentations de* Γ, à condition de remplacer $C[A]$ par $K_\infty[A]$ et $C[A; d]$ par $K_\infty[A; d] = K_\infty[A] \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\mathbb{Z}_p(0; d)$.

2 – Lorsque k est algébriquement clos, tous les corps gauches considérés sont commutatifs et on peut construire une $\otimes$-équivalence (non canonique) entre $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ et la

catégorie des représentations linéaires de dimension finie du groupe pro-algébrique $\mathbb{S}_K$.

Lorsque k est fini au contraire, les corps gauches considérés ne sont pas tous commutatifs et, en tant que catégorie tannakienne sur K, la catégorie $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ n'est pas neutre.

3 – On a vu que, pour qu'un objet (Y,s) de la catégorie $\mathcal{S}_{K_\infty}$ soit dans l'image essentielle du foncteur Δ_{Sen}, il est nécessaire que le polynôme caractéristique de s soit à coefficients dans K. Ce qui précède montre

i) que, lorsque k est algébriquement clos, c'est aussi suffisant;

ii) alors que ,lorsque k est fini, cela ne l'est pas. Par exemple, si $A \in \mathcal{C}(\overline{K})$ et si (Y,s) est un objet de $\mathcal{S}_{K_\infty}$ tel que le polynôme caractéristique de s est P_A, on voit que, si $h \in \mathbb{N}$, pour que $(Y,s)^h$ soit dans l'image essentielle de $\mathcal{S}_{K_\infty}$, il faut et il suffit que h soit divisible par p^{s_A}.

Rappelons que, pour tout $d \in \mathbb{N}$, $C(0;d) = C \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(0;d) = C[\{0\};d]$.

Proposition 2.15. — *i) Pour tout entier $d \geq 1$, on a $H^0(G_K, C(0;d)) = K$ et $H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C(0;d))$ est un K-espace vectoriel de dimension 1 engendré par la classe de l'extension*

$$0 \to C(0;d) \to C(0;d+1) \to C \to 0$$

où l'application $C(0;d+1) \to C$ est celle qui envoie $\sum_{j=0}^{d} c_j(\log t)^j$ sur c_d.

ii) Pour toute C-représentation W de G_K, on a

$$\dim_K H^0(G_K, W) = \dim_K H^1(G_K, W) = \sum_{d\in\mathbb{N}^*} h_{\{0\},d}(W) \ .$$

Preuve : On a $K \subset (C(0;d)^{G_K} \subset (B_{\{0\}})^{G_K} = K$, donc $C(0;d)^{G_K} = K$. Toute extension de $C = C(0;1)$ par $C(0;d)$ est un C-espace vectoriel de dimension $d+1$ qui n'a que 0 comme poids de Sen et qui contient un sous-objet isomorphe à $C(0;d)$. A isomorphisme près, il n'y en a que deux : le premier $C(0;d) \oplus C(0;1)$ correspond à une extension de $C = C(0;1)$ par $C(0;d)$ qui est scindée tandis que le second $C(0;d+1)$ est aussi une extension de C par $C(0;d)$, mais n'est pas scindée puisque $C(0;d{+}1)$ est indécomposable. L'assertion (i) en résulte.

Si W est une C-représentation de G_K qui n'a pas 0 comme poids de Sen, on a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_C(G_K)}(C,W) = \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}_C(G_K)}(C,W) = 0$. Toute C-représentation W de G_K se décompose de manière unique sous la forme $W = W_0 \oplus W'$, où W_0 n'a que 0 comme poids de Sen, tandis que W' n'a pas 0 come poids de Sen. Pour $i = 0,1$, on a donc $H^i_{\mathrm{cont}}(C,W) = H^i_{\mathrm{cont}}(C,W_0)$. Comme $W_0 \simeq \oplus_{d\in\mathbb{N}^*} C(0;d)^{h_{\{0\},d}(W)}$, l'assertion (ii) résulte de (i). $\square$

Remarque : Plus généralement, le calcul des K-espaces vectoriels $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_C(G_K)}(W_1,W_2)$ et $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}_C(G_K)}(W_1,W_2)$ pour W_1 et W_2 des C-représentations de G_K est très facile : on peut

– soit se ramener par décomposition en somme directe au cas où W_1 et W_2 sot tous deux indécomposables et faire alors un calcul direct,

– soit remarquer que l'on a vu au début de ce paragraphe que, si $W = W_1^* \otimes_C W_2$, alors $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_C(G_K)}(W_1, W_2) = H^0(G_K, W)$ et $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}_C(G_K)}(W_1, W_2) = H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, W)$, ce qui nous ramène à la proposition ci-dessus.

2.7 – C-représentations presque de Hodge-Tate

On dit qu'une C-représentation W de G_K est *déployée sur K* si tous ses poids de Sen sont dans K, i.e. si elle est de type S_K. Evoquons un cas particulier de la notion de représentation déployée sur K.

Notons $\mathfrak{a}_0^K = \mathfrak{a}_0 \cap K$ l'idéal fractionnaire de $\mathcal{O}_K$ formé des éléments dont la valuation p-adique est $> -r_K + \frac{1}{p-1}$. Parmi les représentations déployées, les représentations de type $S_{\mathfrak{a}_0^K}$ sont particulièrement agréables : tout objet simple de type $S_{\mathfrak{a}_0^K}$ est de dimension 1 sur C et l'anneau de ses endomorphismes est réduit à K.

Parmi ces représentations, il y a celles qui sont de type $S_{\mathbb{Z}}$ et en particulier celles qui sont de type $S_{\mathbb{Z}}^m$. Ces dernières s'appellent d'habitude les *C-représentations de Hodge-Tate*. On pose $B_{HT} = B_{\mathbb{Z}}^m$ et, pour toute C-représentation W de G_K, $D_{HT}(W) = D_{0,\mathbb{Z}}^m(W) = (B_{HT} \otimes_C W)^{G_K}$.

De même, nous appelons *C-représentations presque de Hodge-Tate* les C-représentations qui sont de type $S_{\mathbb{Z}}$. On pose $B_{pHT} = B_{\mathbb{Z}}$ et, pour toute C-représentation W, $D_{pHT}(W) = D_{0,\mathbb{Z}}(W) = (B_{pHT} \otimes_C W)^{G_K}$.

Pour toute C-représentation W de G_K, $D_{HT}(W)$ (resp. $D_{pHT}(W)$ est un K-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à la dimension de W sur C et on a l'égalité si et seulement si W est de Hodge-Tate (resp. presque de Hodge-Tate).

On a $B_{HT} = C[t^{(1)}, 1/t^{(1)}]$, algèbre des polynômes de Laurent en l'indéterminée $t^{(1)}$.

Remarquons que se donner t générateur de $\mathbb{Z}_p(1)$ revient à se donner une suite $\varepsilon = (\varepsilon^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\varepsilon^{(n)}$ est une racine primitive p^n-ième de l'unité dans $\overline{K}$, avec $(\varepsilon^{(n+1)})^p = \varepsilon^{(n)}$ pour tout n. Si $p \neq 2$, notons π_t l'unique uniformisante de $\mathbb{Q}_p(\varepsilon^{(1)})$ telle que $(\pi_t)^{p-1} + p = 0$ et $v_p(\varepsilon^{(1)} - 1 - \pi_t) \geq 2/(p-1)$. Si $p = 2$, posons $\pi_t = \varepsilon^{(2)} - 1$. L'application de $\mathbb{Z}_p(1) = \mathbb{Z}_p t$ qui envoie λt sur $\lambda \pi_t t^{(1)}$ est injective. Elle commute à l'action de G_K et nous l'utilisons pour identifier $\mathbb{Z}_p(1)$ à un sous-$\mathbb{Z}_p$-module de $\bar{K}t^{(1)} \subset Ct^{(1)} \subset B_{HT}$. Il n'est pas difficile de voir que cette identification ne dépend pas du choix de t (ce qui a un sens puisque B_{pHT} est en fait un sous-anneau de $B_{\mathrm{Sen},0}$ dont la construction ne dépend pas du choix de t). On voit alors que l'on a

$$B_{HT} = C[t, 1/t] \text{ et } B_{pHT} = B_{HT}[\log t] \ .$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{Z}_p(i)$, la puissance symétrique i-ième du $\mathbb{Z}_p$-module $\mathbb{Z}_p(1)$ et $\mathbb{Z}_p(-i)$ son $\mathbb{Z}_p$-dual. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_p(i)$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang 1 de base t^i. Pour tout $\mathbb{Z}_p$-module M et tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose $M(i) = M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(i)$ (c'est le "i-ième tordu à la Tate de M"). Si $x \in M$ et $u \in \mathbb{Z}_p(i)$, on pose $xu = x \otimes u \in M(i)$. L'application

$x \mapsto xt^i$ est une bijection $\mathbb{Z}_p$-linéaire de M sur $M(i)$ qui, en général, dépend du choix de t.

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, le groupe G_K opère sur $\mathbb{Z}_p(i)$: on a $gu = \chi^i(g)u$, pour tout $g \in G_K$ et tout $u \in \mathbb{Z}_p(i)$. Si M est un $\mathbb{Z}_p$-module topologique muni d'une action linéaire et continue de G_K, G_K opère aussi linéairement et continûment sur chaque $M(i)$: on a $g(xt^i) = \chi^i(g)g(x)t^i$, pour tout $g \in G_K$ et tout $x \in M$.

L'identification de $t \in \mathbb{Z}_p(1)$ à $\pi_t t^{(1)}$ permet, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, d'identifier $C(i) = Ct^i$ à $Ct^{(i)}$. L'application $ct^{(i)} \mapsto c$ est alors un isomorphisme (non canonique, mais G_K-équivariant) de $C(i)$ sur $C[\{i\}]$. De même, pour tout entier $d \in \mathbb{N}$, $C[\{i\}; d]$ est isomorphe, non canoniquement, à $C(i; d) = C(i) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(0; d)$. Une C-représentation de G_K est presque de Hodge-Tate si et seulement si elle est isomorphe à une somme directe d'un certain nombre de $C(i; d)$ pour des entiers i et d convenables.

Une C-représentation W de G_K est de Hodge-Tate si et seulement si elle est semi-simple et ses poids de Sen sont dans $\mathbb{Z}$. Dans ce cas, ses poids de Sen s'appellent aussi *les poids de Hodge-Tate de W* ; il existe des entiers naturels $h_i(W)$ presque tous nuls, uniquement déterminés tels que $W \simeq \oplus_{i \in \mathbb{Z}} C(i)^{h_i(W)}$ (avec les notations du théorème 2.14, on a $h_i(W) = h_{\{i\},1}(W)$). L'entier $h_i(W)$ s'appelle *la multiplicité de i comme poids de Hodge-Tate dans W.*

Chapitre 3 – B_{dR}-représentations

3.1 – Le corps B_{dR} des périodes p-adiques

Pour tout anneau A et tout entier $m \geq 1$, on note $W_m(A)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans A. Pour tout $a \in A$, on note $[a] = (a, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ le représentant de Teichmüller de a dans $W(A)$.

Pour tout entier $n \geq 1$, l'application $w_n : W_{n+1}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \to \mathcal{O}_{\overline{K}}$ qui envoie $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ sur $\sum_{i=0}^{n} p^i a_i^{p^{n-i}}$ est un homomorphisme d'anneaux. Le noyau de l'application composée de w_n avec la projection de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ sur $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}$ contient l'idéal de $W_{n+1}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ des éléments de la forme $(pb_0, pb_1, \ldots, pb_{n-1}, a_n)$, avec $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, a_n \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$. Comme cet idéal est le noyau de la projection naturelle de $W_{n+1}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ sur $W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})$, on en déduit, par passage aux quotients, un homomorphisme d'anneaux

$$\theta^{(n)} : W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}) \to \mathcal{O}_{\overline{K}}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}} \ .$$

Notons $f_n : W_{n+1}(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}) \to W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})$ l'homomorphisme d'anneaux qui est le composé de la projection naturelle avec le Frobenius (i.e. l'application qui envoie $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ sur $(x_0^p, x_1^p, \ldots, x_{n-1}^p)$. Le carré

$$\begin{array}{ccc}
W_{n+1}(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}) & \xrightarrow{\theta_{n+1}} & \mathcal{O}_{\overline{K}}/p^{n+1}\mathcal{O}_{\overline{K}} \\
{\scriptstyle f_n}\big\downarrow & & \big\downarrow \\
W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}) & \xrightarrow[\theta_n]{} & \mathcal{O}_{\overline{K}}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}
\end{array}$$

est commutatif. Comme $\mathcal{O}_C = \varprojlim \mathcal{O}_{\overline{K}}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}$, par passage à la limite, on en déduit un homomorphisme d'anneaux $\theta : \varprojlim_{f_n} W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}) \to \mathcal{O}_C$.

Notons alors R l'anneau qui est la limite projective, indexée par $\mathbb{N}$, des $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$, les applications de transition étant données par le Frobenius (un élément x de R est donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$ vérifiant $(x_{n+1})^p = x_n$ pour tout n).

Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R$. Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, choisissons un relèvement $\hat{x}_m$ de x_m dans $\mathcal{O}_C$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(\hat{x}_{n+m}^{p^m})_{m\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite $x^{(n)}$ indépendante du choix des relèvements et on a $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$. On obtient ainsi une application de R dans l'ensemble des suites $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{O}_C$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ pour tout n. On vérifie facilement que cette application est bijective et nous l'utilisons pour identifier R à l'ensemble de ces suites. Si $x, y \in R$, on a $(x+y)^{(n)} = lim_{m\mapsto+\infty}(x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m}$ et $(xy)^{(n)} = x^{(n)}y^{(n)}$.

Le corps résiduel $\overline{k}$ de $\overline{K}$ est une clôture algébrique de k. Pour tout $a \in \overline{k}$, on a $[a] \in W(\overline{k}) \subset \mathcal{O}_C$. L'application de $\overline{k}$ dans R, qui envoie a sur $([a^{p^{-n}}])_{n\in\mathbb{N}}$ identifie $\overline{k}$ à un sous-corps de R.

Pour tout $x \in R$, posons $v_R(x) = v_p(x^{(0)})$. Alors v_R est une valuation sur R et R est un anneau de valuation complet, de corps résiduel $\overline{k}$. L'anneau R est parfait. Il n'est pas difficile de montrer que son corps des fractions est algébriquement clos.

Soit $x \in W(R)$. On peut écrire $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$, avec pour tout $m \in \mathbb{N}$, $x_m \in R$. On peut donc écrire indifféremment $x_m = (x_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ avec les $x_{m,n} \in \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$ vérifiant $(x_{m,n+1})^p = x_{m,n}$ pour tout n, ou $x_m = (x_m^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec les $x_m^{(n)} \in \mathcal{O}_C$ vérifiant $(x_m^{(n+1)})^p = x_m^{(n)}$ pour tout n (alors $x_{m,n}$ est l'image de $x_m^{(n)}$ dans $\mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C = \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$).

Pour tout entier $n \geq 1$, l'application de $W(R)$ dans $W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})$ qui envoie $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ sur $(x_{0,n}, x_{1,n}, \ldots, x_{n-1,n})$ est un homomorphisme d'anneaux. Par passage à la limite, il induit un homomorphisme de $W(R)$ sur $\varprojlim_{f_n} W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})$ qui est en fait un isomorphisme ; nous utilisons ce dernier pour identifier ces deux anneaux. L'application $\theta : W(R) \to \mathcal{O}_C$ peut s'écrire

$$\theta(x_0, x_1, x_2, \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n x_n^{(n)} \ ;$$

c'est un homomorphisme de $W(\overline{k})$-algèbre. Comme C est algébriquement clos, l'application de R dans $\mathcal{O}_C$ qui envoie x sur $x^{(0)}$ est surjective. A fortiori l'application θ est surjective.

En utilisant la surjectivité de l'application $x \mapsto x^{(0)}$ de R dans $\mathcal{O}_C$ et le fait que $W(R)$ est séparé et complet pour la topologie p-adique, on vérifie facilement que le noyau de θ est un idéal principal : si $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots) \in \ker\, \theta$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) le noyau de θ est engendré par a,

(ii) on a $v_R(a_0) = 1$,

(iii) on a $v_R(a_1) = 0$.

Choisissons un élément $\pi \in R$ tel que $\pi^{(0)} = p$; alors $\xi = [\pi] - p$ engendre le noyau de θ.

On note $P_0 = W(\overline{k})[1/p]$ le corps des fractions de $W(\overline{k})$. L'anneau $W(R)$, sous-anneau de l'anneau de valuation discrète $W(\mathrm{Frac}\ R)$, est un anneau intègre et s'identifie en particulier à un sous-anneau de $W(R)[1/p]$. L'application θ induit un homomorphisme surjectif de P_0-algèbres, encore noté θ, de W(R)[1/p] sur C. On note B_{dR}^+ le séparé complété de $W(R)[1/p]$ pour la topologie ker θ-adique. Il est facile de vérifier que $W(R)[1/p]$ est séparé pour cette topologie et ceci nous permet d'identifier $W(R)[1/p]$ à un sous-anneau de B_{dR}^+. Comme $W(R)[1/p]$ est intègre et le noyau de θ un idéal principal, B_{dR}^+ est un anneau de valuation discrète de corps résiduel C. On note B_{dR} son corps des fractions. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on note $\mathrm{Fil^i B_{dR}}$ l'idéal (fractionnaire si $i < 0$) qui est la puissance i-ième de l'idéal maximal de B_{dR}^+. En particulier, $\mathrm{Fil^0 B_{dR}} = \mathrm{B_{dR}^+}$.

Par fonctorialité le groupe G_K opère sur R, $W(R)$, B_{dR}^+ et B_{dR}. Bien qu'il existe des sections de la projection de B_{dR}^+ sur C, projection que nous notons encore θ, on peut montrer qu'il n'en n'existe pas qui commute à l'action de G_K. Toutefois, notons $\overline{P}$ la fermeture algébrique de P_0 dans C ; c'est un corps algébriquement clos contenant $\overline{K}$ (et égal à $\overline{K}$ si k est algébriquement clos). Comme $\overline{P}$ est réunion de ses sous-P_0-algèbres étales, il existe une unique application $s : \overline{P} \to B_{dR}^{+}$ telle que $\theta \circ s = id_{\overline{P}}$. Elle est donc G_K-équivariante et nous l'utilisons pour identifier $\overline{P}$ à un sous-corps de B_{dR}.

On a noté $\mathbb{Z}_p(1)$ le module de Tate du groupe multiplicatif, désignons par $\mathbb{Z}_p(1)^*$ le même module, mais noté multiplicativement. On voit que $\mathbb{Z}_p(1)^*$ s'identifie au sous-groupe du groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau R formé des $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $x^{(0)} = 1$. On a choisi (§2.3) un générateur t de $\mathbb{Z}_p(1)$; il correspond à un élément $\varepsilon = (\varepsilon^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Z}_p(1)^{\times}$. Pour tout $n \geq 1$, on a $v_p(\varepsilon^{(n)}) = 1/p^{n-1}(p-1)$, donc $v_R(\varepsilon - 1) = p(p-1)$.

On a $[\varepsilon] \in W(R) \subset B_{dR}^{+}$ et $\theta([\varepsilon]-1) = 0$, donc $[\varepsilon] - 1 \in \mathrm{Fil}^1\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$. Par conséquent la série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}([\varepsilon]-1)^n/n$ converge, dans B_{dR}^{+} vers un élément $\log[\varepsilon]$.

Proposition 3.1. — *L'élément* $\log[\varepsilon]$ *est une uniformisante de* B_{dR}^{+}.

Preuve : Il est clair que $\log[\varepsilon] \in \mathrm{Fil}^1\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$. Comme $\log[\varepsilon] \equiv [\varepsilon] - 1 \mod \mathrm{Fil}^2\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$, il s'agit de prouver que $[\varepsilon] - 1 \notin \mathrm{Fil}^2\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$. Comme $[\varepsilon] - 1 \in W(R)$ et comme $\mathrm{Fil}^2\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \cap \mathrm{W(R)}$ est l'idéal engendré par $\xi^2 = ([\pi]-p)^2$, il faut vérifier que $[\varepsilon] - 1 \notin \xi^2 W(R)$.

Supposons d'abord $p \neq 2$. Si ce n'était pas le cas, il existerait $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in W(R)$ tel que $[\varepsilon] - 1 = a\xi^2$. Si $[\varepsilon] - 1 = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots)$, on aurait $\varepsilon_0 = a_0\pi^2$, ce qui contredit le fait que $v_R(\varepsilon - 1) = p/(p-1) < 2 = v_R(\pi^2)$.

Si maintenant $p = 2$, soit $x \in R$ tel que $x^2 = \varepsilon$. On a $x^{(0)} = -1$, et on peut écrire $[x] + 1 = \xi\eta$, avec $\eta \in W(R)$. Si $[x] + 1 = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, on a $x_0 = x + 1$ et $x_0^{(0)} = lim_{n\mapsto+\infty}(x^{(n)} + 1)^{2^n} = lim_{n\mapsto+\infty}(\varepsilon^{(n+1)} + 1)^{2^n}$ donc $v_R(x_0) = 1$, d'où l'on déduit que η est une unité de $W(R)$. On a alors $[\varepsilon] - 1 = [x]^2 - 1 = ([x]+1)([x]-1) = \xi\eta(\xi\eta - 2) \equiv -2\eta\xi \mod \xi^2 W(R)$ qui n'est pas nul puisque 2 n'est pas dans le noyau de θ. $\square$

Ceci nous permet en particulier d'identifier $\mathbb{Z}_p(1)$ au sous-$\mathbb{Z}_p$-module de $\mathrm{Fil}^1\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ engendré par $\log[\varepsilon]$, i.e. de poser $t = \log[\varepsilon]$, ce que nous ferons dans la suite ; on voit que cette identification est indépendante du choix du générateur t de $\mathbb{Z}_p(1)$.

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a donc $\mathrm{Fil}^{\mathrm{i}}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\mathrm{t}^{\mathrm{i}} = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}(\mathrm{i})$, tandis que $\mathrm{gr}^i B_{dR} = \mathrm{Fil}^{\mathrm{i}}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^{\mathrm{i}+1}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ s'identifie à $C(i)$. En particulier, l'anneau gradué associé à l'anneau filtré B_{dR} s'identifie à $\oplus_{i\in\mathbb{Z}}C(i) = B_{HT}$.

3.2 – La topologie de B_{dR} :

Rappelons qu' *un espace de Banach p-adique* est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel normé complet. Nous appelons *Banach p-adique* tout $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel V dont la topologie est celle d'un espace de Banach p-adique. Nous appelons *réseau* de V tout sous $\mathbb{Z}_p$-module $\mathcal{V}$ de V qui est la boule unité pour l'une des normes équivalentes de V. Se donner un couple $(V, \mathcal{V})$ formé d'un Banach p-adique et d'un réseau revient à se donner un $\mathbb{Z}_p$-module $\mathcal{V}$ séparé et complet pour la topologie p-adique et sans p-torsion ; on a alors $V = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{V}$ avec la topologie correspondante (i.e. les $p^n\mathcal{V}$, pour $n \in \mathbb{N}$ forment un système fondamental de voisinages ouverts de 0 dans $\mathcal{V}$ et dans V). Si $\mathcal{V}$ est un réseau de V, pour qu'un sous-$\mathbb{Z}_p$-module $\mathcal{V}'$ de V soit un réseau, il faut et il suffit qu'il existe $r, s \in \mathbb{Z}$ tels que $p^s\mathcal{V} \subset \mathcal{V}' \subset p^r\mathcal{V}$.

Nous appelons *algèbre de Banach* p-adique la donnée d'une $\mathbb{Q}_p$-algèbre topologique dont la topologie est celle d'un Banach p-adique et qui admet un réseau qui est un sous-anneau.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on pose $B_r = B_{dR}^+/\mathrm{Fil}^r\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$, de sorte que $B_{dR}^+ = \varprojlim_{r\in\mathbb{N}} B_r$. On voit que B_r s'identifie au quotient de $W(R)[1/p]$ par l'idéal engendré par ξ^r. C'est de façon naturelle une algèbre de Banach p-adique avec l'image de $W(R)$ comme réseau. La projection de B_{r+1} sur B_r est continue. On appelle *topologie naturelle sur* B_{dR}^+ la topologie de la limite projective des B_r, avec la topologie de Banach p-adique sur chaque B_r. Elle est moins fine que la topologie d'anneau de valuation discrète (qui est la topologie de la limite projective, avec la topologie discrète sur chaque B_r).

Sauf mention explicite du contraire, tout B_{dR}^+-module de type fini est muni de la topologie définie par la topologie naturelle sur B_{dR}^+. On a $B_{dR} = \cup_{i\in\mathbb{N}} B_{dR}^+(-i)$ et on définit la *topologie naturelle sur* B_{dR} comme étant la topologie de la limite inductive.

Notons $\hat{B}_{HT}^+ = C[[t]]$ l'anneau des séries formelles en t à coefficients dans C et $\hat{B}_{HT} = C((t))$ son corps des fractions (qui s'identifie au complété de B_{HT} pour la topologie définie par la valuation t-adique). Les corps $\hat{B}_{HT}^+$ et B_{dR} ne sont pas isomorphes mais ont des propriétés très voisines. Ce sont les deux seuls de leur espèce. De façon précise, on a le résultat suivant :

Proposition 3.2. — *Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de Banach p-adique munie d'une action $\mathbb{Q}_p$-linéaire et continue de G_K. On suppose qu'il existe un entier $r \geq 1$, un élément $u \in \mathcal{B}$, un homomorphisme d'anneaux $\theta_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to C$ qui est G_K-équivariant et un sous-anneau $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}$ qui est un réseau tel que u est un générateur du noyau de $\theta_{\mathcal{B}}$, $\theta_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}_C$, $g(u) = \chi(g)u$, pour tout $g \in G_K$, $u^r \neq 0$ et $u^{r+1} = 0$. Alors :*

– ou bien, il existe un homomorphisme d'anneaux continu

$$s : C[t]/(t^{r+1}) \to \mathcal{B}$$

tel que $s(t) = u$ et $\theta_{\mathcal{B}}(s(c)) = c$ pour tout $c \in C$;

– ou bien non, et alors il existe un homomorphisme d'anneaux continu

$$s : B_r \to \mathcal{B}$$

tel que $\theta_{\mathcal{B}}(s(c)) = c$ pour tout $c \in C$.

Dans les deux cas, l'application s est unique, G_K équivariante et est un homéomorphisme.

Par passage à la limite, cette proposition implique que, *si $\mathcal{B}$ est une $\mathbb{Q}_p$-algèbre topologique, munie d'une action $\mathbb{Q}_p$-linéaire et continue de G_K, d'un homomorphisme*

G_K-équivariant, $\theta : \mathcal{B} \to C$, contenant un élément u non nilpotent vérifiant $g(u) = \chi(g)u$, pour tout $g \in G_K$, telle que

– d'une part, $\mathcal{B}$ est séparé et complet pour la topologie u-adique,

– d'autre part, pour tout $r \geq 1$, $u^r\mathcal{B}$ est fermé et $\mathcal{B}/u^r\mathcal{B}$ est une algèbre de Banach p-adique admettant un réseau qui est un sous-anneau qui se projette surjectivement sur $\mathcal{O}_C$,

alors $\mathcal{B}$ s'identifie soit à $\hat{B}_{HT}^+ = C[[t]]$ soit à B_{dR}^+ et ces deux possibilités s'excluent mutuellement (attention que dans le premier cas, l'identification est faite en décidant d'envoyer u sur t, alors que dans le second cas, il existe $\lambda \in K$, non nul tel que u s'envoie sur λt, mais on ne peux pas choisir λ).

Prouvons la proposition 3.2 : Commençons par remarquer qu'il existe un unique homomorphisme d'anneaux continu $\rho : W(R) \to \mathcal{A}$ tel que $\theta_{\mathcal{B}} \circ \rho = \theta$. En effet, si $\theta_{\mathcal{A}}$ désigne la restriction de $\theta_{\mathcal{B}}$ à $\mathcal{A}$, le noyau de $\theta_{\mathcal{A}}$ est un idéal nilpotent et on en déduit que, si $I = \text{Ker } \theta_{\mathcal{A}} + p\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ est séparé et complet pour la topologie I-adique. Il en résulte que, si $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in R$ et si $\hat{x}_n$ désigne un relèvement de $x^{(n)}$ dans $\mathcal{A}$, alors

– d'une part la suite des $\hat{x}_n^{p^n}$ converge dans $\mathcal{A}$ vers un élément $\nu(x)$ indépendant des choix des relèvements,

– d'autre part, on doit avoir $\rho([x]) = \nu(x)$, pour tout $x \in R$.

Pour tout $(x_0, x_1, \ldots, x_m, \ldots) \in W(R)$, on doit donc avoir

$$\rho((x_0, x_1, \ldots, x_m, \ldots)) = \sum_{n=0}^{\infty} p^m \nu((x_m)^{p^{-m}}) \ ,$$

ce qui montre l'unicité de ρ et on vérifie facilement que l'application ainsi définie convient. Remarquons aussi que l'application ρ est G_K-équivariante.

Posons $J = \text{Ker } \mathcal{B}$. Pour tout entier n vérifiant $0 \leq n \leq r$, J^n/J^{n+1} est un C-espace vectoriel de dimension 1 engendré par l'image $\overline{u}^n$ de u^n qui est isomorphe, en tant que C-représentation de G_K à $C(n)$. En revanche, si $n > r$, on a $J^{n+1} = J^n$.

(i) Supposons d'abord qu'il existe une section continue $s_0 : C \to \mathcal{B}$ de la projection $\theta_{\mathcal{B}}$. Si l'on pose $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} + s_0(\mathcal{O}_C)$, c'est un sous-anneau de $\mathcal{B}$ qui est encore un réseau et s'envoie surjectivement sur $\mathcal{O}_C$. L'unicité de ρ reste vraie si l'on remplace $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}_1$ et on doit donc avoir $\rho = s_0 \circ \theta$. Ceci montre que l'on doit avoir $\text{Ker } \rho = \text{Ker } \theta$ et que s_0 est nécessairement l'application induite par ρ par passage au quotient (en particulier, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$). Il existe alors une unique façon de prolonger l'homomorphisme s_0 en un homomorphisme, que nous notons encore s_0, de $C[t]/t^{r+1}$ dans $\mathcal{B}$, tel que $s_0(t) = u$. Il est clair que, si s existe, on doit avoir $s = s_0$. On voit aussi que s_0 est un isomorphisme d'anneaux G_K-équivariant et il reste à prouver que c'est un homéomorphisme, ce qui revient à vérifier que $\mathcal{A}' = s_0(\mathcal{O}_C[t]/t^{r+1})$ est un réseau de $\mathcal{B}$, i.e qu'il existe $c, c' \in \mathbb{Z}$ tels que $p^{c'}\mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \subset p^c\mathcal{A}'$.

Mais on a $\mathcal{A}' = s_0(\mathcal{O}_C)[u]$. Comme $u^{r+1} = 0$, si b est un entier tel que $p^b u \in \mathcal{A}$, on a $p^{br}\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ et on peut prendre $c' = br$. Inversement, pour $1 \leq n \leq r$, l'image I_n de $\mathcal{A} \cap J^n$ dans J^n/J^{n+1} est un sous-$\mathcal{O}_C$-module non nul, séparé pour la topologie p-adique.

Ceci implique, que, si l'on pose $\mathfrak{a}_n = \{\lambda \in C \mid \lambda\overline{u}^n \in I_n\}$, il existe un nombre rationnel a_n tel que, ou bien $\mathfrak{a}_n = \{\lambda \in C \mid v_p(\lambda) \geq a_n\}$ ou bien $\mathfrak{a} = \{\lambda \in C \mid v_p(\lambda) > a_n\}$. En particulier, il existe $b_n \in \mathbb{N}$ tel que $I_n \subset p^{-b_n}\mathcal{O}_C.\overline{u}^n$.

On va en déduire, par récurrence décroissante sur n que pour $0 \leq 1 \leq n$, il existe un entier c_n tel que $\mathcal{A} \cap J^n \subset p^{-c_n}\mathcal{A}'$ (il suffira donc de prendre $c = -c_0$). Cela est vrai pour $r = n$ avec $s_r = c_r$. Supposons donc $n < r$. Soit $x \in \mathcal{A} \cap J^n$. On peut écrire $x = p^{-b_n}\lambda u^n + y$, avec $\lambda \in \mathcal{O}_C$ et $y \in J^{n+1}$. On a donc $p^{nb+b_n}x = \lambda(p^b u)^n + p^{nb+b_n}y$ et $p^{nb+b_n}y \in \mathcal{A} \cap J^{n+1} \subset p^{-c_{n+1}}\mathcal{A}$, d'où $p^{nb+b_n}x \in p^{-c_{n+1}}\mathcal{A}$ et il suffit de prendre $c_n = c_{n+1} + nb + b_n$.

(ii) Supposons maintenant qu'il n'existe pas de section continue de $\theta_{\mathcal{B}}$. Si $\xi \in W(R)$ est un générateur du noyau de θ, on a $\rho(\xi) \in \mathrm{Ker}\ \theta_{\mathcal{B}}$, mais $\rho(\xi) \neq 0$. Remarquons que l'application ρ se prolonge en un homomorphisme de B_r dans $\mathcal{B}$ qui est G_K-équivariant. Mais ρ induit un isomorphisme C-linéaire, G_K-équivariant de $\mathrm{gr}^1 B_r = C(1)$ sur $C(m)$. On doit donc avoir $m = 1$ et il en résulte immédiatement que ρ induit un isomorphisme d'anneaux $s_0 : B_r \to \mathcal{B}$ qui est G_K-équivariant. Il est clair que si s existe, on a $s = s_0$ et il reste à vérifier que s_0 est un homéomorphisme. Si l'on note $\mathcal{A}'$ l'image de $W(R)$ par ρ, cela revient à prouver que $\mathcal{A}'$ est un réseau de $\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, il suffit de prouver qu'il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{A} \subset p^c\mathcal{A}'$, ce qui se fait comme dans le cas (i). □

Pour alléger les notations, notons $\underline{t}$ l'élément de $\mathcal{B}_{K,0} \subset B_{\mathrm{Sen},0}$ noté $t^{(1)}$. Rappelons (§2.7) que l'on a identifié t à l'élément $\pi_t\underline{t}$ de $B_{\mathrm{Sen},0}$ (où π_t est un élément bien défini de $\overline{K}$). Inversement on peut identifier $\underline{t}$ à un élément de B^+_{dR} en posant $\underline{t} = t/\pi_t$. On voit que c'est encore une uniformisante de B^+_{dR}.

Proposition 3.3. — *Posons $L_{dR} = B_{dR}^{H_K}$ et $L^+_{dR} = (B^+_{dR})^{H_K}$. Alors L^+_{dR} est un sous-anneau fermé de B^+_{dR} et L_{dR} est son corps des fractions. L'anneau L^+_{dR} est aussi un anneau de valuation discrète complet, dont l'idéal maximal est engendré par $\underline{t}$ et dont le corps résiduel est L. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, l'application naturelle $L^+_{dR} \to B_r^{H_K}$ est surjective.*

Preuve : Il est clair que $\underline{t} \in L^+_{dR}$. On a $B_1 = B^+_{dR}/\mathrm{Fil}^1\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} = \mathrm{C}$, donc $B_1^{H_K} = C^{H_K} = L$ (th.1.1). Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, la suite exacte

$$0 \to C(r) \to B_{r+1} \to B_r \to 0$$

induit une suite exacte

$$0 \to C(r)^{H_K} \to B_{r+1}^{H_K} \to B_r^{H_K} \to 0$$

puisque $H^1_{\mathrm{cont}}(H_K, C(r)) = 0$ (cor.2.3). Le reste de la proposition est alors évident. □

Proposition 3.4. — *On a $(L^+_{dR})^\Gamma = (B^+_{dR})^{G_K} = (L_{dR})^\Gamma = (B_{dR})^{G_K} = K$.*

Preuve : On a $K \subset (B^+_{dR})^{G_K} \subset (B_{dR})^{G_K}$ et il suffit de vérifier que $(B_{dR})^{G_K} \subset K$, ce qui, comme $\mathrm{gr}B_{dR} = B_{HT} = B_{\mathbb{Z}}$ résulte immédiatement de ce que $(B_{\mathbb{Z}})^{G_K} = D_{HT}(C) = K$ (§2.7). □

3.3 – Etude des B_{dR}^+-représentations : réduction aux $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentations

Si B est un anneau topologique (commutatif) muni d'une action continue (compatible avec la structure d'anneau) d'un groupe topologique J, on appelle *B-représentation de J* la donnée d'un B-module de type fini muni d'une action semi-linéaire continue de J. Avec comme morphismes les applications B-linéaires J-équivariantes, ces représentations forment une catégorie abélienne que nous notons $\mathrm{Rep}_B(J)$.

Remarquons que l'anneau $K_\infty[[\underline{t}]]$ des séries formelles en $\underline{t}$ à coefficients dansK_∞ s'identifie à un sous-anneau de L_{dR}^+ stable par Γ. Nous allons nous intéresser ici aux B_{dR}^+-représentations de G_K, aux L_{dR}^+-représentations de Γ et aux $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentations de Γ.

Remarquons qu'une C-représentation de G_K n'est autre qu'une B_{dR}^+-représentation de G_K annulée par $\underline{t}$; de même une L-représentation (resp. une K_∞-représentation) de Γ n'est autre qu'une L_{dR}^+-représentation (resp. une $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentation) de Γ annulée par $\underline{t}$.

Si X est une L_{dR}^+-représentation de Γ, $B_{dR}^+ \otimes_{L_{dR}^+} X$ est une B_{dR}^+-représentation de G_K. SI Y est une $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentation de Γ, $L_{dR}^+ \otimes_{K_\infty[[\underline{t}]]} Y$ est une L_{dR}^+-représentation de Γ. On obtient ainsi des foncteurs

$$\mathrm{Rep}_{L_{dR}^+}(\Gamma) \to \mathrm{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K) \text{ et } \mathrm{Rep}_{K_\infty[[\underline{t}]]}(\Gamma) \to \mathrm{Rep}_{L_{dR}^+}(\Gamma)\ .$$

Comme dans le cas tué par $\underline{t}$, ce sont des équivalences de catégories. Cela résulte des deux théorèmes qui suivent :

Théorème 3.5. — *Soit W une B_{dR}^+-représentation de H_K. L'application B_{dR}^+-linéaire*

$$B_{dR}^+ \otimes_{L_{dR}^+} W^{H_K} \to W$$

déduite, par extension des scalaires, de l'inclusion de W^{H_K} dans W est bijective.

Preuve : En écrivant $W = \varprojlim_{r\in\mathbb{N}} W/\underline{t}^r W$, on se ramène à prouver le théorème pour W de longueur finie sur B_{dR}^+, donc a fortiori de longueur finie en tant que B_{dR}^+-représentation de G_K. On va prouver en même temps que $H^1_{\mathrm{cont}}(H_K, W) = 0$ et procéder par récurrence sur cette dernière longueur. Si celle-ci est 1, W est tué par $\underline{t}$ et les deux assertions sont vraies (th.2.2 et cor.2.3). Sinon, on peut trouver une suite exacte courte non triviale de B_{dR}^+-représentations de G_K

$$0 \to W' \to W \to W'' \to 0\ .$$

Par hypothèse de récurrence $H^1_{\mathrm{cont}}(H_K, W')$ et $H^1_{\mathrm{cont}}(H_K, W'')$ sont nuls et $H^1_{\mathrm{cont}}(H_K, W)$ l'est donc aussi. La nullité de $H^1_{\mathrm{cont}}(H_K, W')$ implique aussi que la suite

$$0 \to (W')^{H_K} \to W^{H_K} \to (W'')^{H_K} \to 0$$

est exacte. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & B_{dR}^+ \otimes_{L_{dR}^+} (W')^{H_K} & \to & B_{dR}^+ \otimes_{L_{dR}^+} W^{H_K} & \to & B_{dR}^+ \otimes_{L_{dR}^+} (W'')^{H_K} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & W' & \to & W & \to & W'' & \to & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. Par hypothèse de récurrence, les flèches verticales de droite et de gauche sont des isomorphismes ; donc celle du milieu aussi. □

THÉORÈME 3.6. — *Soit X une L_{dR}^+-représentation de Γ.*

– Si X est de longueur finie sur L_{dR}^+, soit X_f la réunion des sous-K-espaces vectoriels de dimension finie de X stables par Γ ;

– sinon, soit $X_f = \varprojlim_{r\in\mathbb{N}} (X/\underline{t}^r X)_f$.

Alors, i) X_f est aussi la réunion des sous-$K_\infty[[\underline{t}]]$-modules de type fini de X stables par Γ,

ii) l'application L_{dR}^+-linéaire

$$\rho_f(X) : L_{dR}^+ \otimes_{K_\infty[[\underline{t}]]} X_f \to X$$

déduite, par extension des scalaires, de l'inclusion de X_f dans X est un isomorphisme.

Preuve : Il est clair qu'il suffit de prouver (ii) pour les représentations de longueur finie.

Soient X' et X'' deux L_{dR}^+-représentations de Γ. On note $\mathrm{Ext}^1(X'', X')$ (resp. $\mathrm{Ext}^1_{L_{dR}^+}(X'', X')$ le groupe des classes d'extensions de X'' par X' dans la catégorie $\mathrm{Rep}_{L_{dR}^+}(\Gamma)$ (resp. dans la catégorie des L_{dR}^+-modules. Le noyau $\mathrm{Ext}^1_0(X'', X')$ de l'application naturelle de $\mathrm{Ext}^1(X'', X')$ dans $\mathrm{Ext}^1_{L_{dR}^+}(X'', X')$ classifie les extensions de X'' par X' qui sont scindées en tant qu'extensions de L_{dR}^+-modules.

Disons que X est de type f si $\rho_f(X)$ est bijective. C'est le cas si X est tué par $\underline{t}$ (th. 2.4). Par récurrence sur la longueur, on en déduit que $\rho_f(X)$ est toujours injective et que $\dim_{K_\infty} X_f \le \lg_{L_{dR}^+} X$ avec égalité si et seulement si X est de type f. On en déduit qu'être de type f est stable par somme-directe, sous-objet, quotient.

Il en résulte que, si X' et X'' sont de type f, le sous-ensemble $\mathrm{Ext}^1_f(X'', X')$ de $\mathrm{Ext}^1(X'', X')$ qui classifie les extensions de X'' par X' qui sont de type f est en fait un sous-groupe. Si $\mathrm{Ext}^1_{0,f}(X'', X') = \mathrm{Ext}^1_0(X'', X') \cap \mathrm{Ext}^1_f(X'', X')$, on a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & \mathrm{Ext}^1_{0,f}(X'', X') & \to & \mathrm{Ext}^1_f(X'', X') & \to & \mathrm{Ext}^1_{L_{dR}^+}(X'', X') \\ & & \cap & & \cap & & \| \\ 0 & \to & \mathrm{Ext}^1_0(X'', X') & \to & \mathrm{Ext}^1(X'', X') & \to & \mathrm{Ext}^1_{L_{dR}^+}(X'', X') \end{array}$$

dont les lignes sont exactes.

On va montrer que X est de type f par récurrence sur le plus petit entier r tel que X est tué par $\underline{t}^r$. Comme c'est vrai pour $r = 1$, on peut supposer $r \ge 2$. Posons alors

$X' = \underline{t}^{r-1}X$, $X'' = X/X'$ et $\overline{X} = X/\underline{t}X$. L'hypothèse de récurrence implique que X', X'' et $\overline{X}$ sont de type f et il nous reste à montrer que la classe $[X]$ de X dans $\mathrm{Ext}^1(X'', X')$ appartient en fait à $\mathrm{Ext}^1_f(X'', X')$.

Si Z est un L^+_{dR}-module de type fini, on appelle *base de* Z la donnée d'éléments non nuls $z_1, z_2, \ldots, z_d$ de Z tels que $Z = \oplus_{i=1}^d L^+_{dR} z_i$. Comme X'' est de type f, on peut choisir une base $x_1'', x_2'', \ldots, x_d''$ de X'' formée d'éléments de X''_f. Soit γ_0 un générateur topologique de Γ. On voit qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ et une matrice $(a_{ij}) \in GL_h(K_s[[\underline{t}]])$ telle que $\gamma_0(x_j'') = \sum_{i=1}^d a_{ij} x_i''$ (si l'annulateur de x_i'' est l'idéal de L^+_{dR} engendré par $\underline{t}^{r_i}$, chaque $a_{i,j}$ n'est défini que mod $\underline{t}^{r_i}$, mais rien ne nous interdit de choisir un relèvement).

Pour $1 \leq i \leq d$, on choisit un relèvement x_i de x_i'' dans X ; les x_i forment une base de X. Notons X_0 le L^+_{dR}-module qui est X, muni de l'action semi-linéaire de γ_0 défini par $\gamma_0(x_j) = \sum_{i=1}^d a_{ij} x_i$. Il est clair que cette action s'étend uniquement en une action semi-linéaire continue de Γ sur X_0 qui devient ainsi une L^+_{dR}-représentation de Γ, extension de X'' par X'. On voit que sa classe $[X_0] \in \mathrm{Ext}^1_f(X'', X')$ et que $[X]$ et $[X]_f$ ont même image dans $\mathrm{Ext}^1_{L^+_{dR}}(X'', X')$. On a donc $[X] - [X_0] \in \mathrm{Ext}^1_0(X'', X')$ et il suffit de vérifier que $\mathrm{Ext}^1_{0,f}(X'', X') = \mathrm{Ext}^1_0(X'', X')$. Mais $\mathrm{Ext}^1_0(X'', X') = \mathrm{Ext}^1_0(\overline{X}, X')$ et $\mathrm{Ext}^1_{0,f}(X'', X') = \mathrm{Ext}^1_{0,f}(\overline{X}, X')$. Comme $\mathrm{Ext}^1_0(\overline{X}, X')$ est le Ext^1 dans la catégorie des L-représentations de Γ, ceci résulte du théorème 2.4.

Prouvons (i) : Soit X'_f la réunion des sous-$K_\infty[[\underline{t}]]$-modules de type fini de X stables par Γ. L'assertion (ii) implique que X_f est de type fini sur $K_\infty[[\underline{t}]]$, donc que $X_f \subset X'_f$. Pour prouver l'inclusion inverse, on peut supposer X de longueur finie. Il s'agit de vérifier que, si Y est un sous-$K_\infty[[\underline{t}]]$-module de type fini de X stable par Γ, alors Y est réunion de ses sous-K-espaces vectoriels de dimension finie stable par Γ. Soient r un entier tel que $\underline{t}^r$ annule X et $y_1, y_2, \ldots, y_h$ des éléments de Y engendrant Y comme $K_\infty[[\underline{t}]]$-module. Si γ_0 est un générateur topologique de Γ, il existe des $a_{i,j,l} \in K_\infty$, pour $1 \leq i, j \leq h$ et $0 \leq l < r$ tels que $\gamma_0(y_j) = \sum_{1 \leq j \leq h, 0 \leq l < r} a_{i,j,l} \underline{t}^l y_j$. Soit $s_0 \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que les $a_{i,j,l}$ sont tous dans K_{s_0}. Pour tout entier $s \geq s_0$, le sous-$K_s[\underline{t}]/\underline{t}^r$-module de Y engendré par les y_i est stable par γ_0, donc aussi par Γ. Mais chaque Y_s est de dimension finie sur K et Y est la réunion des Y_s, d'où le résultat. □

3.4 - Etude des $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentations

Notons $\Omega^+_{K_\infty((\underline{t}))/K_\infty}$ le module des K_∞-*différentielles continues logarithmiques de* $K_\infty[[\underline{t}]]$, autrement dit le $K_\infty[[\underline{t}]]$-module libre de rang 1 de base $d\underline{t}/\underline{t}$. Remarquons que cette base ne change pas si l'on remplace $\underline{t}$ par $\lambda\underline{t}$, avec λ un élément non nul de K_∞. Soit Y un $K_\infty[[\underline{t}]]$-module. Se donner une application $\nabla : Y \to Y \otimes \Omega^+_{K_\infty((\underline{t}))/K_\infty}$ revient à se donner une application $\nabla_0 : Y \to Y$: il suffit de poser $\nabla y = \nabla_0 y \otimes d\underline{t}/\underline{t}$ pour tout $y \in Y$.

Nous appelons $K_\infty[[\underline{t}]]$-*module à connexion régulière* la donnée d'un $K_\infty[[\underline{t}]]$-module de type fini Y muni d'une connexion régulière, i.e. d'une application

$$\nabla : Y \to Y \otimes \Omega^+_{K_\infty((\underline{t}))/K_\infty}$$

qui est K_∞-linéaire et vérifie la règle de Leibniz. Il revient au même de demander que l'application $\nabla_0 : Y \to Y$ soit additive et vérifie $\nabla_0(\lambda y) = \frac{d\lambda}{d\underline{t}}\underline{t}y + \lambda\nabla_0 y$, pour $\lambda \in K_\infty[[\underline{t}]]$ et $y \in Y$, ou encore que ∇_0 soit K_∞-linéaire continue et vérifie $\nabla_0(\underline{t}y) = \underline{t}(y + \nabla_0(y))$ pour tout $y \in Y$.

Les $K_\infty[[\underline{t}]]$-modules à connexion régulière forment, de manière évidente, une catégorie abélienne K_∞-linéaire que nous notons $\mathcal{R}_{K_\infty[[\underline{t}]]}$.

Proposition 3.7. — *Soit Y une $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentation de Γ. Il existe une unique connexion régulière ∇ sur Y qui a la propriété que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, et tout $y \in Y$, il existe un sous-groupe ouvert $\Gamma_{r,y}$ de Γ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma_{r,y}$,*

$$\gamma(y) \equiv \exp(\log\chi(\gamma).\nabla_0)(y) \pmod{\underline{t}^r Y} .$$

Preuve : Il est clair que l'on peut supposer que Y est annulé par $\underline{t}^r$ et qu'il s'agit alors de prouver qu'il existe une unique connexion régulière ∇ sur Y telle que, pour tout $y \in Y$, il existe un sous-groupe ouvert Γ_y de Γ tel que, si $\gamma \in \Gamma_y$, alors $\gamma(y) = \exp(\log\chi(\gamma).\nabla_0)(y)$.

Mais Y est alors un K_∞-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action semi-linéaire continue de Γ et, d'après la proposition 2.5, il existe un unique endomorphisme ∇_0 du K_∞-espace vectoriel sous-jacent à Y qui a la propriété requise et il s'agit de vérifier que ∇ est bien une connexion, i.e. que, pour tout $y \in Y$, on a $\nabla_o(\underline{t}y) = \underline{t}(y + \nabla_0(y))$.

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_h$ une *base de* Y, i.e. des éléments non nuls de Y tels que $Y = \oplus_{i=1}^h K_\infty[[\underline{t}]]y_i$. Soit γ_0 un générateur topologique de Γ et soit $r \in \mathbb{N}$ tel que les $\gamma_0(y_i)$ sont tous dans le sous-$K_r[[\underline{t}]]$-module Y_r de Y engendré par les y_i. Alors Y_r est stable par l'action de Γ. On voit que Y_r est stable par ∇_0 et que si l'on choisit un $\sigma \in \Gamma$, différent de l'élément-neutre mais suffisamment petit, l'action de σ sur Y_r est K_r-linéaire et la série $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1}(\sigma - 1)^n/n$ converge vers un endomorphisme f du K_r-espace vectoriel sous-jacent à Y_r qui s'identifie à la restriction à Y_r de $\log\chi(\sigma).\nabla_0$.

Pour tout $y \in Y_r$, on a $\sigma(\underline{t}y) = \chi(\sigma)\sigma(y)\underline{t}$, donc $\sigma(\underline{t}Y_r) \subset \underline{t}Y_r$. On en déduit que $f(\underline{t}Y_r) \subset \underline{t}Y_r$ et que $f(\underline{t}y) = \underline{t}(\log\chi(\sigma).y + f(y))$, ou encore que

$$\log\chi(\sigma).\nabla_0(\underline{t}y) = \underline{t}(\log\chi(\sigma) + \log\chi(\sigma)\nabla_0(y))$$

d'où l'égalité cherchée pour $y \in Y_r$ et le cas général s'en déduit par extension des scalaires de K_r à K_∞. $\square$

La correspondance qui à tout $K_\infty[[\underline{t}]]$-module de type fini Y muni d'une action semi-linéaire continue de Γ associe Y muni d'une connexion régulière peut être considérée comme un foncteur additif, K-linéaire, exacte et fidèle de la catégorie K-linéaire $\mathrm{Rep}_{K_\infty[[\underline{t}]]}(\Gamma)$ dans la catégorie K_∞-linéaire $\mathcal{R}_{K_\infty[[\underline{t}]]}$. La proposition 2.6 se généralise :

Proposition 3.8. — *Soient Y_1, Y_2 deux $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentations de Γ.*

i) Le K-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty[[\underline{t}]]}(\Gamma)}(Y_1, Y_2)$ est de dimension finie inférieure ou égale à $\dim_{K_\infty} Y_1/\underline{t}Y_1 \times \dim_{K_\infty} Y_2/\underline{t}Y_2$ et l'application K_∞-linéaire naturelle

$$K_\infty \otimes_K \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty[[\underline{t}]]}(\Gamma)}(Y_1, Y_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_{K_\infty[[\underline{t}]]}}(Y_1, Y_2)$$

est un isomorphisme.

ii) Pour que Y_1 et Y_2 soient isomorphes comme $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentations de Γ, il faut et il suffit qu'il existe un isomorphisme $f : Y_1 \to Y_2$ des $K_\infty[[\underline{t}]]$-modules sous-jacents qui est horizontal (i.e. vérifie $f(\nabla_0 y) = \nabla_0(f(y))$ pour tout $y \in Y_1$).

Preuve : Montrons d'abord (i). Soit Y le $K_\infty[[\underline{t}]]$-module des applications $K_\infty[[\underline{t}]]$-linéaires de Y_1 dans Y_2. Il est muni d'une action naturelle de Γ (en posant $\gamma(\eta) = \gamma \circ \eta \circ \gamma^{-1}$, pour $\gamma \in \Gamma$ et $\eta \in Y$) et d'une connexion régulière définie par $\nabla(\eta) = \nabla \circ \eta - \eta \circ \nabla$. On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_\infty \otimes_K \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty[[\underline{t}]]}(\Gamma)}(Y_1, Y_2) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_{K_\infty[[\underline{t}]]}}(Y_1, Y_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_\infty \otimes_K \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty[[\underline{t}]]}(\Gamma)}(K_\infty[[\underline{t}]], Y) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_{K_\infty[[\underline{t}]]}}(K_\infty[[\underline{t}]], Y) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des isomorphismes. On peut donc remplacer Y_1 par $K_\infty[[\underline{t}]]$ et Y_2 par Y. On voit aussi que l'on peut supposer que Y est annulé par une puissance de $\underline{t}$, le cas général s'en déduisant par passage à la limite. Mais $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty[[\underline{t}]]}(\Gamma)}(K_\infty[[\underline{t}]], Y)$ s'identifie à Y^Γ tandis que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_{K_\infty[[\underline{t}]]}}(K_\infty[[\underline{t}]], Y)$ s'identifie à $Y_{\nabla=0} = \mathrm{Ker}\nabla_0$. Il s'agit donc de prouver que l'application naturelle $\rho : K_\infty \otimes_K Y^\Gamma \to \mathrm{Ker}\nabla_0$ est bijective. Mais Y^Γ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma)}(K_\infty, Y)$ tandis que $\mathrm{Ker}\nabla_0$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_{K_\infty}}(K_\infty, Y)$ et c'est l'assertion (i) de la proposition 2.6.

Pour prouver l'inégalité annoncée sur la dimension de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty[[\underline{t}]]}(\Gamma)}(Y_1, Y_2)$, il suffit donc de prouver que $\dim_{K_\infty} Y_{\nabla=0} \leq \dim_{K_\infty} Y/\underline{t}Y$, ce qui résulte de ce que l'application $K_\infty[[\underline{t}]]$-linéaire $K_\infty[[\underline{t}]] \otimes_{K_\infty} Y_{\nabla=0} \to Y$ est injective.

Pour prouver (ii), il suffit d'adapter la preuve de l'assertion (ii) de la proposition 2.6 (i.e. du lemme 2.7) : La condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soit $\{y_1, y_2, \ldots, y_h\}$ (resp. $\{z_1, z_2, \ldots, z_{h'}\}$ une base de Y_1 (resp. Y_2) sur $K_\infty[[\underline{t}]]$ et soit $f : Y_1 \to Y_2$ un isomorphisme dans la catégorie $\mathcal{R}_{K_\infty[[\underline{t}]]}$. Le fait que f existe implique déjà que $h' = h$ et qu'une application $K_\infty[[\underline{t}]]$-linéaire de Y_1 dans Y_2 est un isomorphisme si et seulement si sa réduction modulo $\underline{t}$ est injective. Soit $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ une base de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty[[\underline{t}]]}(\Gamma)}(Y_1, Y_2)$ sur K. Pour $1 \leq j \leq n$, il existe une matrice carrée $A_j = (a_{rs}^j)_{1 \leq r,s \leq h}$ (pas uniquement déterminée si Y_1 et Y_2 ne sont pas libres) tels que $f_j(y_s) = \sum_{r=1}^h a_{rs}^j z_r$. Soient $P(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \det(X_1 A_1 + X_2 A_2 + \ldots + X_n A_n) \in K_\infty[[\underline{t}]][X_1, X_2, \ldots, X_n]$ et $\overline{P}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ son image dans $K_\infty[X_1, X_2, \ldots, X_n]$. Il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in K_\infty$ tels que $f = \sum \lambda_j f_j$, ce qui implique que $\overline{P}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ n'est pas nul. Comme le corps K est infini, il existe donc $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in K$ tels que $\overline{P}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \neq 0$, ce qui signifie que la réduction modulo $\underline{t}$ de l'application $f' = \sum \mu_j f_j$, qui est un homomorphisme dans la catégorie $\mathrm{Rep}_{K_\infty[[\underline{t}]]}(\Gamma)$, est un isomorphisme. Il en est de même de f'. □

Soit W une B_{dR}^+-représentation de G_K. Alors W^{H_K} est une L_{dR}^+-représentation de Γ et $(W^{H_K})_f$ est une $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentation de Γ. Notons $\Delta_{dR}^+(W)$ l'objet de $\mathcal{R}_{K_\infty[[\underline{t}]]}$ formé du $K_\infty[[\underline{t}]]$-module sous-jacent à $(W^{H_K})_f$, muni de la connexion régulière ∇ définie par la proposition 3.7. On peut considérer Δ^+_{dR} comme un foncteur de la catégorie $\mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)$ dans $\mathcal{R}_{K_\infty[[\underline{t}]]}$. Ce foncteur est exact et fidèle et la proposition précédente montre que la connaissance de $\Delta^+_{dR}(W)$ détermine W à isomorphisme près.

Remarquons aussi qu'une C-représentation W de G_K n'est autre qu'une B^+_{dR}-représentation tuée par $\underline{t}$, de même qu'un objet de la catégorie $\mathcal{S}_{K_\infty}$ n'est autre qu'un objet de $\mathcal{R}_{K_\infty[[\underline{t}]]}$ tué par $\underline{t}$. Pour toute C-représentation W de G_K, $\Delta^+_{dR}(W)$ s'identifie à $\Delta_{\mathrm{Sen}}(W)$.

Remarques : 1 – Ce que l'on a fait dans le paragraphe précédent pour étudier les B^+_{dR}-représentations de G_K fonctionne exactement de la même façon lorsque l'on remplace B^+_{dR} par l'anneau $\hat{B}^+_{HT} = C[[t]]$:

Posons $\hat{L}^+_{HT} = (\hat{B}^+_{HT})^{H_K}$. On a $\hat{L}^+_{HT} = L[[\underline{t}]]$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'application naturelle $\hat{L}^+_{HT} \to (\hat{B}^+_{HT}/t^r \hat{B}^+_{HT})^{H_K}$ est surjective, de noyau engendré par $\underline{t}^r$.

Pour toute $\hat{B}^+_{HT}$-représentation W de H_K, l'application évidente

$$\hat{B}^+_{HT} \otimes_{\hat{L}^+_{HT}} W^{H_K} \to W$$

est un isomorphisme.

Soit X une $\hat{L}^+_{HT}$-représentation de G_K. Si X est de longueur finie, notons X_f la réunion des sous-K-espaces vectoriels de dimension finie de X stable par G_K ; sinon, posons $X_f = \varprojlim_{r\in\mathbb{N}} (X/\underline{t}^r X)_f$. Dans tous les cas, l'application évidente

$$\hat{L}^+_{HT} \otimes_{K_\infty[[\underline{t}]]} X_f \to X$$

est un isomorphisme.

On dispose alors d'un foncteur $\Delta^+_{HT} : \mathrm{Rep}_{\hat{B}^+_{HT}}(G_K) \to \mathcal{R}_{K_\infty[[\underline{t}]]}$. C'est celui qui à W associe $(W^{H_K})_f$ muni de la connexion ∇ définie par la proposition 3.7 et, pour toute $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentation W de G_K, $\Delta^+_{HT}(W)$ détermine W à isomorphisme près.

2 – Soit alors W une B^+_{dR}-représentation de G_K. Elle est munie d'une filtration naturelle, indexée par $\mathbb{N}$, par des sous-objets dans la catégorie $\mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)$ obtenue en posant $\mathrm{Fil^r W} = \underline{t}^{\mathrm{r}}\mathrm{W}$. Alors $\mathrm{gr}W = \prod_{r=0}^{\infty} \mathrm{Fil^r W/Fil^{r+1} W}$ est de façon naturelle une $\hat{B}^+_{HT}$-représentation de G_K.

La filtration sur W en induit une sur $\Delta^+_{dR}(W)$ et

$$\mathrm{gr}\Delta^+_{dR}(W) = \prod_{r\in\mathbb{N}} \mathrm{Fil^r}\Delta^+_{\mathrm{dR}}(\mathrm{W})/\mathrm{Fil^{r+1}}\Delta^+_{\mathrm{dR}}(\mathrm{W})$$

est encore un $K_\infty[[\underline{t}]]$-module de type fini. La formule $\nabla_0(\underline{t}y) = \underline{t}(y + \nabla_0(y))$ montre que $\nabla_0(\mathrm{Fil^r}(\Delta^+_{\mathrm{dR}}(\mathrm{W})) \subset \Delta^+_{\mathrm{dR}}(\mathrm{W})$, pour tout $r \in \mathbb{N}$. Ceci permet de définir une application $\mathrm{gr}\nabla_0 : \mathrm{gr}\Delta^+_{dR}(W)$ sur $\mathrm{gr}\Delta^+_{dR}(W)$ d'où une connexion régulière $\mathrm{gr}\nabla$ sur ce module (en posant $\mathrm{gr}\nabla(y) = \mathrm{gr}\nabla_0 \otimes d\underline{t}/\underline{t}$). On voit que $\Delta^+_{HT}(\mathrm{gr}(W))$ s'identifie à $\mathrm{gr}\Delta^+_{dR}(W)$ muni de la connexion $\mathrm{gr}\nabla$.

3 – Il n'est pas difficile de voir que, si W est comme ci-dessus, les $K_\infty[[\underline{t}]]$-modules à connexion régulière $\Delta_{dR}^{+}(W)$ et $\Delta_{HT}^{+}(\mathrm{gr}(W)) = \mathrm{gr}\Delta_{dR}^{+}(W)$ ne sont pas en général isomorphes. On remarquera aussi que ce dernier module à connexion a une structure naturelle de $K_\infty[[\underline{t}]]$-module gradué et que la connexion $\mathrm{gr}\nabla$ respecte cette graduation (i.e., si on note Y ce module, on a $\mathrm{gr}\nabla_0(\mathrm{gr}^r Y) \subset \mathrm{gr}^r Y$, pour tout $r \in \mathbb{N}$.

3.5 – Etude des B_{dR}-représentations : Première approche

Un *réseau* d'un B_{dR}-espace vectoriel W de dimension finie est un sous-B_{dR}^{+}-module de type fini qui contient une base de W sur B_{dR}.

Si W est une B_{dR}-représentation de H_K (resp. G_K) et si $\mathcal{W}$ est un réseau de W, la continuité de l'action de H_K (resp. G_K) sur W implique qu'il existe un sous-groupe ouvert U de H_K (resp. G_K) tel que $g(w) \in \mathcal{W}$, pour tout $g \in U$ et $w \in \mathcal{W}$; par conséquent $\sum_{g\in H_K} g(\mathcal{W})$ (resp. $\sum_{g\in G_K} g(\mathcal{W})$) est encore un réseau de W.

Ceci montre que toute B_{dR}-représentation W de H_K (resp. G_K) admet un réseau stable par G_K.

De la même façon, et avec une définition évidente, on voit que toute L_{dR}-représentation de Γ admet un réseau stable par Γ.

Le résultat suivant est alors une conséquence immédiate des théorèmes 3.5 et 3.6 :

THÉORÈME 3.9. — *i) Soit W une B_{dR}-représentation de H_K. L'application B_{dR}-linéaire*

$$B_{dR} \otimes_{L_{dR}} W^{H_K} \to W$$

déduite, par extension des scalaires, de l'inclusion de W^{H_K} dans W est un isomorphisme.

ii) Soit X une L_{dR}-représentation de Γ. Soit X_f la réunion des sous-$K_\infty[[\underline{t}]]$-modules de type fini de X stables par Γ. C'est un sous-$K_\infty((\underline{t}))$-espace vectoriel de X de dimension finie et l'application naturelle

$$L_{dR} \otimes_{K_\infty((\underline{t}))} X_f \to X$$

est un isomorphisme.

Autrement dit, on a des $\otimes$-équivalences de catégories

i) entre $\mathrm{Rep}_{B_{dR}}(H_K)$ et la catégorie des L_{dR}-espaces vectoriels de dimension finie,

ii) entre $\mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K)$, $\mathrm{Rep}_{L_{dR}}(\Gamma)$ et $\mathrm{Rep}_{K_\infty((\underline{t}))}(\Gamma)$.

Soit E un corps de caractéristique 0. On considère le corps $E((\underline{t}))$ des séries formelles à coefficients dans E en l'indéterminée $\underline{t}$. Un *réseau* d'un $E((\underline{t}))$-espace vectoriel Y de dimension finie est un sous-$E[[\underline{t}]]$-module de type fini contenant une base de Y sur $E((\underline{t}))$.

On note $\Omega_{E((\underline{t}))/E}$ le $E((\underline{t}))$-espace vectoriel des E-formes différentielles continues de $E((\underline{t}))$. C'est un $E((\underline{t}))$-espace vectoriel de dimension 1 de base $d\underline{t}/\underline{t}$. Le sous-$E[[\underline{t}]]$-module $\Omega^{+}_{E((\underline{t}))/E}$ de $\Omega_{E((\underline{t}))/E}$ de base $d\underline{t}/\underline{t}$ est un réseau de $\Omega_{E((\underline{t}))/E}$ qui ne dépend pas du choix de l'uniformisante $\underline{t}$ de $E((\underline{t}))$.

Soit Y un $E((\underline{t}))$-espace vectoriel de dimension finie. Rappelons qu'une *connexion* sur Y est une application E-linéaire $\nabla : Y \to Y \otimes_{E((\underline{t}))} \Omega_{E((\underline{t}))/E}$ vérifiant $\nabla(\lambda y) = y \otimes d\lambda + \lambda \nabla(y)$ pour $\lambda \in E((\underline{t}))$ et $y \in Y$. Se donner une application $\nabla : Y \to Y \otimes \Omega_{E((\underline{t}))/E}$, revient à se donner l'application $\nabla_0 : Y \to Y$ caractérisée par $\nabla(y) = \nabla_0(y) \otimes d\underline{t}/\underline{t}$, pour tout $y \in Y$. Dire que ∇ est une connexion revient à dire que ∇_0 est une application additive vérifiant $\nabla_0(\lambda y) = \frac{d\lambda}{d\underline{t}}\underline{t}y + \lambda \nabla_0 y$ si $\lambda \in E((\underline{t}))$ et $y \in Y$, ou encore est une application E-linéaire continue vérifiant $\nabla_0(\underline{t}y) = \underline{t}(y + \nabla_0 y)$, pour tout $y \in \mathbb{N}$.

Un *module à connexion sur* $E((\underline{t}))$ est un $E((\underline{t}))$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une connexion.

Si Y est un module à connexion sur $E((\underline{t}))$, un *réseau régulier* $\mathcal{Y}$ de Y est un réseau de Y tel que $\nabla(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y} \otimes \Omega^+_{E((\underline{t}))/E}$, ce qui revient à dire que $\nabla_0(Y) \subset Y$. On dit que la connexion ∇ est *régulière* s'il existe un réseau régulier.

Les modules à connexion régulière forment une catégorie abélienne E-linéaire. Elle possède un objet-unité qui est $E((\underline{t}))$ avec $\nabla = d$. On peut définir le produit tensoriel de deux modules à connexions régulières Y_1 et Y_2 : le $E((\underline{t}))$-espace vectoriel sous-jacent est $Y_1 \otimes_{E((\underline{t}))} Y_2$ et $\nabla(y_1 \otimes y_2) = y_1 \otimes \nabla y_2 + \nabla y_1 \otimes y_2$. On peut aussi définir le dual d'un module Y à connexion régulière : le $E((\underline{t}))$-espace vectoriel sous-jacent est le dual Y^* de Y et on a $\nabla \eta = d \circ \eta - (\eta \otimes \mathrm{id}_{\Omega_{E((\underline{t}))/E}}) \circ \nabla$. Avec ces structures supplémentaires, cette catégorie est une catégorie tannakienne sur E que nous notons $\mathcal{R}_{E,\underline{t}}$.

Si Y est un objet de $\mathcal{R}_{E,\underline{t}}$ et si $\mathcal{Y}$ est un réseau régulier de Y, $\mathcal{Y}/\underline{t}\mathcal{Y}$ est un E-espace vectoriel de dimension égale à la dimension de Y sur $E((\underline{t}))$; si $y \in \mathcal{Y}$, et si $\nabla_0 y = z$, l'image $\overline{z}$ de z dans $\mathcal{Y}/\underline{t}\mathcal{Y}$ ne dépend que de l'image $\bar{y}$ de y dans $\mathcal{Y}/\underline{t}\mathcal{Y}$ et ne dépend pas du choix de l'uniformisante $\underline{t}$. L'application

$$\mathrm{res}_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y}/\underline{t}\mathcal{Y} \to \mathcal{Y}/\underline{t}\mathcal{Y} \ ,$$

qui à $\bar{y}$ associe $\bar{z}$, est un endomorphisme du E-espace vectoriel $\mathcal{Y}/\underline{t}\mathcal{Y}$ que l'on appelle le *résidu* de ∇ relativement au réseau régulier $\mathcal{Y}$.

Une *section horizontale* de Y est un élément $y \in Y$ tel que $\nabla y = 0$.

L'application naturelle $E((\underline{t})) \otimes_E Y_{\nabla=0} \to Y$ est toujours injective et on dit que ∇ est *triviale* si elle est bijective, ce qui revient à dire que $\dim_E Y_{\nabla=0} = \dim_{E((\underline{t}))} Y$.

La connexion ∇ est triviale si et seulement s'il existe un réseau régulier, relativement auquel le résidu de la connexion est nulle; ce réseau est alors uniquement déterminé : c'est le réseau engendré par les sections horizontales.

La proposition 3.7 implique immédiatement le résultat suivant :

PROPOSITION 3.10. — *Soit Y une $K_\infty((\underline{t}))$-représentation de Γ. Il existe une unique connexion régulière ∇ sur Y qui a la propriété que, pour tout réseau régulier $\mathcal{Y}$ de Y, tout $r \in \mathbb{N}$ et tout $y \in \mathcal{Y}$, il existe un sous-groupe ouvert $\Gamma_{\mathcal{Y},r,y}$ de Γ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{Y},r,y}$,*

$$\gamma(y) \equiv \exp(\log \chi(\gamma).\nabla_0)(y) \pmod{\underline{t}^r \mathcal{Y}} \ .$$

Le $K_\infty((\underline{t}))$-espace vectoriel sous-jacent à une $K_\infty((\underline{t}))$-représentation de Γ est donc muni d'une connexion régulière et la proposition 3.8 entraîne le résultat suivant :

Proposition 3.11. — *Soient Y_1, Y_2 deux $K_\infty((\underline{t}))$-représentations de Γ.*
i) L'application K_∞-linéaire naturelle

$$K_\infty \otimes_K \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty((\underline{t}))}(\Gamma)}(Y_1, Y_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_{K_\infty,\underline{t}}}(Y_1, Y_2)$$

est un isomorphisme.
ii) Pour que Y_1 et Y_2 soient isomorphes comme $K_\infty((\underline{t}))$-représentations de Γ, il faut et il suffit qu'elles le soient en tant qu'objets de $\mathcal{R}_{K_\infty,\underline{t}}$.

Soit W une B_{dR}-représentation de G_K. Alors W^{H_K} est une L_{dR}-représentation de Γ et $(W^{H_K})_f$ est une $K_\infty((\underline{t}))$-représentation de Γ. Notons $\Delta_{dR}(W)$ l'objet de $\mathcal{R}_{K_\infty,\underline{t}}$ formé du $K_\infty((\underline{t}))$-espace vectoriel sous-jacent à $(W^{H_K})_f$, muni de la connexion régulière ∇ définie par la proposition 3.10. On peut considérer Δ_{dR} comme un foncteur de la catégorie $\mathrm{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K)$ dans $\mathcal{R}_{K_\infty,\underline{t}}$. L'énoncé suivant est évident :

Théorème 3.12. — *Le foncteur*

$$\Delta_{dR} : \mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K) \to \mathcal{R}_{K_\infty,\underline{t}}$$

est un $\otimes$-foncteur exact et fidèle.
Si W_1 et W_2 sont deux B_{dR}-représentations de G_K, l'application naturelle

$$K_\infty \otimes_K \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K)}(W_1, W_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_{K_\infty,\underline{t}}}(\Delta_{dR}(W_1), \Delta_{dR}(W_2))$$

est un isomorphisme.
Si W est une B_{dR}-représentation de G_K, la connaissance de $\Delta_{dR}(W)$ détermine W à isomorphisme près. En particulier, W est triviale si et seulement si $\Delta_{dR}(W)$ l'est.

Remarque : Pour toute B_{dR}-représentation W de G_K, notons $\Delta_{dR,f}(W)$ la réunion des sous-K-espaces vectoriels de dimension finie de W^{H_K} stables par Γ. C'est aussi la réunion des sous-K_∞-espaces vectoriels de dimension finie de $\Delta_{dR}(W)$ stables par ∇_0. On verra au §3.8 que $\Delta_{dR,f}(W)$ est un $K_\infty[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]$-module libre de rang h et que l'application naturelle $K_\infty((\underline{t})) \otimes_{K_\infty[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} \Delta_{dR,f}(W) \to \Delta_{dR}(W)$ est un isomorphisme.

3.6 – Etude des B_{dR}-représentations : Deuxième approche

Reprenons les notations des §2.4 à 2.6. Si $r \in \mathbb{N}$ et si X est un sous-groupe de $\mathfrak{a}_r$ stable par G_K et contenant $\mathbb{Z}$, les K-algèbres $\mathcal{B}_{K,X}$ et B_{dR} contiennent toutes deux la K-algèbre $\mathcal{B}^m_{K,\mathbb{Z}} = K[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]$ avec la même action de $G_{K,r}$. Posons aussi $B_{dR,X} = B_{dR} \otimes_{\mathcal{B}^m_{K,\mathbb{Z}}} \mathcal{B}_{K,X}$. Pour toute B_{dR}-représentation de G_K, on pose

$$D_{dR,X,r}(W) = (\mathcal{B}_{K,X} \otimes_{\mathcal{B}^m_{K,\mathbb{Z}}} W)^{G_{K,r}} = (B_{dR,X} \otimes_{B_{dR}} W)^{G_{K,r}} \ .$$

THÉORÈME 3.13. — *Soient $r \in \mathbb{N}$ et X un sous-groupe de $\mathfrak{a}_r$ stable par G_K et contenant $\mathbb{Z}$. Soit W une B_{dR}-représentation de G_K. L'application évidente*

$$\rho_{dR,X,r}(W) : B_{dR,X} \otimes_{K_r} D_{dR,X,r}(W) \to \mathcal{B}_{K,X} \otimes_{\mathcal{B}^m_{K,\mathbb{Z}}} W$$

est injective et $D_{dR,X,r}(W)$ est un K_r-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à la dimension de W sur B_{dR}.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) on a $\dim_{K_r} D_{dR,X,r}(W) = \dim_{B_{dR}} W$

ii) l'application $\rho_{dR,X,r}(W)$ est bijective,

iii) il existe un réseau $\mathcal{W}$ de W stable par G_K tel que la C-représentation $\mathcal{W}/\underline{t}\mathcal{W}$ est de type S_X,

iv) pour tout réseau $\mathcal{W}$ de W stable par G_K, la C-représentation $\mathcal{W}/\underline{t}\mathcal{W}$ est de type S_X.

Preuve : Si $\alpha \in \overline{K}$ et $g \in G_K$ sont tels que $g(\alpha) - \alpha \in \mathbb{Z}$, on a nécessairement $g(\alpha) = \alpha$. On en déduit que l'on peut choisir un système de représentants S de $X/\mathbb{Z}$ dans X, stable par G_K.

Notons alors E l'ensemble des éléments de $B_{dR,X}$ de la forme $t^{(\alpha)}(\log t)^m$, avec $\alpha \in S$ et $m \in \mathbb{N}$ et $B^+_{dR,X}$ le sous-B^+_{dR}-module de $B_{dR,X}$ engendré par les éléments de E. On voit que $B^+_{dR,X}$ est un sous-B^+_{dR}-module libre stable par G_K de $B_{dR,X}$, que E est une base de $B_{dR,X}$ sur B_{dR} et de $B^+_{dR,X}$ sur B^+_{dR}, que $B_{dR,X} = B^+_{dR,X}[1/\underline{t}]$.

Le choix de S nous permet aussi de décomposer la C-algèbre $B_X = C \otimes_K \mathcal{B}_{K,X}$ introduite au §2.6 en somme directe $B_X = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{gr}^i B_X$, de sous-$C$-espaces vectoriels stables par G_K en posant $\mathrm{gr}^i B_X = \oplus_{\alpha \in S, m \in \mathbb{N}} C t^{(\alpha+i)}(\log t)^m$. En particulier, pour toute C-représentation U de G_K, on a $D_{X,r}(U) = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{gr}^i D_{X,r}(W)$ en posant $\mathrm{gr}^i D_{X,r}(W) = (\mathrm{gr}^i B_X \otimes_C U)^{G_{K,r}}$.

Choisissons un réseau $\mathcal{W}$ de W stable par G_K et posons $D_{dR,X,r}(\mathcal{W}) = D_{dR,X,r}(W)$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, posons

$$\mathrm{Fil}^i \mathrm{D}_{\mathrm{dR,X,r}}(\mathcal{W}) = (\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR,X}} \underline{\mathrm{t}}^{\mathrm{i}} \otimes_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}} \mathcal{W})^{\mathrm{G_{K,r}}} .$$

Ce sont des sous-K_r-espaces vectoriels de $D_{dR,X,r}(\mathcal{W})$ qui définissent une filtration décroissante (i.e. $\mathrm{Fil}^{i+1}\mathrm{D}_{\mathrm{dR,X,r}}(\mathcal{W}) \subset \mathrm{Fil}^i\mathrm{D}_{\mathrm{dR,X,r}}(\mathcal{W})$) exhaustive (i.e. $\cup \mathrm{Fil}^i\mathrm{D}_{\mathrm{dR,X,r}}(\mathcal{W}) = \mathrm{D}_{\mathrm{dR,X,r}}(\mathcal{W})$) et séparée (i.e. $\cap \mathrm{Fil}^i\mathrm{D}_{\mathrm{dR,X,r}}(\mathcal{W}) = 0$). Soit $\overline{\mathcal{W}} = \mathcal{W}/\underline{t}\mathcal{W}$. C'est un C-espace vectoriel de dimension finie h égale à la dimension de W sur B_{dR}. On voit que le quotient $\mathrm{gr}^i D_{dR,X,r}(\mathcal{W}) = \mathrm{Fil}^i\mathrm{D}_{\mathrm{dR,X,r}}(\mathcal{W})/\mathrm{Fil}^{i+1}\mathrm{D}_{\mathrm{dR,X,r}}(\mathcal{W})$ s'identifie à un sous-K_r-espace vectoriel de $\mathrm{gr}^i D_{X,r}(\overline{\mathcal{W}})$, donc que $\mathrm{gr} D_{dR,X,r}(\mathcal{W})$ s'identifie à un sous-K_r-espace vectoriel de $D_{X,r}(\overline{\mathcal{W}})$. On a $\dim_{K_r} D_{dR,X,r}(W) = \dim_{K_r} \mathrm{gr} D_{dR,X,r}(\mathcal{W}) \leq \dim_{K_r} D_{X,r}(\overline{\mathcal{W}}) \leq h$ d'où $\dim_{K_r} D_{dR,X,r}(W) \leq h$ et l'égalité implique que $\overline{\mathcal{W}}$ est de type S_X.

On définit une filtration indexée par $\mathbb{Z}$, décroissante, exhaustive et séparée, sur $B_{dR,X} \otimes_{K_r} D_{dR,X,r}(\mathcal{W})$ en posant

$$\mathrm{Fil}^{\mathrm{i}}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR,X}} \otimes_{\mathrm{K_r}} \mathrm{D}_{\mathrm{dR,X,r}}(\mathcal{W})) = \sum_{\mathrm{i}_1+\mathrm{i}_2=\mathrm{i}} \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR,X}} \underline{\mathrm{t}}^{\mathrm{i}_1} \otimes_{\mathrm{K_r}} \mathrm{Fil}^{\mathrm{i}_2} \mathrm{D}_{\mathrm{dR,X,r}}(\mathcal{W}) \ .$$

L'application $\rho_{dR,X}(W)$ envoie $\mathrm{Fil}^{\mathrm{i}}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR,X}} \otimes_{\mathrm{K_r}} \mathrm{D}_{\mathrm{dR,X,r}}(\mathcal{W})$ dans $B^+_{dR,X}\underline{t}^i \otimes_{B^+_{dR}} \mathcal{W}$ et induit, avec des notations évidentes, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Fil}^{\mathrm{i+1}}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR,X}} \otimes_{\mathrm{K_r}} \mathrm{D}_{\mathrm{dR,X,r}}(\mathcal{W})) & \to & B^+_{dR,X}\underline{t}^{i+1} \otimes_{B^+_{dR}} \mathcal{W} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Fil}^{\mathrm{i}}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR,X}} \otimes_{\mathrm{K_r}} \mathrm{D}_{\mathrm{dR,X,r}}(\mathcal{W})) & \to & B^+_{dR,X}\underline{t}^{i} \otimes_{B^+_{dR}} \mathcal{W} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{gr}^i(B_X \otimes_{K_r} D_{X,r}(\overline{\mathcal{W}}) & \to & \mathrm{gr}^i B_X \otimes_C \overline{\mathcal{W}}
\end{array}$$

L'injectivité de la flèche horizontale du bas pour tout i (cf. §2.6) implique celle de $\rho_{dR,X}(W)$.

Ces diagrammes commutatifs nous montrent aussi l'équivalence des propriétés (i) et (ii). Comme on sait déjà que (i) implique (iv) et comme (iv) implique trivialement (iii), il nous reste à vérifier que (iii) implique (i). Il suffit de vérifier que, étant donné $i \in \mathbb{Z}$ et un élément non nul $b \in (\mathrm{gr}^i B_X \otimes_C \overline{\mathcal{W}})^{G_{K,r}}$, alors b se relève en un élément de $(B^+_{dR,X}\underline{t}^i \otimes_{B^+_{dR}} \mathcal{W})^{G_{K,r}}$. Quitte à changer $\mathcal{W}$ en $\mathcal{W}(-i)$, on peut supposer $i = 0$.

Lemme 3.14. — *Soient $r \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{V}$ un B^+_{dR}-module libre de rang fini muni d'une action linéaire et continue de G_K et $\overline{\mathcal{V}} = \mathcal{V}/\underline{t}\mathcal{V}$. L'application naturelle*

$$(B^+_{dR}[\log t] \otimes_{B^+_{dR}} \mathcal{V})^{G_K} \to (C[\log t] \otimes_{B^+_{dR}} \overline{\mathcal{V}})^{G_K}$$

est surjective.

Le lemme implique ce que l'on veut : Supposons d'abord que $X \subset K_r$. Alors, pour tout $\alpha \in X$, $C[\log t]t^{(\alpha)} \subset \mathrm{gr}^0 B_X$ et $B^+_{dR}[\log t]t^{(\alpha)} \subset B^+_{dR,X}$ sont stables par $G_{K,r}$. On peut écrire $b = \sum_{\alpha \in X} t^{(\alpha)} \otimes b_\alpha$, avec les $b_\alpha \in C[\log t] \otimes_C \overline{\mathcal{W}}$ presque tous nuls et chaque $t^\alpha \otimes b_\alpha \in (\mathrm{gr}^0 B_X \otimes_C \overline{\mathcal{W}})^{G_{K,r}}$. Quitte à décomposer b en somme des $t^{(\alpha)} \otimes b_\alpha$, on peut supposer qu'il existe α tel que $b = t^{(\alpha)} \otimes b_\alpha$. Quitte à remplacer W par $W \otimes_{B_{dR}} B_{dR} t^{(-\alpha)}$, on peut supposer $\alpha = 0$ et le lemme permet de conclure.

Dans le cas général, on peut remplacer X par le sous-$\mathbb{Z}$-module de $\overline{K}$ engendré par $\mathbb{Z}$ et les poids de Sen de $\overline{\mathcal{W}}$; en particulier, on peut supposer que X est de type fini sur $\mathbb{Z}$. Choisissons alors une extension finie galoisienne L de K contenue dans $\overline{K}$ telle que $X \subset L_r$. Avec des notations évidentes, soient $D = (B^+_{dR,X} \otimes_{B^+_{dR}} \mathcal{W}))^{G_{L,r}}$, $D'' = (\mathrm{gr}^0 B_X \otimes_C \overline{\mathcal{W}})^{G_{L,r}}$ et D' le noyau de l'application L_r-linéaire évidente de D dans D''. On a une suite exacte

$$0 \to D' \to D \to D'' \to 0 \ .$$

Mais D' comme D et D'' est un L_r-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action semi-linéaire de $J = \mathrm{Gal}(L_r/K_r)$. Si D' est de dimension h', le choix d'une base de D' sur L_r permet d'identifier D' à $L_r^{h'}$ et l'action de J est alors définie par un 1-cocycle de J à valeurs dans $GL_{h'}(L_r)$ et la trivialité de $H^1(J, GL_{h'}(L_r))$ montre que $D' \simeq (L_r)^{h'}$ en tant que K_r-espace vectoriel avec action de J. Comme $H^1(J, L_r) = 0$, $H^1(J, D') = 0$ et l'application $(B^+_{dR,X} \otimes \mathcal{W})^{G_{K,r}} = D^J \to (\mathrm{gr}^0 B_X \otimes \overline{\mathcal{W}})^{G_{K,r}} = (D'')^J$ est bien surjective. □

Preuve du lemme : Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ les poids de Sen de $\overline{\mathcal{V}}$. Pour tout entier i les poids de $\overline{\mathcal{V}}(i)$ sont les $\alpha_n + i$ et il n'y a qu'un nombre fini de $i \in \mathbb{N}$ tels que 0 est poids de Sen de $\overline{\mathcal{W}}(i)$. Par passage à la limite, le lemme 3.14 se déduit du lemme suivant :

LEMME 3.15. — *Soient r et $\mathcal{V}$ comme dans le lemme précédent. Pour i et d entiers > 0, notons $B_i(0; d)$ l'ensemble des polynômes de degré $< d$ en $\log t$ à coefficients dans B_i. Alors*

i) si $i \geq 1$ est tel que 0 n'est pas poids de Sen de $\overline{\mathcal{V}}(i)$, pour tout $d \geq 1$, l'application naturelle

$$(B_{i+1}(0; d) \otimes_{B^+_{dR}} \mathcal{V})^{G_K} \to (B_i(0; d) \otimes_{B^+_{dR}} \mathcal{V})^{G_K}$$

est bijective.

ii) Quelque soient les entiers $i, d \geq 1$, il existe un entier m tel que tout élément de $(B_i(0; d) \otimes_{B^+_{dR}} \mathcal{V})^{G_K}$ admet un relèvement dans $(B_{i+1}(0; d+m) \otimes_{B^+_{dR}} \mathcal{V})^{G_K}$.

Preuve : On peut supposer $K = K_r$. Remarquons que l'on a une suite exacte

$$0 \to C(i; d) \to B_{i+1}(0; d) \to B_i(0; d) \to 0 \ .$$

Si 0 n'est pas poids de Sen de $\overline{\mathcal{V}}(i)$, il n'est pas non plus poids de Sen de $C(i; d) \otimes \overline{\mathcal{V}}$, et on a donc (prop.2.15), $H^0(G_K, C(i; d) \otimes \overline{\mathcal{V}}) = H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C(i; d) \otimes \overline{\mathcal{V}}) = 0$. L'assertion (i) s'obtient en prenant les invariants sous G_K dans la suite exacte

$$0 \to C(i; d) \otimes_C \overline{\mathcal{V}} \to B_{i+1}(0; d) \otimes_{B^+_{dR}} \mathcal{V} \to B_i(0; d) \otimes_{B^+_{dR}} \mathcal{V} \to 0 \ .$$

Pour prouver (ii), remarquons que, pour tout entier $m \geq 1$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & C(i; d) \otimes_C \overline{\mathcal{V}} & \to & B_{i+1}(0; d) \otimes_{B^+_{dR}} \mathcal{V} & \to & B_i(0; d) \otimes_{B^+_{dR}} \mathcal{V} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & C(i; d+m) \otimes_C \overline{\mathcal{V}} & \to & B_{i+1}(0; d+m) \otimes_{B^+_{dR}} \mathcal{V} & \to & B_i(0; d+m) \otimes_{B^+_{dR}} \mathcal{V} & \to & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes et, induit, en prenant les invariants sous G_K, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} (B_{i+1}(0; d) \otimes_{B^+_{dR}} \mathcal{V})^{G_K} & \to & (B_i(0; d) \otimes_{B^+_{dR}} \mathcal{V})^{G_K} & \to & H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C(i; d) \otimes_C \overline{\mathcal{V}}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (B_{i+1}(0; d+m) \otimes_{B^+_{dR}} \mathcal{V})^{G_K} & \to & (B_i(0; d+m) \otimes_{B^+_{dR}} \mathcal{V})^{G_K} & \to & H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C(i; d+m) \otimes_C \overline{\mathcal{V}}) \end{array}$$

dont les lignes sont encore exactes et il suffit de vérifier que, pour tout entier m suffisamment grand, l'application naturelle

$$H^1_{\text{cont}}(G_K, C(i;d)\otimes\overline{\mathcal{V}}) \to H^1_{\text{cont}}(G_K, C(i;d+m)\otimes\overline{\mathcal{V}})$$

est identiquement nulle.

Mais, pour $d' = d$ ou $d+m$, on a $H^1_{\text{cont}}(G_K, C(i;d')\otimes\overline{\mathcal{V}}) = H^1_{\text{cont}}(G_K, C(0;d')\otimes\overline{\mathcal{V}}(i)) = H^1_{\text{cont}}(G_K, C(0;d')\otimes U)$ en notant U le plus grand sous-C-espace vectoriel de $\overline{\mathcal{V}}(i)$ stable par G_K qui n'a que 0 comme poids de Sen. Mais U est somme d'un nombre fini de C-représentations de G_K isomorphes à des $C(0;r)$ pour des entiers r convenables. Le lemme est donc une conséquence du résultat suivant :

Lemme 3.16. — *Soient d et r des entiers ≥ 1. Pour tout entier $m \geq r$, l'application naturelle*

$$H^1_{\text{cont}}(G_K, C(0;d)\otimes C(0;r)) \to H^1_{\text{cont}}(G_K, C(0;d+m)\otimes C(0;r))$$

est identiquement nulle.

Preuve : Remarquons d'abord que, si s, s' sont des entiers ≥ 1, on a

$$\dim_K \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_C(G_K)}(C(0;s), C(0;s')) = \min\{s,s'\} .$$

Comme $C(0;s)$ est isomorphe à son dual, on a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_C(G_K)}(C(0;s), C(0;s')) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_C(G_K)}(C, C(0;s)\otimes C(0;s')) = H^0(G_K, C(0;s)\otimes C(0;s'))$. On a donc

$$\dim_K H^0(G_K, C(0;s)\otimes C(0;s')) = \min\{s,s'\}$$

et c'est aussi (prop.2.15) la dimension de $H^1_{\text{cont}}(G_K, C(0;s)\otimes C(0;s'))$.

Or on a une suite exacte courte

$$0 \to C(0;d) \to C(0;d+m) \to C(0;m) \to 0$$

qui, en tensorisant avec $C(0;r)$ induit une suite exacte courte

$$0 \to C(0;d)\otimes C(0;r) \to C(0;d+m)\otimes C(0;r) \to C(0;m)\otimes C(0;r) \to 0 ,$$

d'où une suite exacte longue

$$\begin{gathered} 0 \to H^0(G_K, C(0;d)\otimes C(0;r)) \to H^0(G_K, C(0;d+m)\otimes C(0;r)) \to \\ H^0(G_K, C(0;m)\otimes C(0;r)) \to H^1_{\text{cont}}(G_K, C(0;d)\otimes C(0;r)) \to \\ H^1_{\text{cont}}(G_K, C(0;d+m)\otimes C(0;r)) \to H^1_{\text{cont}}(G_K, C(0;m)\otimes C(0;r)) \end{gathered}$$

En comptant les dimensions, on voit que l'application $H^0(G_K, C(0;m)\otimes C(0;r)) \to H^1_{\text{cont}}(G_K, C(0;d)\otimes C(0;r))$ est surjective, ce qui implique que $H^1_{\text{cont}}(G_K, C(0;d)\otimes C(0;r)) \to H^1_{\text{cont}}(G_K, C(0;d+m)\otimes C(0;r))$ est bien nulle. □

Soit W une B_{dR}-représentation de G_K de dimension h. Choisissons un réseau $\mathcal{W}$ de W stable par G_K et posons $\overline{\mathcal{W}} = \mathcal{W}/\underline{t}\mathcal{W}$. Pour toute B_{dR}-représentation W de G_K, on peut poser

$$D_{dR,r}(W) = (\mathcal{B}_{K,r} \otimes_{\mathcal{B}_{K,\mathbb{Z}}} W)^{G_{K,r}} .$$

Compte-tenu du théorème précédent, c'est un K_r-espace vectoriel de dimension finie inférieure ou égale à h avec égalité dès que les poids de Sen de $\overline{\mathcal{W}}$ sont dans $\mathfrak{a}_r$.

La réunion $D_{dR,\infty}(W)$ des $D_{dR,r}(W)$ est alors un sous-K_∞-espace vectoriel de $\mathcal{B}_K \otimes_{\mathcal{B}_{K,\mathbb{Z}}} W$ de dimension h et l'application naturelle

$$B_{dR} \otimes_{K_\infty} D_{dR,\infty}(W) \to \mathcal{B}_K \otimes_{\mathcal{B}_{K,\mathbb{Z}}} W$$

est bijective.

Le groupe $\mathbb{S}_K$ opère sur $\mathcal{B}_K$ par translations à gauche mais cette action ne s'étend pas à $\mathcal{B}_K \otimes_{\mathcal{B}_{K,\mathbb{Z}}} W$ (parce qu'on fait le produit tensoriel au dessus de $\mathcal{B}_{K,\mathbb{Z}}$). En revanche l'action du sous-groupe $\mathbb{DR}_K$ (rappelons, cf. §2.4, que $\mathbb{DR}_K = \mathbb{DR}_K^m \times \mathbb{G}_a$ où $\mathbb{DR}_K^m$ est le groupe multiplicatif de groupe des caractères $\overline{K}/\mathbb{Z}$) s'étend en posant $\sigma(b \otimes w) = \sigma(b) \otimes w$, pour $\sigma \in \mathbb{DR}_K$, $b \in \mathcal{B}_K$ et $w \in W$.

On voit que $D_{dR,\infty}(W)$ est stable par cette action, qui, en fait, est K_∞-linéaire. De façon précise, soient $r \in \mathbb{N}$ et X un sous-groupe de $\overline{K}$, stable par G_K, contenant $\mathbb{Z}$ et les poids de Sen de $\overline{\mathcal{W}}$. Si $\mathbb{DR}_{K,X} = \mathbb{DR}_{K,X}^m \times \mathbb{G}_a$, où $\mathbb{DR}_{K,X}^m$ est le quotient de $\mathbb{DR}_K^m$ de groupe des caractères $X/\mathbb{Z}$, l'action par translations à gauche de $\mathbb{S}_{K,X}$ sur $\mathcal{B}_{K,X}$ induit une action de son sous-groupe $\mathbb{DR}_{K,X}$ qui se prolonge de façon évidente en une action sur $\mathcal{B}_{K,X} \otimes_{\mathcal{B}_{K,\mathbb{Z}}} W$ et $D_{dR,X,r}(W)$ est stable par cette action, qui est K_r-linéaire, ce qui fait que le K_r-espace vectoriel $D_{dR,X,r}(W)$ est muni d'une action du groupe algébrique $\mathbb{DR}_{K,X} \times K_r$. Comme $D_{dR,\infty}(W) = K_\infty \otimes_{K_r} D_{dR,X,r}(W)$, ce K_∞-espace vectoriel est muni d'une action du groupe $\mathbb{DR}_{K,X} \times K_\infty$ quotient de $\mathbb{DR}_{K_\infty} = \mathbb{DR}_K \times K_\infty$.

On peut alors considérer $D_{dR,\infty}$ comme un foncteur, de la catégorie des B_{dR}-représentations de G_K dans la catégorie $\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\mathbb{DR}_K)$ des représentations K_∞-linéaires de dimension finie du groupe algébrique $\mathbb{S}_{K_\infty}$.

Théorème 3.17. — *Le foncteur*

$$D_{dR,\infty} : \mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K) \to \mathrm{Rep}_{K_\infty}(\mathbb{DR}_{K_\infty})$$

est un $\otimes$-foncteur exact et fidèle.

Si W_1 et W_2 sont deux B_{dR}-représentations de G_K, l'application naturelle

$$K_\infty \otimes_K \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K)}(W_1, W_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\mathbb{DR}_{K_\infty})}(D_{dR,\infty}(W_1), D_{dR,\infty}(W_2))$$

est un isomorphisme.

Si W est une B_{dR}-représentation de G_K, la connaissance de $D_{dR,\infty}(W)$ détermine W à isomorphisme près. En particulier, W est triviale si et seulement si $D_{dR,\infty}(W)$ l'est.

Preuve : L'exactitude à gauche du foncteur $D_{dR,\infty}$ est claire. Le fait que, pour toute B_{dR}-représentation W de G_K, on ait $\dim_{K_\infty} D_{dR,\infty}(W) = \dim_{B_{dR}} W$ implique alors que $D_{dR,\infty}$ est exact et fidèle.

On a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K)}(W_1, W_2) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K)}(B_{dR}, W_1^* \otimes W_2)$ tandis que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\mathbb{DR}_{K_\infty})}(D_{dR,\infty}(W_1), D_{dR,\infty}(W_2)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\mathbb{DR}_{K_\infty})}(K_\infty, D_{dR,\infty}(W_1^* \otimes W_2))$. Mais $K_\infty \otimes_K \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K)}(B_{dR}, W)$ s'identifie à $K_\infty \otimes_K W^{G_K}$ et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\mathbb{DR}_{K_\infty})}(D_{dR,\infty}(W_1), D_{dR,\infty}(W_2))$ à $D_{dR,\infty}(W)^{\mathbb{DR}_{K_\infty}}$. Pour r suffisamment grand, on a $D_{dR,\infty}(W) = K_\infty \otimes_{K_r} D_{dR,r}(W)$ donc $D_{dR,\infty}(W)^{\mathbb{DR}_{K_\infty}} = K_\infty \otimes_{K_r} D_{dR,r}(W)^{\mathbb{DR}_{K_r}} = K_\infty \otimes_{K_r} W^{G_{K,r}}$ puisque $(\mathcal{B}_{K,r} \otimes_{\mathcal{B}_{K,\mathbb{Z}}} B_{dR})^{\mathbb{DR}_{K_r}} = B_{dR}$. Montrer que

$$K_\infty \otimes_K \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K)}(W_1, W_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\mathbb{DR}_{K_\infty})}(D_{dR,\infty}(W_1), D_{dR,\infty}(W_2))$$

est un isomorphisme se ramène alors à montrer que l'application $K_\infty \otimes_K W^{G_K} \to K_\infty \otimes_{K_r} W^{G_{K,r}}$ est un isomorphisme, ce qui est clair.

La dernière assertion en résulte grâce au lemme 2.7. $\square$

Il s'impose bien sûr de comparer la classification des B_{dR}-représentations de G_K via les $K_\infty((\underline{t}))$-modules à connexions régulières donnée par le théorème 3.12 avec la classification via les représentations linéaires de $\mathbb{DR}_{K_\infty}$ et c'est ce que nous ferons au §3.8. Mais nous allons auparavant donner la liste des classes d'isomorphismes d'indécomposables dans la catégorie des B_{dR}-représentations de G_K.

3.7 – Classification des B_{dR}-représentations

Pour toute B_{dR}-représentation W de G_K, on appelle *poids de de Rham de* W les poids de $D_{dR,\infty}(W)$ munis de l'action du sous-groupe $\mathbb{DR}^m_{K_\infty}$ de $\mathbb{DR}_{K_\infty}$.

Remarquons (th.3.13) que, si $\mathcal{W}$ est un réseau de W stable par G_K, et si $\overline{\mathcal{W}} = \mathcal{W}/\underline{t}\mathcal{W}$, les poids de de Rham de W sont les $\alpha + \mathbb{Z}$, pour α poids de Sen de $\overline{\mathcal{W}}$. En particulier, les poids de de Rham de W forment un sous-ensemble fini de $\overline{K}/\mathbb{Z}$ stable par G_K.

Soit X un sous-ensemble de $\overline{K}$ stable par G_K et contenant $\mathbb{Z}$. On dit qu'une B_{dR}-représentation W de G_K est de type dR_X si ses poids de de Rham sont dans $X/\mathbb{Z}$. On dit que W est de type dR^m_X si en outre l'action de $\mathbb{DR}_{K_\infty} = \mathbb{DR}^m_{K_\infty} \times \mathbb{G}_a$ sur $D_{dR,\infty}(W)$ se factorise à travers $\mathbb{DR}_{K_\infty}$, i.e. si $\mathbb{G}_a$ opère trivialement.

En particulier, on dit que W est *presque de de Rham* (resp. *est de de Rham*) si elle est de type $dR_\mathbb{Z}$ (resp. $dR^m_\mathbb{Z}$). Dire que W est de de Rham signifie que W est triviale, i.e.. isomorphe à B^h_{dR} pour un entier h convenable. On a $B_{dR,\mathbb{Z}} = B_{dR}[\log t]$ et $B^m_{dR,\mathbb{Z}} = B_{dR}$.

Comme dans le cas des C-représentations (prop.2.11), lorsque X est un sous-groupe, la sous-catégorie pleine $\mathrm{Rep}_{B_{dR},X}(G_K)$ (resp. $\mathrm{Rep}^m_{B_{dR},X}(G_K)$) de $\mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K)$ dont les objets sont les B_{dR}-représentations de type dR_X (resp. dR^m_X) est une sous-catégorie tannakienne. La catégorie $\mathrm{Rep}_{B_{dR},X}(G_K)$ est stable par extension et $\mathrm{Rep}^m_{B_{dR},X}(G_K)$ est la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}_{B_{dR},X}(G_K)$ dont les objets sont ceux qui sont semi-simples.

Rappelons que $\mathcal{C}(\overline{K})$ (resp. $\mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z})$) désigne l'ensemble des orbites de $\overline{K}$ (resp. $\overline{K}/\mathbb{Z}$) et que l'on a construit au §2.6, pour chaque $A \in \mathcal{C}(\overline{K})$, un objet simple $K_\infty[A]$ de la catégorie des K_∞-représentations de Γ dont la K-algèbre des endomorphismes est un corps gauche D_A de centre K_A. Posons alors $K_\infty((\underline{t}))[A] = K_\infty((\underline{t})) \otimes_{K_\infty} K_\infty[A]$ et $B_{dR}[A] = B_{dR} \otimes_{K_\infty} K_\infty[A] = B_{dR} \otimes_{K_\infty((\underline{t}))} K_\infty((\underline{t}))[A]$.

Proposition 3.18. — *Pour tout $A \in \mathcal{C}(\overline{K})$, $K_\infty((\underline{t}))[A]$ est un objet simple de $\mathrm{Rep}_{K_\infty((\underline{t}))}(\Gamma)$ tandis que $B_{dR}[A]$ est un objet simple de $\mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K)$. On a $\mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty((\underline{t}))}(\Gamma)}(K_\infty((\underline{t}))[A]) = \mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K)}(B_{dR}[A]) = D_A$.*

Si $A, A' \in \mathcal{C}(\overline{K})$ et si $\tilde{A}, \tilde{A}'$ désignent leurs images dans $\mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z})$, on a

$$K_\infty((\underline{t}))[A] \simeq K_\infty((\underline{t}))[A'] \Leftrightarrow B_{dR}[A] \simeq B_{dR}[A'] \Leftrightarrow \tilde{A} = \tilde{A}' \ .$$

Preuve : Il suffit de vérifier ces deux assertions pour les C-représentations. Rappelons que l'on a noté p^{2s_A} la dimension de D_A sur K_A. Alors $K_\infty[A]$ est un $K_\infty \otimes_K K_A$-module libre de rang p^{s_A} et on voit qu'il en est de même de $D_{dR,\infty}(B_{dR}[A])$; en outre les poids de de Rham sont les $\alpha + \mathbb{Z}$, pour $\alpha \in A$. On en déduit immédiatement que, si $B_{dR}[A] \simeq B_{dR}[A']$, alors $\tilde{A} = \tilde{A}'$. Réciproquement, si $\tilde{A} = \tilde{A}'$, comme G_K opère trivialement sur $\mathbb{Z}$, il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha + i \in A'$. Le sous-K_∞-espace vectoriel de $B_{dR}[A]$ formé des $\underline{t}^i \otimes x$, avec $x \in K_\infty[A]$ est alors isomorphe à $K_\infty[A']$ et cet isomorphisme induit, par extension des scalaires un isomorphisme de $B_{dR}[A]$ sur $B_{dR}[A']$.

Prouvons alors la première assertion. On voit que $\mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\mathbb{DR}_{K_\infty})}(D_{dR,\infty}(B_{dR}[A])$ s'identifie à une algèbre de matrices carrées à p^{s_A}-lignes et colonnes à coefficients dans $K_\infty \otimes_K K_A$. D'après le théorème 3.17, c'est aussi $K_\infty \otimes_K \mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K)}(B_{dR}[A])$.

Par fonctorialité $D_A = \mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{K_\infty}(\Gamma)}(K_\infty[A])$ s'envoie dans $\mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K)}(B_{dR}[A])$ d'où une flèche injective de $K_\infty \otimes_K D_A$ dans $K_\infty \otimes_K \mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K)}(B_{dR}[A])$. Pour des raisons de dimension, cette flèche est bijective. L'inclusion $D_A \to \mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K)}(B_{dR}[A])$ est donc bien un isomorphisme ; en outre le fait que ce dernier anneau soit un corps implique que $B_{dR}[A]$ est bien un objet simple de $\mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K)$. □

Le résultat suivant est alors immédiat.

Théorème 3.19. — *Pour tout $a \in \mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z})$, notons $\hat{a}$ son image inverse dans $\overline{K}$, choisissons un relèvement $A_a \in \mathcal{C}(\overline{K})$, posons $K_\infty((\underline{t}))[a] = K_\infty((\underline{t}))[A_a]$, $B_{dR}[a] = B_{dR}[A_a]$ et $d_a = d_A$, $s_a = s_A$. Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, posons aussi $K_\infty((\underline{t}))[a; d] = K_\infty((\underline{t}))[a] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(0; d)$ et $B_{dR}[a; d] = B_{dR}[a] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(0; d)$.*

Soit W une B_{dR}-représentation de G_K (resp. une $K_\infty((\underline{t}))$-représentation de Γ). Alors

i) Pour que W soit simple, il faut et il suffit qu'il existe $a \in \mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z})$ tel que $W \simeq B_{dR}[a]$ (resp. $W \simeq K_\infty((\underline{t}))[a]$; alors W est de type $dR^m_{\hat{a}}$ et de dimension $d_a p^{s_a}$ sur B_{dR} (resp. $K_\infty((\underline{t}))$).

ii) Pour que W soit indécomposable, il faut et il suffit qu'il existe $a \in \mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z})$ et $d \in \mathbb{N}^*$ tels que $W \simeq B_{dR}[a; d]$ (resp. $W \simeq K_\infty((\underline{t}))[a; d]$; alors W est de type $dR_{\hat{a}}$ et de dimension $d.d_a p^{s_a}$ sur B_{dR} (resp. $K_\infty((\underline{t}))$).

iii) il existe des entiers naturels $(h_{a,d)}(W))_{a \in \mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z}), d \in \mathbb{N}^*}$ presque tous nuls, uniquement déterminés, tels que

$$W \simeq \oplus_{a \in \mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z}), d \in \mathbb{N}^*} B_{dR}[a; d]^{h_{a,d}(W)} \ \textit{resp.}\ W \simeq \oplus_{a \in \mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z}), d \in \mathbb{N}^*} K_\infty((\underline{t}))[a; d]^{h_{a,d}(W)} \ .$$

Le théorème 3.13, nous dit que, si X est un sous-groupe de $\overline{K}$ stable par G_K et contenant $\mathbb{Z}$, pour qu'une B_{dR}-représentation W de G_K soit de type dR_X, il faut et il suffit qu'il existe un réseau $\mathcal{W}$ de W stable par G_K tel que $\mathcal{W}/\underline{t}\mathcal{W}$ est de type S_X et alors la même chose est vraie pour tout réseau stable par G_K.

Pour le type dR_X^m en revanche, on remarque qu'une B_{dR}-représentation W de G_K peut très bien admettre un réseau $\mathcal{W}$ stable par G_K tel que $\mathcal{W}/\underline{t}\mathcal{W}$ est de type S_X^m sans que W, qui est alors de type dR_X soit pour autant de type dR_X^m. On peut par exemple prendre $W = B_{dR} + B_{dR}\log t \subset B_{dR,\mathbb{Z}}$ avec $\mathcal{W}$ le réseau engendré par 1 et $t\log t$. En revanche, si tous les réseaux $\mathcal{W}$ de W sont de type S_X^m, W est de type dR_X^m comme le montre l'analogue du théorème 3.13 :

Proposition 3.20. — *Soient $r \in \mathbb{N}$ et X un sous-groupe de $\mathfrak{a}_r$ stable par G_K et contenant $\mathbb{Z}$. Soient W une B_{dR}-représentation de G_K et $D^m_{dR,X,r}(W) = (\mathcal{B}^m_{K,X} \otimes_{\mathcal{B}^m_{K,\mathbb{Z}}} W)^{G_{K,r}}$. L'application évidente*

$$\rho^m_{dR,X,r}(W) : B^m_{dR,X} \otimes_{K_r} D^m_{dR,X,r}(W) \to \mathcal{B}^m_{K,X} \otimes_{\mathcal{B}^m_{K,\mathbb{Z}}} W$$

est injective et $D^m_{dR,X,r}(W)$ est un K_r-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à la dimension de W sur B_{dR}, avec égalité si et seulement si W est de type dR_X^m.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) on a $\dim_{K_r} D^m_{dR,X,r}(W) = \dim_{B_{dR}} W$

ii) l'application $\rho^m_{dR,X,r}(W)$ est bijective,

iii) pour tout réseau $\mathcal{W}$ de W stable par G_K, la C-représentation $\mathcal{W}/\underline{t}\mathcal{W}$ est de type S_X^m.

Preuve : Cela peut se voir

– soit en se ramenant, par décomposition en somme directe au cas où W est indécomposable et en utilisant la classification des indécomposables;

– soit en recopiant la preuve du théorème 3.13, à ceci près que pour montrer que (iii) implique (i), les mêmes techniques permettent de se ramener au cas où W est de type $dR_{\mathbb{Z}}$, i.e. est presque de de Rham et on remplace alors le lemme 3.14 par le résultat suivant :

Proposition 3.21. — *Soit W une B_{dR}-représentation de G_K. Pour que W soit de de Rham, il faut et il suffit que, pour tout réseau $\mathcal{W}$ de W stable par G_K, la C-représentation $\mathcal{W}/\underline{t}\mathcal{W}$ soit de Hodge-Tate.*

Preuve : Le théorème 3.13 nous permet de nous ramener au cas où W est presque de Hodge-Tate, donc est isomorphe à une somme directe de B_{dR}-représentations du type $B_{dR}(0;d)$ et le résultat devient évident. □

3.8 – Connexions régulières et représentations de $\mathbb{DR}$

Cachée derrière la comparaison entre la classification des B_{dR}-représentations par des modules à connexion et celle par des représentations linéaires de $\mathbb{DR}_{K_\infty}$, il y a une $\otimes$-équivalence entre les catégories tannakiennes $\mathcal{R}_{E,\underline{t}}$ et $\mathrm{Rep}_E(\mathbb{DR}_E)$, valable pour tout corps E de caractéristique 0.

Pour énoncer ce résultat, remarquons que, si l'on pose encore $\underline{t} = t^{(1)}$, la E-algèbre $\mathcal{B}_{E,\mathbb{Z}}$ s'identifie à $E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]$.

On note $d : \mathcal{B}_{\overline{E}} \to \mathcal{B}_{\overline{E}} \otimes d\underline{t}/\underline{t}$ la dérivation canonique, i.e. l'unique $\overline{E}$-dérivation qui envoie $t^{(\alpha)}$ sur $\alpha t^{(\alpha)} \otimes d\underline{t}/\underline{t}$, pour tout $\alpha \in \overline{E}$ et $\log t$ sur $d\underline{t}/\underline{t}$. Par restriction elle induit une dérivation de $\mathcal{B}_E$ dans $\mathcal{B}_E \otimes d\underline{t}/\underline{t}$ et la restriction de cette dernière à $E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]$ est la restriction à cet anneau de la dérivation canonique $d : E((\underline{t})) \to E((\underline{t})) \otimes d\underline{t}/\underline{t} = \Omega_{E((\underline{t}))/E}$.

On appelle module à connexion sur $E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]$ (resp. $\mathcal{B}_E$) la donnée d'un module Z sur cet anneau muni d'une application E-linéaire $\nabla_0 : Z \to Z$ telle que l'application $z \mapsto \nabla z = \nabla_0 z \otimes d\underline{t}/\underline{t}$ vérifie la règle de Leibniz.

Soit alors Y un $E((\underline{t}))$-espace vectoriel de dimension finie h muni d'une connexion régulière ∇. Soit Y_0 la réunion des sous-E-espaces vectoriels de dimension finie de Y stables par ∇_0. Il est clair que c'est un sous-$E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]$-module de Y, stable par ∇_0. Autrement dit, on peut considérer Y_0 comme un module à connexion sur $E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]$. Par extension des scalaires, on munit $\mathcal{B}_E \otimes_{E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]} Y_0$ d'une structure de $\mathcal{B}_E$-module à connexion. On le munit aussi d'une action de $\mathbb{DR}_E$ en posant $\sigma(b \otimes y) = \sigma(b) \otimes y$ si $\sigma \in \mathbb{DR}_E$, $b \in \mathcal{B}_E$ et $y \in Y_0$.

Il est clair que le sous-E-espace vectoriel $I_E(Y) = (\mathcal{B}_E \otimes_{E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]} Y_0)_{\nabla=0}$ des sections horizontales est stable par l'action de $\mathbb{DR}_E$.

De même, soit Z une représentation E-linéaire de dimension finie de $\mathbb{DR}_E$. Le groupe $\mathbb{DR}_E$ opère sur $\mathcal{B}_E$ et sur Z, donc aussi sur le produit tensoriel $\mathcal{B}_E \otimes_E Z$. On définit une connexion sur ce $\mathcal{B}_E$-module en posant $\nabla(b \otimes z) = z \otimes db$. Il est clair que le sous-E-espace vectoriel $Z_0 = (\mathcal{B}_E \otimes_E Z)^{\mathbb{DR}_E}$ formé des éléments sur lesquels l'action de $\mathbb{DR}_E$ est triviale est en fait un sous-$E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]$-module de $(\mathcal{B}_E \otimes_E Z)^{\mathbb{DR}_E}$, stable par ∇. Par extension des scalaires, on en déduit une connexion sur le $E((\underline{t}))$-espace vectoriel $M_E(Z) = E((\underline{t})) \otimes_{E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]} Z_0$.

Théorème 3.22. — *i) Soit Z une représentation E-linéaire de dimension finie h de $\mathbb{DR}_E$. Alors Z_0 est un $E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]$-module libre de rang h et la connexion sur $M_E(Z)$ est régulière. De plus l'application naturelle*

$$\mathcal{B}_E \otimes_{E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]} Z_0 \to \mathcal{B}_E \otimes_E Z$$

est un isomorphisme.

ii) Soit Y un $E((\underline{t}))$-espace vectoriel de dimension finie h muni d'une connexion régulière. Alors Y_0 est un $E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]$-module libre de rang h et $I_E(Y)$ est un E-espace vectoriel de dimension h. De plus les applications naturelles

$$E((\underline{t})) \otimes_{E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]} Y_0 \to Y \ \textit{et}\ \mathcal{B}_E \otimes_E I_E(Y) \to \mathcal{B}_E \otimes_{E[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]} Y_0$$

sont des isomorphismes.

iii) Le foncteur $M_E : \mathrm{Rep}_E(\mathbb{DR}_E) \to \mathcal{R}_{E,\underline{t}}$ induit une $\otimes$-équivalence entre ces deux catégories et I_E est un quasi-inverse.

Commençons par énoncer deux lemmes :

Lemme 3.23. — *Si Z est comme dans le théorème et si $Y = M_E(Z)$, l'application naturelle $Z_0 \to Y_0$ est une bijection.*

Lemme 3.24. — *Le foncteur $M_E : \mathrm{Rep}_E(\mathbb{DR}_E) \to \mathcal{R}_{E,\underline{t}}$ est essentiellement surjectif.*

Montrons comment le théorème se déduit de ces deux lemmes :

Prouvons d'abord (i) : Notons $\mathcal{C}_E$ l'algèbre affine de $\mathbb{DR}_E$. On voit facilement que $Z_{00} = (\mathcal{C}_E \otimes_E Z)^{\mathbb{DR}_E}$ est un E-espace vectoriel de dimension h et que l'application naturelle $\mathcal{C}_E \otimes_E Z_{00} \to Z$ est un isomorphisme.

Choisissons un système S de représentants de $\overline{E}/\mathbb{Z}$ dans $\overline{E}$, stable par G_E. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ fixé, les $t^{(\alpha+i)}(\log t)^j$, pour $\alpha \in S$ et $j \in \mathbb{N}$ sont des éléments de $\mathcal{B}_{\overline{E}}$ linéairement indépendants sur $\overline{E}$. Notons $\mathrm{gr}^i_S\mathcal{B}_{\overline{E}}$ le sous-$\overline{E}$-espace vectoriel qu'ils engendrent et posons $\mathrm{gr}^i_S\mathcal{B}_E = \mathrm{gr}^i_S\mathcal{B}_{\overline{E}} \cap \mathcal{B}_E$. C'est un sous-$E$-espace vectoriel de $\mathcal{B}_E$ stable par $\mathbb{DR}_E$. La projection de $\mathcal{B}_E$ sur $\mathcal{C}_E$ induit un isomorphisme de $\mathrm{gr}^0_S\mathcal{B}_E$ sur $\mathcal{C}_E$ et la multiplication par $t^{(i)}$ un isomorphisme de $\mathrm{gr}^0_S\mathcal{B}_E$ sur $\mathrm{gr}^i_S\mathcal{B}_E$. On en déduit que le choix de S nous permet d'identifier Z_0 à $E[\underline{t},\underline{t}^{-1}] \otimes_E Z_{00}$ qui est bien un $E[\underline{t},\underline{t}^{-1}]$-module libre de rang h et que $\mathcal{B}_E \otimes_{E[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} Z_0 \to \mathcal{B}_E \otimes_E Z$ est bien un isomorphisme. On voit que $E[\underline{t}] \otimes_E Z_{00}$ est stable par ∇_0, donc aussi $E[[\underline{t}]] \otimes_{E[\underline{t}]} Z_{00}$ qui est un réseau de $M_E(Z)$ et la connexion sur $M_E(Z)$ est bien régulière.

Montrons maintenant (ii) dans le cas où $Y = M_E(Z)$, avec Z comme ci-dessus. D'après le lemme 3.21, l'inclusion $Z_0 \subset Y_0$ est une égalité. En particulier, Y_0 est libre de rang h sur $E[\underline{t},\underline{t}^{-1}]$ et l'application $E((\underline{t})) \otimes_{E[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} Y_0 \to Y$ est un isomorphisme.

On a aussi $\mathcal{B}_E \otimes_{E[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} Y_0 = \mathcal{B}_E \otimes_{E[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} Z_0 = \mathcal{B}_E \otimes_E Z$, donc $I_E(Y) = Z$ puisque $(\mathcal{B}_E)_{\nabla=0} = E$. Il en résulte bien que $\mathcal{B}_E \otimes_E I_E(Y)$ s'identifie bien à $\mathcal{B}_E \otimes_{E[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} Y_0$.

Il est maintenant clair que M_E induit une $\otimes$-équivalence entre $\mathrm{Rep}_E(\mathbb{DR}_E)$ et la sous-catégorie tannakienne de $\mathcal{R}_{E,\underline{t}}$ image essentielle de ce foncteur et que la restriction de I_E à cette sous-catégorie est un quasi-inverse. Le lemme 3.24 permet donc de conclure. □

Preuve du lemme 3.23 : Quitte à remplacer E par une extension finie galoisienne, on peut supposer que les poids de Z, pour l'action de $\mathbb{DR}^m_E$, sont dans $E/\mathbb{Z}$. Par dévissage, on se ramène au cas où Z est simple, ce qui implique que $\mathbb{G}_a$ opère trivialement donc que Z est de dimension 1 avec un unique poids $a \in E/\mathbb{Z}$. Soit z une base de Z sur E. Si S est comme ci-dessus et si α désigne le relèvement de a dans S, Z_0 (resp. $Y = M_E(Z)$) est le $E[\underline{t},\underline{t}^{-1}]$-module libre de rang 1 (resp. le $E((\underline{t}))$-espace vectoriel de dimension 1) de base $u = t^{(-\alpha)} \otimes z$ et on a $\nabla_0(u) = -\alpha u$. Nous devons montrer que si $y \in Y$ est tel que le sous-E-espace vectoriel de Y engendré par les $\nabla_0^j(y)$, pour $j \in \mathbb{N}$ est de dimension finie, alors $y \in Z_0$. Considérons un tel y. Il existe un entier $m \geq 1$ et $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1} \in E$ pas tous nuls tels que $\sum_{j=0}^{m-1} x_j \nabla_0^j(y) = 0$. Si $y = (\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \underline{t}^n)u$, on voit que $\nabla_0^j(y) = (\sum_{n\in\mathbb{N}} (n-\alpha)^j c_n \underline{t}^n)u$. On doit donc avoir $\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_j (n-\alpha)^j c_n \underline{t}^n = 0$, ou encore

$$\sum_{j=0}^{m-1} (n-\alpha)^j x_j = 0 \text{ pour tout entier } n \text{ tel que } c_n \neq 0$$

Si $n_0, n_1, \ldots, n_{m-1}$ sont des entiers distincts, le déterminant de la matrice des $(n_i - \alpha)^j$, pour $0 \leq i, j \leq m-1$ est non nul. On en déduit qu'au plus $m-1$ des c_n sont non nuls, donc que $y \in Z_0$. □

Preuve du lemme 3.24 : C'est une conséquence immédiate de la classification des modules à connexion régulière sur $E((\underline{t}))$ (cf. [Ma65], th.4, lorsque E est algébriquement clos, le cas général s'en déduit facilement). □

Pour toute B_{dR}-représentation W de G_K, notons $\Delta_{dR,f}(W)$ la réunion des sous-K-espaces vectoriels de dimension finie de W^{H_K} stable par Γ. C'est aussi la réunion des sous-K_∞-espaces vectoriels de dimension finie de $\Delta_{dR}(W)$ stables par ∇_0. C'est un sous-$K_\infty[\underline{t}, \underline{t}^{-1}]$-module de $\Delta_{dR}(W)$. Le théorème précédent montre qu'il est libre de rang la dimension de W sur B_{dR} et que l'application naturelle $K_\infty((\underline{t})) \otimes_{K_\infty[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} \Delta_{dR,f}(W) \to \Delta_{dR}(W)$ est bijective.

Par ailleurs, $D_{dR,\infty}(W) \subset \mathcal{B}_K \otimes_{K[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} W = \mathcal{B}_{K_\infty} \otimes_{K_\infty[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} W \supset \mathcal{B}_{K_\infty} \otimes_{K_\infty[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} \Delta_{dR,f}(W)$.

Proposition 3.25. — *Soit W une B_{dR}-représentation de G_K de dimension h. On a $D_{dR,\infty}(W) \subset \mathcal{B}_{K_\infty} \otimes_{K_\infty[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} \Delta_{dR,f}(W)$ et l'application $\mathcal{B}_{K_\infty}$-linéaire*

$$\mathcal{B}_{K_\infty} \otimes_{K_\infty} D_{dR,\infty}(W) \to \mathcal{B}_{K_\infty} \otimes_{K_\infty[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} \Delta_{dR,f}(W)$$

déduite de cette inclusion est bijective.

Cette bijection est compatible avec les extensions naturelles de ∇ et de l'action de $\mathbb{S}_{K_\infty}$. En particulier, $D_{dR,\infty}(W) = I_{K_\infty}(\Delta_{dR}(W)) = (\mathcal{B}_{K_\infty} \otimes_{K_\infty[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} \Delta_{dR,f}(W))_{\nabla=0}$ et $\Delta_{dR}(W) = M_{K_\infty}(D_{dR\infty}(W)) = K_\infty((\underline{t})) \otimes_{K_\infty[\underline{t},\underline{t}^{-1}]} (\mathcal{B}_{K_\infty} \otimes_{K_\infty} D_{dR,\infty}(W))^{\mathbb{S}_{K_\infty}}$.

Preuve : Compte-tenu du théorème précédent, c'est une simple analyse de la définition des différents foncteurs qui interviennent dans cet énoncé.

Toutefois, le lecteur consciencieux remarquera que l'on n'a besoin pour la preuve que de la partie facile du théorème précédent (i.e.. de celle qui n'utilise pas la classification des modules à connexions régulières sur $\overline{E}((\underline{t}))$ (lemme 3.22) : on sait a priori que, pour toute B_{dR}-représentation W de G_K, $\Delta_{dR}(W)$ est dans l'image essentielle du foncteur M_{K_∞}.

Remarques : 1 - Soit $\widehat{B}_{HT} = C((t))$ le corps des séries formelles en l'indéterminée t à coefficients dans C sur lequel G_K opère comme on pense (l'indéterminée t est toujours un générateur de $\mathbb{Z}_p(1)$). C'est le corps des fractions de $\widehat{B}^+_{HT} = C[[t]] = \varprojlim_{r\in\mathbb{N}} C[t]/t^r$ et on munit $\widehat{B}^+_{HT}$ de la topologie de la limite projective (chaque $C[t]/t^r$ étant muni de sa topologie d'espace vectoriel de dimension finie sur C). Tout ce qu'on vient de raconter dans ce chapitre se transpose mot pour mot à l'étude des $\widehat{B}_{HT}$-représentations de G_K (mais comme la projection $\widehat{B}^+_{HT} \to C$ admet une section continue G_K-équivariante, ces résultats sont essentiellement triviaux).

En particulier, on peut associer à toute $\widehat{B}_{HT}$-représentation W de G_K un K_∞-espace vectoriel de dimension finie $D_{HT,\infty}(W)$ muni d'une action de $\mathbb{DR}_{K_\infty}$ et la connaissance de $D_{HT,\infty}(W)$ détermine W à isomorphisme près.

2 - Soit W une B_{dR}-représentation de G_K et $\mathcal{W}$ un réseau de W stable par G_K. Le choix de ce réseau permet de munir $\mathcal{W}$ d'une filtration,indexée par $\mathbb{Z}$, décroissante, exhaustive et séparée en posant $\mathrm{Fil}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{W}}\mathrm{W} = \mathrm{t}^{\mathrm{i}}\mathcal{W} = \underline{\mathrm{t}}^{\mathrm{i}}\mathcal{W}$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On voit alors que $\mathrm{gr}_{\mathcal{W}}W = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{gr}^i_{\mathcal{W}}W$, avec $\mathrm{gr}^iW = \mathrm{Fil}^{\mathrm{i}}\mathcal{W}/\mathrm{Fil}^{\mathrm{i+1}}\mathcal{W}$ a une structure de $\widehat{B}_{HT}$-représentation (en fait graduée) de G_K. Les représentations $D_{dR,\infty}(W)$ et $D_{HT,\infty}(\mathrm{gr}_{\mathcal{W}}(W)$ de $\mathbb{DR}_{K_\infty} = \mathbb{DR}_{K^m_\infty} \times \mathbb{G}_a$ ne sont pas forcément isomorphes. On vérifie que l'action de $\mathbb{DR}^m_{K_\infty}$ est la même mais que celle de $\mathbb{G}_a$ peut être différente (la classe d'isomorphisme de $D_{HT,\infty}(\mathrm{gr}_{\mathcal{W}})$ muni de l'action de $\mathbb{G}_a$ dépend en général du choix du réseau $\mathcal{W}$).

Chapitre 4 – Généralités sur les représentations p-adiques

4.1 – Poids et types d'une représentation

Dans ce chapitre, F est un sous-corps fermé de K. La catégorie $\mathrm{Rep}_F(G_K)$ est donc la catégorie des F-espaces vectoriels de dimension finie sur F munis d'une action linéaire et continue de G_K. Dans le chapitre suivant, on va s'intéresser aux représentations p-adiques, i.e. au cas où $F = \mathbb{Q}_p$.

Nous allons voir rapidement comment les résultats des chapitres 2 et 3 s'appliquent aux F-représentations de G_K. Dans tout ce qu'on va faire, on ne change rien en remplaçant la représentation V considérée par $V_K = K \otimes_F V$ ce qui fait que l'on pourrait aussi bien ne parler que de K-représentations.

Soit V une F-représentation de G_K. Alors $V_C = C \otimes_F V$ est de façon évidente une C-représentation de G_K et $V_{dR} = B_{dR} \otimes_F V$ une B_{dR}-représentation de G_K. Pour tout foncteur D défini sur la catégorie des C-représentations (resp. B_{dR}-représentations) de G_K, on pose $D(V) = D(V_C)$ (resp. $D(V) = D(V_{dR})$).

Les poids de Sen (resp. *de de Rham*) *de* V sont les poids de Sen de V_C (resp. de de Rham de V_{dR}). Les premiers forment un sous-ensemble fini, stable par G_K de $\overline{K}$ et les seconds sont leurs images dans $\overline{K}/\mathbb{Z}$.

Si Xest un sous-ensemble de $\overline{K}$ stable par G_K et contenant $\mathbb{Z}$, on dit que V est de type S_X (resp S_X^m) si V_C l'est, que V est de type dR_X (resp. dR_X^m) si V_{dR} l'est. On voit donc (th.3.13 et prop. 3.20) que l'on a les implications

$$\begin{array}{ccc} V \text{ est de type } dR_X^m & \Rightarrow & V \text{ est de type } S_X^m \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ V \text{ est de type } dR_X & \Leftrightarrow & V \text{ est de type } S_X \end{array}$$

On dit aussi que V est *de Hodge-Tate* (resp. *presque de Hodge-Tate*) si V_C l'est (c'est-à-dire si V est de type $S_{\mathbb{Z}}^m$ (resp. $S_{\mathbb{Z}}$). De même on dit que V est *de de Rham* (resp. *presque de de Rham*) si V_{dR} l'est (c'est-à-dire si V est de type $dR_{\mathbb{Z}}^m$ (resp. $dR_{\mathbb{Z}}$). On a donc les implications

$$\begin{array}{ccc} V \text{ est de de Rham} & \Rightarrow & V \text{ est de Hodge-Tate} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ V \text{ est presque de de Rham} & \Leftrightarrow & V \text{ est presque de Hodge-Tate} \end{array}$$

4.2 – Graduations, ν-graduations, filtrations et ν-filtrations

Soit E un corps commutatif. Pour tout E-espace vectoriel D, on appelle *graduation sur* D la donnée d'une graduation par des sous-E-espaces vectoriels indexée par $\mathbb{Z}$, i.e. d'une décomposition de D en somme directe de sous-E-espaces vectoriels $D = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{gr}^i D$. *Un* E*-espace vectoriel gradué* est un E-espace vectoriel muni d'une graduation. Avec comme flèches les applications E-linéaires qui respectent la graduation, les modules gradués forment une catégorie abélienne E-linéaire qui s'identifie à la catégorie des représentations E-linéaires (pas nécessairement de dimension finie) de $\mathbb{G}_m$ (pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{gr}^i D$ est la partie de poids i).

On définit de façon évidente le *produit tensoriel* de deux E-espaces vectoriels gradués, de même que le *dual* d'un E-espace vectoriel gradué de dimension finie. *Le E-espace vectoriel gradué unité* est E avec $\mathrm{gr}^0 E = E$ et $\mathrm{gr}^i E = 0$ si $i \neq 0$.

On appelle *ν-graduation* sur un E-espace vectoriel D la donnée d'une graduation et d'un endomorphisme nilpotent $\nu : D \to D$ qui respecte la graduation. Les *E-espaces vectoriels ν-gradués* forment, de manière évidente, une catégorie abélienne E-linéaire qui s'identifie à la catégorie des représentations E-linéaires de $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a$ (cf. §2.4).

On définit de façon évidente le *produit tensoriel* de deux E-espaces vectoriels ν-gradués (on a $\nu(d_1 \otimes d_2) = \nu(d_1) \otimes d_2 + d_1 \otimes \nu(d_2)$), de même que le *dual* d'un E-espace vectoriel ν-gradué de dimension finie (on a $\nu(f)(d) = -f(\nu(d))$). C'est clair aussi ce qu'est la structure de *E-espace vectoriel ν-gradué unité* sur E.

Pour tout E-espace vectoriel D, on appelle *filtration sur D* la donnée d'une filtration par des sous-E-espaces vectoriels indexée par $\mathbb{Z}$, décroissante, exhaustive et séparée, i.e. on se donne des sous-E-espaces vectoriels $(\mathrm{Fil}^i D)_{i \in \mathbb{Z}}$ de D vérifiant $\mathrm{Fil}^{i+1} D \subset \mathrm{Fil}^i D$, pour tout i, $\cup_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Fil}^i D = D$ et $\cap_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Fil}^i D = 0$. Un *$E$-espace vectoriel filtré* est un E-espace vectoriel muni d'une filtration. Avec comme flèches les applications E-linéaires qui respectent la filtration, les E-espaces vectoriels filtrés forment une catégorie additive, E-linéaire, qui n'est pas abélienne.

Un *morphisme strict* de E-espaces vectoriels filtrés est un morphisme $f : D_1 \to D_2$ de E-espaces vectoriels filtrés tels que $f(\mathrm{Fil}^i D_1) = \mathrm{Fil}^i D_2 \cap f(D_2)$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Une suite de morphismes de E-espaces vectoriels filtrés est dite *exacte* si tous les morphismes de la suite sont stricts et si c'est une suite exacte en tant que suite d'applications linéaires.

Si D est un E-espace vectoriel filtré, un *sous-objet D' de D* (resp. un *quotient D'' de D*) est un sous-E-espace vectoriel (resp. un E-espace vectoriel quotient) muni de la filtration induite. Pour tout sous-E-espace vectoriel D' du E-espace vectoriel filtré D, si $D'' = D/D'$, la suite

$$0 \to D' \to D \to D'' \to 0$$

est exacte.

Si D_1 et D_2 sont deux E-espaces vectoriels filtrés et si l'un des deux au moins est de dimension finie, on définit une filtration sur $D_1 \otimes_E D_2$ en posant $\mathrm{Fil}^i(D_1 \otimes D_2) = \sum_{i_1+i_2=i} \mathrm{Fil}^{i_1} D_1 \otimes \mathrm{Fil}^{i_2} D_2$. De même, le *dual* d'un E-espace vectoriel filtré D, de dimension finie sur E, est le E-espace vectoriel dual D^*, avec $\mathrm{Fil}^i D^*$ égal à l'orthogonal de $\mathrm{Fil}^{-i+1} D$. Le E-espace vectoriel filtré unité est E avec

$$\mathrm{Fil}^i E = \begin{cases} E \text{ si } i \leq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

A tout E-espace vectoriel filtré D, on peut associer le E-espace vectoriel gradué

$\mathrm{gr}D = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{gr}^i D$, avec $\mathrm{gr}^i D = \mathrm{Fil^iD/Fil^{i+1}D}$. On obtient ainsi un foncteur additif E-linéaire de la catégorie des E-espaces vectoriels filtrés dans celle des E-espaces vectoriels gradués. Ce foncteur est exact (au sens qu'il transforme toute suite exacte en suite exacte) et fidèle. C'est un $\otimes$-foncteur au sens qu'il commute de manière évidente au produit tensoriel, au dual et envoie l'objet-unité sur l'objet-unité.

Une *ν-filtration* sur un E-espace vectoriel D est la donnée d'une filtration et d'un endomorphisme nilpotent ν respectant la filtration. Les *E-espaces vectoriels ν-filtrés* forment de manière évidente une catégorie additive E-linéaire. Un morphisme de E-espaces vectoriels ν-filtrés est dit *strict* s'il est strict en tant que morphisme des E-espaces vectoriels filtrés sous-jacents. On définit de même la notion de suite exacte de E-espaces vectoriels ν-filtrés.

Un *sous-objet (resp. un quotient) d'un E-espace vectoriel ν-filtré* est un sous-E-espace vectoriel stable par ν (resp. le quotient par un sous-E-espace vectoriel stable par ν) que l'on munit de la filtration induite. Pour tout sous-objet D' du E-espace vectoriel ν-filtré D, si $D'' = D/D'$, la suite

$$0 \to D' \to D \to D'' \to 0$$

est exacte.

On définit comme on pense le produit tensoriel de deux E-espaces vectoriels ν-filtrés dont au moins l'un des deux est de dimension finie, le dual d'un E-espace vectoriel ν-filtré de dimension finie, la structure d'objet-unité de la catégorie des E-espaces vectoriels ν-gradués sur E.

A tout E-espace vectoriel ν-filtré D, on peut associer le E-espace vectoriel ν-gradué $\mathrm{gr}D$. Le foncteur $D \mapsto \mathrm{gr}D$ est un foncteur additif E-linéaire, exact et fidèle qui commute au produit tensoriel, au dual et à l'objet-unité.

Enfin, il est commode de convenir que tout morphisme de E-espaces vectoriels gradués (resp. ν-gradués) est strict.

4.3 – Applications aux représentations presque de Hodge-Tate

Les $\mathrm{Fil^iB_{dR} = B_{dR}^+t^i = B_{dR}^+(i)}$, pour $i \in \mathbb{Z}$, munissent B_{dR} d'une filtration naturelle qui en font non seulement un K-espace vectoriel mais aussi, en un sens évident une K-algèbre filtrée. La K-algèbre graduée associée est $B_{HT} = C[t,t^{-1}]$. La graduation sur B_{HT} est la même que celle qui provient du fait que $B_{HT} = B_{\mathbb{Z}}^m = C \otimes_K \mathcal{B}_{\mathbb{Z}}^m$, algèbre affine sur C du groupe $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}}^m = \mathbb{G}_m$.

De même l'anneau $B_{pdR} = B_{dR}[\log t]$ a une structure d'algèbre ν-filtrée : on a $\mathrm{Fil^iB_{pdR} = B_{dR}^+[\log t]t^i = B_{dR}^+[\log t](i)}$ et l'application ν est la B_{dR}-dérivation $-\partial/\partial \log t$. Cette dernière est celle qui correspond à l'action de $\mathbb{G}_a = \mathbb{DR}_{\mathbb{Z}}$ sur B_{pdR}. L'algèbre ν-graduée $\mathrm{gr}B_{pdR}$ s'identifie à B_{pHT}. Sur cette dernière la ν-graduation provient de ce que $\mathbb{G}_m \times G_a$ opère par translations à gauche sur son algèbre affine sur C qui est précisément $B_{pHT} = B_{\mathbb{Z}}$.

L'action de G_K sur B_{dR}, B_{HT}, B_{pdR} et B_{pHT} est compatible, en un sens évident, avec ces structures supplémentaires. Pour toute F-représentation V de G_K, et pour

$* \in \{dR, pdR, HT, pHT\}$ le B_*-module $B_* \otimes_F V = B_* \otimes_K V_K$ est muni d'une action de G_K (on pose $g(b \otimes v) = g(b) \otimes g(v)$, pour $g \in G_K$, $b \in B_*$ et $v \in V$; on le munit de la structure de K-espace vectoriel filtré (resp. ν-filtré, gradué, ν-gradué) produit tensoriel de la structure donnée sur B_* avec la structure triviale sur V_K. Alors $D_*(V) = (B_* \otimes_F V)^{G_K}$ est un sous-K-espace vectoriel de $B_* \otimes_F V$ qui est un sous-objet pour la structure de K-espace vectoriel filtré (resp. ν-filtré, gradué, ν-gradué) de $B_* \otimes_F V$.

On note $\rho_*(V) : B_* \otimes_K D_*(V) \to B_* \otimes_F V$ l'application B_*-linéaire déduite par extension des scalaires de l'inclusion $D_*(V) \subset B_* \otimes V$.

Les deux théorèmes qui suivent contiennent des résultats qui sont soit évidents soit des conséquences immédiates des résultats des chapitres 2 et 3.

Théorème 4.1. — *Soient V une F-représentation de G_K et h la dimension de V sur F.*

1 – Pour $* \in \{dR, pdR, HT, pHT\}$, $D_*(V)$ est un K-espace vectoriel de dimension finie $\leq h$. L'application $\rho_*(V)$ est injective et c'est un morphisme strict de K-espaces vectoriels filtrés (resp. ν-filtrés, gradués, ν-gradués).

2 – Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) la représentation V est de de Rham (resp. presque de de Rham, de Hodge-Tate, presque de Hodge-Tate)

ii) on a $\dim_K D_*(V) = h$,

iii) l'application $\rho_*(V)$ est un isomorphisme.

3 – On a $D_{pHT}(V) = \mathrm{gr} D_{pdR}(V)$, $D_{HT}(V) = (D_{pHT}(V)_{\nu=0}$, $D_{dR}(V) = D_{pdR}(V)_{\nu=0}$. L'application naturelle $\mathrm{gr} D_{dR}(V) \to D_{HT}(V)$ est injective.

4 – Si V est presque de Hodge-Tate (ou presque de de Rham, cela revient au même), *V est de de Rham si et seulement si $\nu = 0$ sur $D_{pdR}(V)$, alors que V est de Hodge-Tate si et seulement si $\nu(\mathrm{Fil^i D_{pdR}(V)} \subset \mathrm{Fil^{i+1} D_{pdR}(V)}$.*

Théorème 4.2. — *Soit $* \in \{dR, pdR, HT, pHT\}$. La sous- catégorie pleine $\mathrm{Rep}_{F,*}(G_K)$ de la catégorie $\mathrm{Rep}_F(G_K)$ formée des représentations qui sont de de Rham (resp. presque de de Rham, de Hodge-Tate, presque de Hodge-Tate) est une sous-catégorie tannakienne et la restriction à cette catégorie du foncteur D_* est un foncteur strict* (i.e. pour tout morphisme f de cette catégorie, $D_*(f)$ est strict*), exact et fidèle, qui commute au produit tensoriel et au dual.*

4.4 – Représentations presque de Hodge-Tate de dimension 1

Proposition 4.3. — *Soit V une représentation p-adique de G_K de dimension* 1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) la représentation V est presque de de Rham,

ii) la représentation V est presque de Hodge-Tate,

iii) la représentation V est de Hodge-Tate,

iv) la représentation V est de de Rham,

v) il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que le groupe d'inertie I_K de l'extension $\overline{K}/K$ opère sur $V(-i)$ à travers un quotient fini.

Preuve : Comme V est de dimension 1 sur $\mathbb{Q}_p$, $D_{dR,\infty}(V)$ est de dimension 1 sur K_∞ et l'action de $\mathbb{G}_a$ est triviale. Les équivalences des propriétés (i) à (iv) sont alors claire.

Montrons l'équivalence de (iii) et (v). On voit que les poids de Sen d'une C-représentation de G_K ne change pas lorsque l'on remplace K par une extension qui est un sous-corps fermé de K sur lequel la valuation est encore discrète. Quitte à remplacer K par le complété de l'extension maximale non ramifiée de K contenue dans $\overline{K}$, on peut supposer que le corps résiduel est algébriquement clos, i.e.. que $G_K = I_K$.

Le fait que (v) $\Rightarrow$ (iii) est alors immédiat. Montrons l'implication inverse. Quitte à remplacer V par $V(-i)$, pour un entier i convenable, on peut aussi supposer que le poids de Sen de V est 0. Si v est un élément non nul de V, il existe alors un élément non nul c de C tel que $c \otimes v \in (C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$. Si $\eta : G_K \to \mathbb{Z}_p^*$ est le caractère qui donne l'action de G_K sur V, on a $gc = \eta^{-1}(g)c$, pour tout $g \in G_K$. Quitte à remplacer K par une extension finie puis à multiplier c par un élément non nul de K bien choisi, on peut supposer que $c-1 \in \mathfrak{m}_C$, idéal maximal de $\mathcal{O}_C$. Si $a = \log c$ et si $\rho = -\log \circ \eta : G_K \to \mathbb{Q}_p$, on a $ga - a = \rho(g)$, pour tout $g \in G_K$. Le lemme ci-dessous implique que $a \in K$, i.e. que $\rho = 0$, donc que η est d'ordre fini et on a bien (iii)$\Rightarrow$(v). $\square$

Lemme 4.4. — *Supposons k algébriquement clos et soit $a \in C$ tel que $ga - a \in \mathbb{Q}_p$, pour tout $g \in G_K$. Alors $a \in K$.*

Preuve : Il s'agit de prouver que $ga = a$ pour tout $a \in G_K$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors l'application $g \mapsto ga - a$ défini un homomorphisme continu non nul $\rho : G_K \to \mathbb{Q}_p$ et l'image de ρ est un sous-groupe compact non nul de $\mathbb{Q}_p$. Quitte à multiplier a par un scalaire non nul, on peut supposer que cette image est égale à $\mathbb{Z}_p$. Soit H le noyau de ρ. Alors $\overline{K}^H$ est une $\mathbb{Z}_p$-extension K_∞ de K et $C^H = L$ est l'adhérence de K_∞ dans C (th.1.1'). Si $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$, il existe un générateur topologique γ_0 de Γ tel que $\gamma_0(a) = a+1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si K_n est l'unique extension de degré p^n de K contenue dans K_∞, $\gamma_0^{p^n}$ est un générateur topologique de $\mathrm{Gal(K_\infty/K_n)}$ et $\gamma_0^{p^n}(a) - a = p^n$. Si l'on choisit $a_n \in K_\infty$ tel que $v_p(a - a_n) \geq n$, on a $v_p(\gamma_0^{p^n} - 1)(a_n) \geq n$; d'après l'assertion (iii) de la proposition 1.4, il existe $\lambda_n \in K_n$ tel que $v_p(a_n - \lambda_n) \geq n - 1/(p-1)$ et on a aussi $v_p(a - \lambda_n) \geq n - 1/(p-1)$. On peut alors écrire $\gamma_0(\lambda_n) = \lambda_n + 1 - x_n$ où $x_n \in K_n$ vérifie $v_p(x_n) \geq n - 1/(p-1)$. Comme $\mathrm{tr}_{K_n/K}(\gamma_0(\lambda_n)) = \mathrm{tr}_{K_n/K}(\lambda_n)$, on en déduit que $\mathrm{tr}_{K_n/K}(x_n) = p^n$. Pour n suffisamment grand, cela contredit le fait que $v_p(\mathrm{tr}_{K_n/K}(x_n)) \geq v_p(x_n) + (p-1)n/pe_K$ (prop.1.6). $\square$

Remarque : En utilisant une analyse de la ramification encore plus fine que celle que nous avons faite ici ([Sen72]), Sen a montré plus ([Sen80], cor. au th.11) : Pour qu'une représentation p-adique V de G_K soit de Hodge-Tate, avec seulement 0 comme poids de Sen, il faut et il suffit que le groupe d'inertie I_K opère sur V à travers un quotient fini. Sen montre en fait un résultat beaucoup plus fort ([Sen73] dans le cas Hodge-Tate et [Sen80], th.11 dans le cas général) : Comme l'image du groupe d'inertie I_K dans le groupe $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_p}(V)$ des automorphismes du $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel V est un sous-groupe fermé, c'est un groupe de Lie p-adique et son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_p}(V)$. Sen montre que $\mathfrak{g}$ est le plus petit sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_p}(V)$ tel que $C \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathfrak{g}$ contient l'endomorphisme de Sen.

Chapitre 5 – Représentations semi-stables et (φ, N)-modules filtrés

5.1 – Les (φ, N)-modules filtrés

Le corps résiduel $\overline{k}$ de $\overline{K}$ est une clôture algébrique de k. On note K_0 (resp. P_0) le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k (resp. $\overline{k}$) et σ le Frobenius absolu agissant sur k, $\overline{k}$ (via $x \mapsto x^p$), K_0 et P_0.

On appelle *φ-module sur k* (ou *φ-module*, s'il n'y a pas de risque de confusion sur k) la donnée d'un K_0-espace vectoriel D muni d'une application σ-semi-linéaire $\varphi : D \to D$ (i.e. d'une application additive vérifiant $\varphi(\lambda d) = \sigma(\lambda)\varphi(d)$ si $\lambda \in K_0,\ d \in D$). On appelle *$(\varphi, N)$-module (sur k)* la donnée d'un φ-module D muni en outre d'une application K_0-linéaire $N : D \to D$ vérifiant

$$N\varphi = p\varphi N\ .$$

Un *φ-module fini* (resp. *un (φ, N)-module fini*) est un φ-module (resp. un (φ, N)-module) D qui est de dimension finie en tant qu'espace vectoriel sur K_0 et tel que φ est bijectif sur D (il revient au même de demander que φ est injectif ou surjectif). Un φ-module fini est donc ce que l'on appelle d'habitude un *F-isocristal sur k*.

Les φ-modules (resp. les (φ, N)-modules) forment de façon évidente une catégorie abélienne $\mathbb{Q}_p$-linéaire, la catégorie des φ-modules pouvant être identifiée à la sous-catégorie pleine de celle des (φ, N)-modules dont les objets sont ceux sur lesquels $N = 0$. Les sous-catégories pleines des φ-modules finis et des (φ, N)-modules finis sont stables par sous-objet, quotient, somme directe et sont encore abéliennes. Celle des (φ, N)-modules finis est aussi stable par extension.

On peut définir le *produit tensoriel* $D_1 \otimes D_2$ de deux (φ, N)-modules D_1 et D_2 ; le K_0-espace vectoriel sous-jacent est le produit tensoriel des K_0-espaces vectoriels sous-jacents et, si $d_1 \in D_1$ et $d_2 \in D_2$, on a $\varphi(d_1 \otimes d_2) = \varphi d_1 \otimes \varphi d_2$ et $N(d_1 \otimes d_2) = Nd_1 \otimes d_2 + d_1 \otimes Nd_2$. Le produit tensoriel de deux φ-modules est encore un φ-module (on a encore $N = 0$) et le produit tensoriel de deux (φ, N)-modules finis est encore un (φ, N)-module fini. Si D est un (φ, N)-module fini, on peut définir son *dual* D^* ; le K_0-espace vectoriel sous-jacent est le dual de D, si $\eta \in D^*$ et $d \in D$, on a $(\varphi\eta)(d) = \sigma(\eta(\varphi^{-1}d))$ et $(N\eta)(d) = -\eta(Nd)$. La catégorie des (φ, N)-modules finis devient ainsi une catégorie tannakienne sur $\mathbb{Q}_p$ dont l'objet-unité est K_0, avec $\varphi = \sigma$ et $N = 0$. Il en est de même de la sous-catégorie pleine des φ-modules finis. Comme, pour tout (φ, N)-module fini D, l'action de N est nilpotente (cf. plus bas) et comme le noyau de N est un sous-objet, les objets simples de la catégorie des (φ, N)-modules finis sont les mêmes que ceux de la catégories des φ-modules finis.

Le résultat suivant est essentiellement dû à Dieudonné [Di57], voir aussi Manin [Ma63] ou Demazure [De72] :

PROPOSITION 5.1. — *La catégorie des φ-modules finis sur $\overline{k}$ est semi-simple.*

Pour tout nombre rationnel α, posons $\alpha = r/h$ avec $r, h \in \mathbb{Z}$, $h \geq 1$, r et h premiers entre eux. Soit $D_{[\alpha]}$ l'unique φ-module fini sur $\overline{k}$ dont le P_0-espace vectoriel sous-jacent *est* P_0^h*, avec, si* $\{d_1, d_2, \ldots, d_h\}$ *désigne la base canonique,*

$$\varphi(d_i) = d_{i+1} \text{ si } i \neq h \text{ et } \varphi(d_h) = p^r d_1 \ .$$

Alors chaque $D_{[\alpha]}$ *est un objet simple et chaque objet simple de cette catégorie est isomorphe à un et un seul de ces* $D_{[\alpha]}$.

Si D est un φ-module sur $\overline{k}$ et si $\alpha = r/h$ est comme ci-dessus, le sous-P_0-espace vectoriel D_α de D engendré par les d tels que $\varphi^h d = p^r d$ est stable par φ et est la somme des sous-φ-modules de D isomorphes à $D_{[\alpha]}$. Si D est fini, presque tous les D_α sont nuls et $D = \oplus_{\alpha \in \mathbb{Q}} D_\alpha$.

Si maintenant D est un φ-module sur k, $\overline{D} = P_0 \otimes_{K_0} D$ a une structure évidente de φ-module sur $\overline{k}$ et D s'identifie à un sous-K_0-espace vectoriel de $\overline{D}$ stable par φ. On pose $D_\alpha = D \cap \overline{D}_\alpha$. On appelle D_α la *partie de pente* α de D. Si D est fini, on a encore

$$D = \oplus_{\alpha \in \mathbb{Q}} D_\alpha$$

et on appelle cette décomposition la *décomposition isopentique de D*. Les nombres rationnels α tels que D_α est non nul s'appellent *les pentes de D*.

Si D est un (φ, N)-module fini et si $D = \oplus_{\alpha \in \mathbb{Q}} D_\alpha$ est la décomposition isopentique du φ-module fini sous-jacent, la relation $N\varphi = p\varphi N$ implique que $N(D_\alpha) \subset D_{\alpha-1}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$ (et donc, en particulier, que N est nilpotent sur D).

On appelle *(φ, N)-module filtré sur K* (ou *(φ, N)-module filtré* s'il n'y a pas de risque de confusion sur K) la donnée d'un (φ, N)-module D et d'une structure d'espace vectoriel filtré sur le K-espace vectoriel $D_K = K \otimes_{K_0} D$ (§4.2). Les (φ, N)-modules filtrés forment, de manière évidente, une catégorie additive $\mathbb{Q}_p$-linéaire que nous notons $\underline{M}$.

Si $f : D' \to D$ et $g : D \to D''$ sont des morphismes de (φ, N)-modules filtrés, on dit que

$$0 \to D' \to D \to D'' \to 0$$

est une *suite exacte courte de (φ, N)-modules filtrés* si la suite sous-jacente de (φ, N)-modules est une suite exacte courte et si

$$0 \to D'_K \to D_K \to D''_K \to 0$$

est une suite exacte courte de K-espaces vectoriels filtrés.

Un *sous-(φ, N)-module filtré* D' d'un (φ, N)-module filtré D est un sous-K_0-espace vectoriel stable par φ et N, où l'on munit $D'_K = K \otimes_{K_0} D' \subset K \otimes_{K_0} D = D_K$ de la filtration induite. Il existe alors sur le K_0-espace vectoriel quotient $D'' = D/D'$ une unique structure de (φ, N)-module filtré telle que

$$0 \to D' \to D \to D'' \to 0$$

soit une suite exacte courte de (φ, N)-module filtrés; on l'apelle le *(φ, N)-module filtré quotient* de D par D'.

On dit qu'un (φ, N)-module filtré est *fini* si le (φ, N)-module sous-jacent l'est. Si D_1 et D_2 sont deux (φ, N)-modules filtrés et si l'un des deux est fini, on peut définir le (φ, N)-module filtré $D_1 \otimes D_2$: le (φ, N)-module sous-jacent est le produit tensoriel sous-jacent et le K-espace vectoriel $(D_1 \otimes D_2)_K$ s'identifie à $(D_1)_K \otimes_K (D_2)_K$ et a une structure d'espace vectoriel filtré (§4.2). On peut définir de la même façon le (φ, N)-module filtré *dual* d'un (φ, N)-module filtré fini. La catégorie des (φ, N)-modules filtrés finis n'étant pas abélienne n'est pas tannakienne, mais le produit tensoriel a toutes les bonnes propriétés qu'on pense. En particulier, K_0, avec $\varphi = \sigma$, $N = 0$ et la filtration de $K \otimes_{K_0} K_0 = K$ définie par

$$\mathrm{Fil^i K} = \begin{cases} K & \text{si} \quad i \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad i > 0 \end{cases}$$

est un objet-unité.

A tout (φ, N)-module filtré fini D, on peut associer deux invariants numériques $t_N(D), t_H(D) \in \mathbb{Z}$ (ici $N =$ Newton et $H =$ Hodge) :

i) Le premier ne dépend que de la structure de φ-module sous-jacente à D : si $\dim_{K_0} D = 1$, si d est un générateur de D et si $\varphi d = \lambda d$, $t_N(D)$ est la valuation p-adique de λ (si $k \neq \mathbb{F}_p$, λ dépend du choix de la base, mais pas sa valuation p-adique) ; si maintenant $\dim_{K_0} D = h$, on pose $t_N(D) = t_N(\wedge^h D)$ (on peut voir $\wedge^h D$ comme un sous-objet de $D^{\otimes^h}$). Si $D = \oplus_{\alpha \in \mathbb{Q}} D_\alpha$ est la décomposition isopentique de D, pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha \dim_{K_0} D_\alpha \in \mathbb{Z}$, pour tout α et on a aussi $t_N(D) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} \alpha \dim_{K_0} D_\alpha$.

ii) Le second ne dépend que de la filtration de D_K : si $\dim_{K_0} D = 1$, $t_H(D)$ est le plus grand entier i tel que $\mathrm{Fil^i D_K} = \mathrm{D_K}$; si maintenant $\dim_{K_0} D = h$, on pose $t_H(D) = t_H(\wedge^h D)$. On a aussi $t_H(D) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i . \dim_K (\mathrm{Fil^i D_K / Fil^{i+1} D_K})$.

On appelle (φ, N)*-module filtré faiblement admissible* tout (φ, N)-module filtré fini D vérifiant les deux conditions suivantes :

i) on a $t_H(D) = t_N(D)$;

ii) pour tout sous-(φ, N)-module filtré D' de D, $t_H(D') \leq t_N(D')$.

On note $\underline{M}^{fa}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{M}$ dont les objets sont les (φ, N)-modules filtrés faiblement admissibles. Le résultat suivant est facile à vérifier (cf. [Fo94b]) :

Proposition 5.2. — *La catégorie $\underline{M}^{fa}$ est abélienne. Si D est un objet de $\underline{M}^{fa}$, les sous-objets de D dans $\underline{M}^{fa}$ sont les sous-(φ, N)-modules filtrés D' de D tels que $t_H(D') = t_N(D')$.*

En revanche, le résultat suivant est beaucoup plus difficile :

Proposition 5.3. — *Le produit tensoriel de deux (φ, N)-modules filtrés faiblement admissibles est faiblement admissible.*

Ce résultat équivaut au fait que la catégorie $\underline{M}^{fa}$ est tannakienne sur $\mathbb{Q}_p$. Il avait d'abord été prouvé lorsque $N = 0$ sur chacun d'eux par Laffaille [La80] pour $K = K_0$ et par Faltings [Fa94] pour K quelconque ; puis dans le cas général par Totaro [To96]. C'est aussi une conséquence triviale du théorème 5.9 ci-dessous.

5.2 – Les anneaux B_{cris} et B_{st}

On se propose de rappeler brièvement la construction de quelques unes des principales propriétés des anneaux B_{cris} et B_{st}. On renvoie à [Fo94a] pour les preuves qui sont immédiates, sauf celles des propositions 5.4 et 5.5.

Reprenons les notations du §3.1. En particulier, θ désigne la projection de B_{dR}^{+} sur C et ξ est un générateur du noyau de la restriction de θ à $W(R)$. Notons A_{cris} le sous-anneau de B_{dR}^{+} formé des éléments qui peuvent s'écrire sous la forme $\sum_{m=0}^{\infty} a_m \xi^m/m!$, avec les $a_m \in W(R)$ tendant p-adiquement vers 0 lorsque $m \mapsto +\infty$. Cet anneau s'identifie au complété pour la topologie p-adique de la sous-$W(R)$-algèbre A_{cris}^{0} de B_{dR}^{+} engendrée par les $\xi^m/m!$, pour $m \in \mathbb{N}$ (qui est contenue dans $W(R)[1/p]$ et séparée pour la topologie p-adique).

L'anneau A_{cris} contient t et $t^{p-1} \in pA_{cris}$. On pose $B_{cris}^{+} = A_{cris}[1/p] \subset B_{dR}^{+}$ et $B_{cris} = B_{cris}^{+}[1/t] = A_{cris}[1/t] \subset B_{dR}$.

On note φ l'endomorphisme de Frobenius sur $W(R)$ et $W(R)[1/p]$. L'anneau A_{cris}^{0} est stable par φ qui s'étend à A_{cris} par continuité, ainsi qu'à B_{cris}^{+}. On a $\varphi t = pt$ et φ s'étend aussi à B_{cris} en posant $\varphi(1/t) = 1/pt$.

Remarque : Rappelons (§3.2) que $B_{dR}^{+} = \varprojlim_{r \geq 1} B_r$ et que chaque B_r a une structure d'espace de Banach p-adique. Munissons B_{dR}^{+} de la topologie de la limite projective des B_r (qui est moins fine que sa topologie d'anneau de valuation discrète). Alors B_{cris}^{+} est fermé dans B_{dR}^{+} et c'est un espace de Banach p-adique dont la topologie est induite par celle de B_{dR}^{+}.

On a $\xi = [\pi] - p$. Pour tout $g \in G_K$, il existe un unique $a(g) \in \mathbb{Z}_p$ tel que, dans R, $g(\pi) = \varepsilon^{a(g)}\pi$. On note B_{st} l'algèbre des polynômes en une indéterminée notée $\log[\pi]$ à coefficients dans B_{cris}. On prolonge l'action de φ et celle de G_K sur B_{cris} à B_{st}, en posant, avec des notations évidentes,

$$\varphi(\sum b_n (\log[\pi])^n) = \sum \varphi(b_n) p^n (\log[\pi])^n \text{ et}$$
$$g(\sum b_n (\log[\pi])^n) = \sum g(b_n)(\log[\pi] + a(g)t)^n \text{ pour tout } g \in G_K .$$

Enfin, on note N l'unique B_{cris}-dérivation de B_{st} telle que $N(\log[\pi]) = -1$.

L'action de φ et celle de N commutent à celle de G_K. Comme on a aussi $N\varphi = p\varphi N$, cela nous permet de considérer B_{st} comme un (φ, N)-module sur k et sur $\overline{k}$ (en un sens évident, c'est une (φ, N)*-algèbre, munie d'une action de* G_K).

Cette construction est indépendante du choix de π en ce sens que si l'on choisit un autre $\pi' \in R$ tel que $\pi'^{(0)} = p$, il existe $b \in \mathbb{Z}_p$ tel que $\pi' = \varepsilon^b \pi$ et l'homomorphisme de $B_{cris}-$algèbre de $B_{cris}[\log[\pi']]$ sur $B_{cris}[\log[\pi]]$ qui envoie $\log[\pi']$ sur $\log[\pi] + bt$ est un isomorphisme compatible avec toutes les structures dont on vient de parler.

Dans B_{dR}^{+}, $\frac{[\pi]}{p} - 1 = \xi/p \in \operatorname{Ker}\theta$, ce qui fait que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\frac{[\pi]}{p} - 1)^n / n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \xi^n / np^n$$

converge vers un élément qu'il est naturel de noter $\log([\pi]/p)$. Par conséquent, si l'on prolonge le logarithme p-adique usuel en posant $\log(p) = 0$, on peut voir $\log[\pi]$ comme un élément de B_{dR}. On a le résultat suivant :

Proposition 5.4 ([Fo94a], th.4.2.4). — *L'unique homomorphisme de $K \otimes_{K_0} B_{cris}$-algèbres*

$$K \otimes_{K_0} B_{st} \to B_{dR}$$

qui envoie $\log[\pi]$ *sur* $\log([\pi]/p)$ *est injectif et compatible avec l'action de G_K.*

On utilise ce résultat pour identifier non seulement B_{cris} mais aussi $K \otimes_{K_0} B_{cris}$, B_{st} et $K \otimes_{K_0} B_{st}$ à des sous-anneaux de B_{dR}. On munit $K \otimes_{K_0} B_{st}$ de la filtration induite par celle de B_{dR}. Ainsi B_{st} a une structure naturelle de (φ, N)-module filtré sur k et sur $\overline{k}$. En un sens évident, c'est une (φ, N)-*algèbre filtrée munie d'une action de G_K.*

Il est immédiat que B_{cris} s'identifie au noyau de N dans B_{st}. On pose

$$B^0 = \{b \in B_{cris} \mid \varphi(b) = b\} = \{b \in B_{st} \mid Nb = 0 \text{ et } \varphi(b) = b\} .$$

L'application qui à $\eta : K_0 \to B_{st}$ associe $\eta(1)$ permet d'identifier la $\mathbb{Q}_p$-algèbre $\mathrm{Hom}_{(\varphi,N)-\mathrm{modules}}(K_0, B_{st})$ à B^0.

Proposition 5.5 ([Fo94a], th.5.3.7). — *On a $B^0 \cap B_{dR}^+ = \mathbb{Q}_p$.*

5.3 – Représentations semi-stables et (φ, N)-modules filtrés admissibles

Soit V une représentation p-adique de G_K. Le B_{st}-module $B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ a une structure naturelle de (φ, N)-module filtré sur K : c'est un K_0-espace vectoriel, on pose $\varphi(b \otimes v) = \varphi b \otimes v$, $N(b \otimes v) = Nb \otimes v$; on a $(B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)_K = B_{st,K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ et, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose $\mathrm{Fil^i(B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)_K = Fil^i B_{st,K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V}$.

On pose $D_{st}(V) = (B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$. Comme l'action de G_K commute à celle de φ et à celle de N, c'est un sous-(φ, N)-module filtré de $B_{st} \otimes V$. La proposition 5.4 nous permet d'identifier $K \otimes_{K_0} D_{st}(V) = (B_{st,K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ à un sous-K-espace vectoriel de $(B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} = D_{dR}(V)$; on a donc $\dim_{K_0} D_{st}(V) = \dim_K (B_{st,K} \otimes V)^{G_K} \leq \dim_K D_{dR}(V) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$. Comme l'action de φ est injective sur B_{st}, $D_{st}(V)$ est un (φ, N)-module filtré fini sur K. On voit que l'on peut considérer D_{st} comme un foncteur $\mathbb{Q}_p$-linéaire de la catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ des représentations p-adiques de G_K dans celle des (φ, N)-modules filtrés finis.

On dit que la représentation V est *semi-stable* si $\dim_{K_0} D_{st}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ (ce qui implique que V est de de Rham et que $K \otimes_{K_0} D_{st}(V)$ s'identifie, en tant que K-espace vectoriel filtré à $D_{dR}(V)$). On dit que la représentation V est *cristalline* si elle est semi-stable et si en outre $N = 0$ sur $D_{st}(V)$. Cela revient à demander que le K_0-espace vectoriel $D_{\mathrm{cris}}(V) = (D_{st}(V)_{N=0} = (B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ qui, a priori, est de dimension finie inférieure ou égale à la dimension de V sur $\mathbb{Q}_p$ est égale à cette dimension.

On dit qu'un (φ, N)-module filtré D est *admissible* s'il existe une représentation p-adique semi-stable V de G_K telle que $D \simeq D_{st}(V)$. Cela implique en particulier que D

est fini. On note $\underline{M}^a$ la sous-catégorie pleine de $\underline{M}$ dont les objets sont les (φ, N)-modules filtrés admissibles.

Rappelons que B_{cris} contient le corps P_0 des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\overline{k}$. La fermeture algébrique $\overline{P}$ de P dans B_{dR} est une clôture algébrique de P_0 contenant le corps $P = KP_0$ et le groupe d'inertie I_K de l'extension $\overline{K}/K$ s'identifie au groupe de Galois de l'extension $\overline{P}/P$.

PROPOSITION 5.6. — *i) Soit V une représentation p-adique de G_K de dimension 1 sur $\mathbb{Q}_p$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(a) la représentation V est cristalline,
(b) la représentation V est semi-stable,
(c) il existe un entier $i \in \mathbb{Z}$ tel que $V(-i)$ est non ramifiée.
S'il en est ainsi, il existe un sous-K_0-espace vectoriel E de dimension 1 de P_0 stable par G_K tel que, si v est un élément non nul de V et si b_0 est un élément non nul de E, alors $b_0t^{-i} \otimes v$ est une base de $D_{st}(V)$ sur K_0.
ii) Soit D un (φ, N)-module filtré de dimension 1 sur K_0. Alors D est admissible si et seulement s'il est faiblement admissible.

LEMME 5.7. — *i) Soit $G_k = \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{k}}/\mathrm{k}) = G_K/I_K$. On a $H^1_{\mathrm{cont}}(G_k, W(\overline{k})^*) = 0$.*
ii) Pour toute unité u de l'anneau $W(\overline{k})$, il existe un élément non nul $x \in W(\overline{k})$ tel que $\varphi(x) = ux$.

Preuve : Prouvons (i) : Posons $U_0 = W(\overline{k})^*$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $U_n = 1 + p^n W(\overline{k})$. Les $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une filtration décroissante, exhaustive et séparée de $W(\overline{k})^*$ par des sous-groupes fermés,la topologie induite sur chaque U_n/U_{n+1} étant la topologie discrète. Il suffit donc de vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout 1-cocycle continu $f : G_k \to U_n$, il existe $a \in U_n$ tel que $f - \partial a$ soit à valeurs dans U_{n+1}, ou encore que $H^1(G_k, U_n/U_{n+1}$ pour tout n, ce qui est bien connu, puisque U_0/U_1 s'identifie à $\overline{k}^*$, tandis que, pour $n \geq 1$, U_n/U_{n+1} est isomorphe au groupe additif de $\overline{k}$.

L'assertion (ii), facile à vérifier directement, est un cas particulier du théorème sur la classification des F-isocristaux sur un corps algébriquement clos (prop.5.1). □

Prouvons la proposition 5.6 : L'implication (a) $\Rightarrow$ (b) est claire.

Montrons que (b) $\Rightarrow$ (c). Il est clair que, si V est semi-stable en tant que représentation de G_K, elle l'est aussi en tant que représentation de $I_K = \mathrm{Gal}(\overline{P}/P)$ et on peut supposer k algébriquement clos. Come V est de de Rham, il existe (prop.4.3) $i \in \mathbb{Z}$ tel que G_K opère sur $V(-i)$ à travers un groupe fini. Comme t^i est un élément inversible de B_{st} qui est un générateur du $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $\mathbb{Q}_p(i)$, $V(-i)$ est aussi semi-stable et l'on peut supposer que $i = 0$. Si $v \in V$ est non nul, il existe alors un élément non nul $c \in \overline{K} = \overline{P}$ tel que $D_{dR}(V)$ est le K-espace vectoriel engendré par $c \otimes v$. Comme $D_{st}(V) \subset D_{dR}(V)$, on peut choisir $c \in B_{st}$. Mais $B_{st} \cap \overline{K} = K_0$ (pour tout $c \in B_{st} \cap \overline{K} = K_0$, on a $K(c)_0 = K_0$ et l'application $K(c) \otimes_{(K(c)_0} B_{st} \to B_{dR}$ est injective) donc $c \in K_0$ et l'action de $G_K = I_K$ sur V est triviale.

Montrons que (c) $\Rightarrow$ (a). Si $\chi : G_K \to \mathbb{Z}_p^*$ désigne le caractère cyclotomique, il existe un homomorphisme continu $\eta : G_k \to \mathbb{Z}_p^*$ tel que G_K opère sur V via le caractère $\eta\chi^i$. On peut voir η comme un 1-cocycle continu de G_k à valeurs dans $\mathbb{Z}_p^* \subset W(\overline{k})^*$ et l'assertion (i) du lemme 5.7 implique qu'il existe $u \in W(\overline{k})^*$ tel que $g(u) = \eta(g)u$, pour tout $g \in G_k$. Si v est un élément non nul de V, on voit que $\frac{1}{ut^i} \otimes v$ est un élément non nul de $D_{\mathrm{cris}}(V)$ et la représentation V est bien cristalline. En outre, si l'on pose $b_0 = 1/u$, on voit que $D_{\mathrm{cris}}(V)$ est bien comme on veut, ce qui termine la preuve de l'assertion (i).

Montrons alors (ii). Si D est admissible, alors, avec les notations ci-dessus, on peut supposer que D est le K_0-espace vectoriel engendré par $d = b_0 t^{-i} \otimes v$. On voit que $\varphi(d) = p^{-i}cd$, où $c = \varphi(b_0)/b_0 = \sigma(b_0)/b_0$ est une unité de K_0 et $t_N(D) = -i$. On voit aussi que $d \in \mathrm{Fil}^{-\mathrm{i}}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ mais $d \notin \mathrm{Fi}l^{-i+1}B_{dR}$ et $t_H(D) = -i = t_N(D)$.

Réciproquement si D est faiblement admissible et si $t_H(D) = t_N(D) = -i$, et si l'on choisit un élément n on nul d de D, on a $\varphi(d) = p^{-i}cd$, avec $c \in W(k)^*$. D'après l'assertion (ii) du lemme 5.7, il existe $x \in W(\overline{k})$ tel que $\varphi(x)/x = 1/c$. On voit que le sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel V de B_{cris} engendré par $v = xt^i$ est stable par G_K et que $\frac{1}{xt^i} \otimes v \in D_{\mathrm{cris}}(V)$, ce qui implique que V est cristalline. Comme le (φ, N)-module filtré $D_{\mathrm{cris}}(V)$ est isomorphe à D, D est admissible. □

Soit maintenant D un (φ, N)-module filtré fini. On pose $V_{st}(D) = \mathrm{Hom}_{\underline{M}}(K_0, B_{st} \otimes D)$. L'application qui envoie $\eta \in V_{st}(D)$ sur $\eta(1)$ permet d'identifier $V_{st}(D)$ au sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de $B_{st} \otimes_{K_0} D$ formé des x vérifiant $\varphi x = x$, $Nx = 0$ et l'image de x dans $B_{dR} \otimes_K D_K$ est dans le Fil^0 de ce K-espace vectoriel. Cet espace est stable par G_K, ce qui permet de considérer V_{st} comme un foncteur $\mathbb{Q}_p$-linéaire de la catégorie des (φ, N)-modules filtrés finis dans celle des $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels munis d'une action linéaire de G_K. Lorsque D est tel que $V_{st}(D)$ est de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$, l'action de G_K est continue, ce qui permet de considérer $V_{st}(D)$ comme une représentation p-adique de G_K.

THÉORÈME 5.8. — *i) L'application évidente*

$$K_0 \to D_{st}(\mathbb{Q}_p) \quad (\text{ resp. } \quad \mathbb{Q}_p \to V_{st}(K_0) \ )$$

est un isomorphisme de (φ, N)-modules filtrés (resp. de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels).

ii) Pour toute représentation p-adique semi-stable V de G_K, l'application B_{st}-linéaire

$$B_{st} \otimes_{K_0} D_{st}(V) \to B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

déduite de l'inclusion de $D_{st}(V)$ dans $B_{st} \otimes V$ est un isomorphisme de (φ, N)-modules filtrés.

iii) La sous-catégorie pleine $\mathrm{Rep}_{st}(G_K)$ de $\mathrm{Rep}_{dR}(G_K)$ dont les objets sont les représentations semi-stables est une sous-catégorie tannakienne.

iv) Comme sous-catégorie pleine de $\underline{M}$, la catégorie $\underline{M}^a$ est stable par facteur direct, somme-directe, produit tensoriel et dual.

v) Tout (φ, N)*-module filtré admissible est faiblement admissible. La catégorie* $\underline{M}^a$ *est abélienne et, si* D *est un objet de* $\underline{M}^a$*, les sous-objets (resp. les quotients) de* D *dans* $\underline{M}^a$ *sont les les sous-objets (resp. les quotients) de* D *dans* $\underline{M}^{fa}$*.*

vi) La restriction de D_{st} *à* $\mathrm{Rep}_{st}(G_K)$ *est une* $\otimes$*-équivalence de* $\mathrm{Rep}_{st}(G_K)$ *sur* $\underline{M}^a$ *et la restriction de* V_{st} *à* $\underline{M}^a$ *en est un* $\otimes$*-quasi-inverse.*

De façon précise, l'assertion (iii) signifie que, en tant que sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}_{dR}(G_K)$, la catégorie $\mathrm{Rep}_{st}(G_K)$ est stable par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel et dual. L'assertion (vi) signifie que $V_{st} : \mathrm{Rep}_{st}(G_K) \to \underline{M}^a$ est une équivalence de catégorie et $D_{st} : \underline{M}^a \to \mathrm{Rep}_{st}(G_K)$ est un quasi-inverse et qu'en outre,

a) si V_1 et V_2 sont deux représentations semi-stables, l'application

$$D_{st}(V_1) \otimes D_{st}(V_2) \to D_{st}(V_1 \otimes V_2) \ ,$$

induite par la multiplication dans B_{st}, est un isomorphisme de (φ, N)-modules filtrés;

b) si V est une représentation p-adique semi-stable et si V^* désigne la représentation duale, l'application bilinéaire évidente

$$D_{st}(V^*) \times D_{st}(V) \to D_{st}(V^* \otimes V) \to D_{st}(\mathbb{Q}_p) = K_0$$

induit une dualité de (φ, N)-modules filtrés;

c) que si D_1 et D_2 sont des (φ, N)-modules filtrés faiblement admissibles, $D_1 \otimes D_2$ est aussi faiblement admissible et l'application

$$V_{st}(D_1) \otimes V_{st}(D_2) \to V_{st}(D_1 \otimes D_2) \ ,$$

induite par la multiplication dans B_{st}, est un isomorphisme de représentations p-adiques de G_K ;

d) que si D est un (φ, N)-module filtré faiblement admissible, le (φ, N)-module filtré dual D^* l'est aussi et que l'application bilinéaire évidente

$$V_{st}(D^*) \times V_{st}(D) \to V_{st}(D^* \otimes D) \to V_{st}(K_0) = \mathbb{Q}_p$$

induit une dualité de représentations p-adiques.

La preuve du théorème 5.8, qui repose sur les propositions 5.4 , 5.5 et 5.6, est donnée en détail dans [Fo94b]. En voici les grandes lignes :

1 – On montre d'abord (i) : On a $D_{st}(\mathbb{Q}_p) = B_{st}^{G_K}$. Comme $K_0 \subset B_{st}^{G_K} \subset B_{dR}^{G_K} = K$, $D_{st}(\mathbb{Q}_p)$ est une extension finie K' de K_0 contenue dans $K \cap B_{st}$. Le fait que l'application naturelle $K \otimes_{K_0} B_{st} \to B_{dR}$ soit injective (prop.5.4) implique que $K' = K_0$.

De même, l'application $\eta \mapsto \eta(1)$ identifie $V_{st}(\mathbb{Q}_p)$ à $B^0 \cap B_{dR}^+$ et l'égalité $\mathbb{Q}_p = V_{st}(K_0)$ n'est autre que la proposition 5.5.

2 – On montre ensuite (ii) : On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} B_{st} \otimes_{K_0} D_{st}(V) & \to & B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_{dR} \otimes_K D_{dR}(V) & \to & B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \end{array}$$

et les deux flèches verticales ainsi que la flèche horizontale inférieure sont injectives. Il en est donc de même de la flèche horizontale supérieure qui nous permet d'identifier $B_{st} \otimes D_{st}(V)$ à un sous-(φ, N)-module de $B_{st} \otimes V$. Soient $v_1, v_2, \ldots, v_h$ une base de V sur $\mathbb{Q}_p$ et $d_1, d_2, \ldots, d_h$ une base de $D_{st}(V)$ sur K_0. Le déterminant b de la matrice dont les colonnes sont les composantes des $1 \otimes d_i$ sur la base des $1 \otimes v_i$ est un élément non nul de B_{st}. On voit que $v = v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_h$ est une base de la représentation p-adique de G_K de dimension 1 qui est $\det V = \wedge^h V$ et que $b \otimes v$ est un élément non nul de $D_{st}(\det V)$. Par conséquent, $\det V$ est semi-stable. Il en résulte (prop. 5.6), que b est de la forme $b = b_0 t^{-i}$, avec $i \in \mathbb{Z}$ et $b_0 \in P_0$, non nul donc que b est inversible dans B_{st}.

Ceci prouve que l'application qui nous intéresse est un isomorphisme de (φ, N)-modules. Le fait que c'est aussi un isomorphisme de (φ, N)-modules filtrés résulte alors de l'assertion (1) du théorème 4.1.

3 – Si V est une représentation p-adique semi-stable et si $D = D_{st}(V)$, l'application naturelle

$$V \to V_{st}(D)$$

est un isomorphisme : en effet l'assertion précédente montre que $B_{st} \otimes D$ s'identifie à $B_{st} \otimes V$ en tant que (φ, N)-module filtré et $V_{st}(D) = \mathrm{Hom}_{\underline{M}}(K_0, B_{st} \otimes V) = \mathrm{Hom}_{\underline{M}}(K_0, B_{st}) \otimes V = V_{st}(K_0) \otimes V = \mathbb{Q}_p \otimes V = V$.

4 – La catégorie $\mathrm{Rep}_{st}(G_K)$ est une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}_{dR}(G_K)$ stable par somme directe, sous-objet, quotient (donc est abélienne) et toute suite exacte courte

$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

de représentations p-adiques semi-stables induit une suite exacte courte de (φ, N)-modules filtrés

$$(*) \qquad 0 \to D_{st}(V') \to D_{st}(V) \to D_{st}(V'') \to 0 \ .$$

La stabilité par somme directe est évidente. Si

$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

est une suite exacte courte de représentations p-adiques, on a une suite exacte courte

$$0 \to D_{st}(V') \to D_{st}(V) \to D_{st}(V'') \ .$$

Si V est semi-stable, on a $\dim_{K_0} D_{st}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$. Comme $\dim_{K_0} D_{st}(V') \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V'$ et $\dim_{K_0} D_{st}(V'') \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V''$, ces deux inégalités sont nécessairement des égalités. Par conséquent V' et V'' sont bien semi-stables et la suite (*) est bien une suite exacte courte de (φ, N)-modules. Le fait que ce soit aussi une suite exacte de (φ, N)-modules filtrés résulte du théorème 4.2.

5 – La catégorie $\underline{M}^a$ est abélienne, la restriction de D_{st} à $\mathrm{Rep}_{st}(G_K)$ induit une équivalence de cette catégorie sur $\underline{M}^a$, la restriction de D_{st} à $\underline{M}^a$ étant un quasi-inverse : cela résulte formellement de (3) et (4).

6 – Si V_1 et V_2 sont deux représentations p-adiques semi-stables, $V_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2$ l'est aussi et l'application naturelle,

$$D_{st}(V1) \otimes_{K_0} D_{st}(V_2) \to D_{st}(V_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2) \ ,$$

induite par la multiplication dans B_{st}, est un isomorphisme de (φ, N)-modules filtrés :

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} D_{st}(V1) \otimes_{K_0} D_{st}(V_2) & \to & D_{st}(V_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_{dR}(V1) \otimes_{K_0} D_{dR}(V_2) & \to & D_{dR}(V_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2) \end{array}$$

dont les deux flèches verticales et la flèche horizontale inférieure f_K sont injectives. On en déduit que la flèche horizontale supérieure f est injective. Pour des raisons de dimension, $V_1 \otimes V_2$ est donc semi-stable et f est un isomorphisme de (φ, N)-modules. Comme f_K est un isomorphisme de K-espaces vectoriels filtrés (th.4.2), f est bien un isomorphisme de (φ, N)-modules filtrés.

7 – Si V est une représentation p-adique semi-stable, il en est de même de sa duale V^* et l'application bilinéaire naturelle $D_{st}(V^*) \otimes_{K_0} D_{st}(V) \to D_{st}(\mathbb{Q}_p) = K_0$ identifie le (φ, N)-module filtré $D_{st}(V^*)$ au dual de $D_{st}(V)$:

Soit $h = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$. Le cas où $h = 1$ est immédiat. Le cas général s'en déduit en remarquant que V^* s'identifie à $\wedge^{h-1} V \otimes (\wedge^h V)^*$.

8 – Tout morphisme de $\underline{M}^a$ est strict. Autrement dit, si $\delta : D_1 \to D_2$ est un morphisme de (φ, N)-modules filtrés et si D_1 et D_2 sont admissibles, alors, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\delta_K(\mathrm{Fil^i(D_1)_K}) = \mathrm{Fil^i(D_2)_K} \cap \delta_\mathrm{K}((\mathrm{D_1})_\mathrm{K})$:

D'après (5), on peut supposer qu'il existe un morphisme de représentations p-adiques semi-stables $\eta : V_1 \to V_2$ tel que δ est le morphisme $D_{st}(\eta) : D_{st}(V_1) \to D_{st}(V_2)$. Le morphisme de K-espaces vectoriels filtrés qui en résulte s'identifie au morphisme $D_{dR}(\eta) : D_{dR}(V_1) \to D_{dR}(V_2)$ qui est bien strict (th.4.2).

9 – Si D est un (φ, N)-module filtré admissible, alors D est faiblement admissible. Si $h = \dim_{K_0} D$, alors $\wedge^h D$, facteur direct de $D^{\otimes^h}$ est admissible (cf. aussi (2)) et de dimension 1 : on a donc $t_H(D) = t_H(\wedge^h D) = t_N(\wedge^h D) = t_N(D)$. Soit D' un sous-K_0-espace vectoriel de D de dimension r stable par φ et N. Il faut montrer que $t_H(D') \leq t_N(D')$. Quitte à remplacer D par $\wedge^r D$ (qui est admissible comme facteur direct de $D^{\otimes^r}$) et D' par $\wedge^r D'$, on peut supposer $r = 1$. Supposons que $t_H(D') > t_N(D')$

et soit Δ le (φ, N)-module filtré de dimension 1 sur K_0 qui est D' en tant que (φ, N)-module et sur lequel la filtration est définie par

$$\mathrm{Fil}^{\mathrm{i}}\Delta_{\mathrm{K}} = \begin{cases} \Delta_K & \text{si} \quad i \leq t_N(D') \\ 0 & \text{si} \quad i > t_N(D') \end{cases}$$

Alors Δ est un (φ, N)-module filtré faiblement admissible de dimension 1, donc admissible (prop.5.6) et l'inclusion de D' dans D induit un morphisme de Δ dans D. Ce morphisme n'est pas strictement compatible aux filtrations, ce qui contredit (8).

10 – Si D est un (φ, N)-module filtré admissible, les sous-objets de D dans $\underline{M}^a$ sont les sous-objets de D dans $\underline{M}^{fa}$:

D'après (9), si D' est un sous-objet de D dans $\underline{M}^a$, il est faiblement admissible. Il s'agit donc de montrer que tout sous-objet de D dans $\underline{M}^{fa}$ est admissible, i.e. que si D' est un sous-K_0-espace vectoriel de D, stable par φ et N qui est tel que $t_H(D') = t_N(D')$, alors D' est admissible. Si D' est de dimension 1, cela résulte de la proposition 5.6. Le cas général s'en déduit ainsi : on peut supposer qu'il existe une représentation p-adique semi-stable V de G_K telle que $B_{st} \otimes_{K_0} D$ s'identifie à $B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$. Un lemme facile d'algèbre linéaire nous dit que si M est un sous-B_{st}-module libre de rang r de $B_{st} \otimes_{K_0} D = B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$, alors, pour qu'il existe un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel V' de V tel que $M = B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V'$, il faut et il suffit qu'il existe une droite L de $\wedge^r_{\mathbb{Q}_p} V$ telle que $\wedge^h_{B_{st}} M = B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$; ceci nous ramène au cas où $D' = 1$. $\square$

Remarque : Il résulte de ce théorème que, si V est une représentation p-adique de G_K, les K_0-espace vectoriels $D^*_{st}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V, B_{st})$ et $D^*_{cris}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V, B_{cris})$ sont de dimension inférieure ou égale à la dimension de V sur $\mathbb{Q}_p$ et que V est semi-stable (resp. cristalline) si et seulement si on a l'égalité. Dans ce cas $D^*_{st}(V)$ (resp. $D^*_{cris}(V)$) s'identifie au (φ, N)-module filtré dual de $D_{st}(V)$ (resp. $D_{cris}(V)$).

Conjecturé depuis longtemps, le résultat suivant a été prouvé récemment [CF00] :

Théorème 5.9. — *Tout (φ, N)-module filtré faiblement admissible est admissible*

Autrement dit, compte-tenu du théorème 5.8, on a $\underline{M}^a = \underline{M}^{fa}$, ce qui fait que l'on a une description explicite et élémentaire de l'image essentielle de la restriction à la catégorie des représentations p-adiques semi-stables du foncteur V_{st}. Ou encore, comme sous-catégorie pleine de $\underline{M}$, la catégorie $\underline{M}^{fa}$ est stable par produit tensoriel et dual et devient ainsi une catégorie tannakienne, V_{st} induisant une $\otimes$-équivalence entre $\mathrm{Rep}_{st}(G_K)$ et $\underline{M}^{fa}$, la restriction de D_{st} étant un quasi-inverse.

Dans le reste du paragraphe 5, nous allons d'abord (§5.4 et 5.5) établir quelques propriétés supplémentaires concernant les anneaux B_{cris} et B_{st} qui nous paraissent intéressantes. Certaines d'entre elles sont utilisées pour prouver le théorème. Enfin (§5.6), nous donnerons quelques idées de la preuve du théorème 5.9 (mais on renvoie à [CF00] pour une démonstration complète).

5.4 – L'anneau $BW_{\mathrm{cris}}(R)$

Soient ξ et π comme au paragraphe précédent. On note $BW_{\mathrm{cris}}(R)$ le quotient de l'anneau $W(R)[[X]]$ des séries formelles en X à coefficients dans $W(R)$ par l'idéal engendré par $pX - \xi^p$. Comme il existe $\beta \in W(R)$ tel que $\xi^p = [\pi]^p + p^2\beta$, $BW_{\mathrm{cris}}(R)$ s'identifie aussi au quotient de l'anneau $W(R)[[Y]]$ par l'idéal engendré par $pY - [\pi]^p$ (il suffit de poser $Y = X - p\beta$).

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $(\xi^p/p)^m = ((pm)!/p^m)(\xi^{pm}/(pm)!)$ et, comme la suite des $(pm)!/p^m$ tend p-adiquement vers 0, il existe un unique homomorphisme continu ι de $W(R)$-algèbres de $BW_{\mathrm{cris}}(R)$ dans A_{cris} qui envoie l'image de X sur ξ^p/p, ou encore l'image de Y sur $[\pi]^p/p$.

Proposition 5.10. — *L'homomorphisme ι défini ci-dessus est injectif. Si on l'utilise pour identifier $BW_{\mathrm{cris}}(R)$ à un sous-anneau de A_{cris}, ce sous anneau est stable par G_K et par φ et on a*

$$\varphi(A_{cris}) \subset BW_{\mathrm{cris}}(R) \subset A_{cris} \ .$$

Preuve : Pour montrer l'injectivité il s'agit de vérifier que le noyau I de l'application de $W(R)[[X]]$ dans B_{dR}^+ qui envoie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ sur $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^{np}/p^n$ est l'idéal engendré par $\xi^p - pX$.

Tout $\alpha \in W(R)[[X]]$ peut s'écrire $\alpha = a + X\alpha'$, avec $a \in W(R)$ et $\alpha' \in W(R)[[X]]$. Comme l'image ξ^p/p de X est dans $\mathrm{Fil^p B_{dR}}$, si $\alpha \in I$, on a $a \in \mathrm{Fil}^p B_{dR} \cap W(R) = \xi^p W(R)$ et il existe $b \in W(R)$ tel que $a = \xi^p b$; on peut donc écrire $\alpha = b(\xi^p - pX) + X\beta$, avec $\beta = \alpha' + pb \in W(R)[[X]]$. On a $X\beta \in I$ et donc aussi $\beta \in I$.

Si $\alpha \in I$, on voit donc que l'on peut construire de proche en proche des suites $b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots$ d'éléments de $W(R)$ et $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ d'éléments de I tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = (\xi^p - pX)b_n + X\alpha_{n+1}$. On a alors $\alpha = (\xi^p - pX)\gamma$, avec $\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n$ et α appartient bien à l'idéal engendré par $\xi^p - pX$.

Pour tout $g \in G_K$, il existe $a \in \mathbb{Z}_p$ tel que $g(\pi) = \varepsilon^a \pi$; on a donc $g([\pi]^p/p) = [\varepsilon^{ap}][\pi]^p/p$ et la stabilité de $BW_{\mathrm{cris}}(R)$ par G_K s'en déduit.

Enfin, il existe $a \in W(R)$ tel que $\varphi(\xi) = p(\xi^p/p + a)$. Comme tout élément $x \in A_{cris}$ peut s'écrire $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n/n!$, avec les $a_n \in W(R)$, tendant p-adiquement vers 0, on a $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a_n)(p^n/n!)(a + \xi^p/p)^n \in BW_{\mathrm{cris}}(R)$. $\square$

Remarque : La proposition précédente implique que pour étudier les représentations p-adiques semi-stables, on peut remplacer A_{cris} par $BW_{\mathrm{cris}}(R)$. De façon précise, on a $t \in BW_{\mathrm{cris}}(R)$ et $t^{p-1} \in pBW_{\mathrm{cris}}(R)$, ce qui fait que $BW_{\mathrm{cris}}(R)[1/p, 1/t] = BW_{\mathrm{cris}}(R)[1/t]$ et, pour toute représentation p-adique V de G_K,

$$D_{cris}(V) = (BW_{\mathrm{cris}}(R)[1/t] \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \text{ et } D_{st}(V) = (BW_{\mathrm{cris}}(R)[\log[\pi], 1/t] \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \ .$$

Soient alors

$S_0(X_0, Y_0) = X_0 + Y_0$, $S_1(X_0, X_1, Y_0, Y_1) = X_1 + Y_1 - \sum_{i=1}^{p-1} (p^{-1} \begin{pmatrix} p \\ i \end{pmatrix}) X_0^i Y_0^{p-i}$, ..., $S_n(X_0, X_1, \ldots, X_n, Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$, ...

les polynômes à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ en les indéterminées $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui définissent l'addition dans les vecteurs de Witt (cf. par exemple, [CL], chap.II, §6).

La proposition suivante permet de considérer $BW_{\mathrm{cris}}(R)$ comme un anneau de "*bivecteurs de Witt*" :

Proposition 5.11. — *Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des "bivecteurs de Witt" de la forme*

$$a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\ldots, a_{-m}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1 \ldots, a_n, \ldots) \ ,$$

avec les $a_n \in R$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $v_R(a_{-m}) \geq mp^{1-m}$ pour tout $m > 0$.

i) Pour tout $a \in \mathcal{B}$, la suite $\sum_{m=1}^{\infty}[a_m]^{p^m}/p^m$ converge dans $BW_{\mathrm{cris}}(R)$ et l'application $\rho : \mathcal{B} \to BW_{\mathrm{cris}}(R)$ qui envoie a sur $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) + \sum_{m=1}^{\infty}[a_m]^{p^m}/p^m$ est une bijection de $\mathcal{B}$ sur $BW_{\mathrm{cris}}(R)$.

ii) Utilisons cette bijection pour identifier $\mathcal{B}$ et $BW_{\mathrm{cris}}(R)$. Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de cet anneau. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la suite des

$$S_m(a_{n-m}, a_{n-m+1}, \ldots, a_n, b_{n-m}, b_{n-m+1}, \ldots, b_n)$$

converge dans R lorsque $m \mapsto +\infty$ vers un élément c_n. On a $a + b = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Preuve : On a $v_R(\pi) = 1$. Si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{B}$, pour tout $m > 0$, on a $v_R(a_m^{p^m}) \geq mp$ et on peut écrire $a_m^{p^m} = b_m\pi^{mp}$, avec $b_m \in R$; on a alors $[a_m]^{p^m} = [b_m]([\pi]^p/p)^m$ et la série $\sum_{m=1}^{\infty}[a_m]^{p^m}/p^m$ converge bien dans $BW_{\mathrm{cris}}(R)$.

Il est facile de voir que, pour tout entier $r \geq 1$, tout élément de $BW_{\mathrm{cris}}(R)$ qui peut s'écrire $\sum_{m=0}^{r}\beta_m([\pi]^p/p)^m$, avec les $\beta_m \in W(R)$ s'écrit de façon unique sous la forme $\alpha + \sum_{m=1}^{r}[b_m]([\pi]^p/p)^m$, avec $\alpha \in W(R)$ et les $b_m \in W(R)$ et la bijectivité de ρ s'en déduit par passage à la limite.

La formule donnant l'addition est évidente lorsque presque tous les a_{-m} et les b_{-m}, avec $m \geq 1$ sont nuls et le cas général s'en déduit par continuité. □

Remarques : i) Si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in BW_{\mathrm{cris}}(R)$ et $r \in \mathbb{N}$, on a $p^r a = (a_{n-r}^{p^r})_{n\in\mathbb{Z}}$ et on en déduit que le sous-anneau $BW_{\mathrm{cris}}(R)[1/p]$ de B^+_{cris} s'identifie aux bivecteurs de la forme $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ avec les $a_n \in R$ vérifiant

$$\text{il existe } r \in \mathbb{N} \text{ tel que } p^{m-1}v_R(a_{-m}) \geq m - r \text{ si } m > r \ .$$

La formule donnée pour l'addition dans $\mathcal{B} = BW_{\mathrm{cris}}(R)$ reste valable dans $BW_{\mathrm{cris}}(R)[1/p]$.

ii) Il n'est pas difficile de donner des formules du même type pour la multiplication de deux bivecteurs.

5.5 – Les anneaux B^0, B^h_{st}, B^{∞}_{st},...

On note B^0 la sous-$\mathbb{Q}_p$-algèbre de B_{cris} formée des b tels que $\varphi b = b$. C'est aussi le sous-anneau de B_{st} formé des b tels que $\varphi b = b$ et $Nb = b$. En tant que $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel, B^0 s'identifie au $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des morphismes de (φ, N)-modules de K_0

dans B_{st}. On note aussi $B_{st}^{\varphi=1}$ la sous-$\mathbb{Q}_p$-algèbre de B_{st} formée des b tels que $\varphi b = b$ (observons que $B_{st}^{\varphi=1}$ n'est pas stable par N).

Pour tout nombre rationnel α, on note $B_{cris,\alpha}$ (resp. $B_{st,\alpha}$) la partie de pente α de B_{cris} (resp. B_{st}) *vu comme un φ-module sur $\overline{k}$* (si $\alpha = r/h$, avec r et h entiers, c'est donc le sous-P_0-espace vectoriel de B_{cris} (resp. B_{st}) engendré par les b tels que $\varphi^h b = p^r b$. Pour tout entier $h \geq 1$, on pose aussi

$$B_{cris}^h = \oplus_{h\alpha\in\mathbb{Z}} B_{cris,\alpha} \quad \text{et} \quad B_{st}^h = \oplus_{h\alpha\in\mathbb{Z}} B_{st,\alpha} \ .$$

On voit que $B_{cris,0}$ (resp. $B_{st,0}$) est le plus petit sous-anneau de B_{cris} (resp. B_{st}) contenant B^0 (resp. $B_{st}^{\varphi=1}$) et P_0. On voit aussi que chaque $B_{cris,\alpha}$ est un sous-$B_{cris,0}$-module de B_{cris} et chaque B_{cris}^h une sous-$B_{cris,0}$-algèbre. De même, chaque $B_{st,\alpha}$ est un sous-$B_{st,0}$-module de B_{st} et chaque B_{st}^h une sous-$B_{st,0}$-algèbre.

Si h divise h', $B_{st}^h \subset B_{st}^{h'}$. Posons enfin $B_{st}^\infty = \cup_{h\in\mathbb{N}^*} B_{st}^h$. On voit que, si V est une représentation p-adique semi-stable, on a $D_{st}(V) = (B_{st}^\infty \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ et si D est un (φ, N)-module filtré admissible, on a $V_{st}(D) = \mathrm{Hom}_{\underline{M}}(K_0, D \otimes B_{st}^\infty)$, ce qui fait que, pour l'étude des représentations semi-stables, on peut remplacer B_{st} par B_{st}^∞. Pour une représentation semi-stable V donnée (de même que pour toute la $\otimes$-catégorie qu'elle engendre) on peut même remplacer B_{st} par un B_{st}^h, avec h un entier convenable.

Nous nous proposons dans ce paragraphe de décrire les objets qui viennent d'être introduits à l'intérieur de B_{dR}, avec l'action de φ et de N. En particulier, on va voir que, pour tout α, $B_{cris,\alpha}$ est un $B_{cris,0}$-module libre de rang 1, $B_{st,\alpha}$ un $B_{st,0}$-module libre de rang 1 et que, pour chaque h, $B_{cris}^h = B_{cris,0}[t_h, t_h^{-1}]$ (resp. $B_{st}^h = B_{st,0}[t_h, t_h^{-1}]$), algèbre des polynômes de Laurent à coefficients dans $B_{cris,0}$ (resp. $B_{st,0}$) en une indéterminée bien choisie t_h. Il va être assez facile de caractériser un t_h qui convient dans B_{dR} par des conditions galoisiennes, mais un peu pénible de décrire l'action de φ sur ce t_h.

Notons $U^\times$ le sous-groupe du groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau R formé des éléments x tels que $x - 1 \in \mathfrak{m}_R$, idéal maximal de R. Un élément $x \in U^\times$ est donc une suite $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{O}_C$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ pour tout n et $x^{(0)} \in 1 + \mathfrak{m}_C$, si $\mathfrak{m}_C$ désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_C$.

Soit $U_1^\times$ le sous-groupe de $U^\times$ formé des éléments x tels que $v_R(x-1) \geq 1$, i.e. tels que $x^{(0)} \in 1 + p\mathcal{O}_C$. On voit que $U_1^\times$ est sans p-torsion, séparé et complet pour la topologie p-adique et a donc une structure naturelle de $\mathbb{Z}_p$-module et que $U^\times$ s'identifie au $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} U_1^\times$. En particulier, $U^\times$ a une structure d'espace de Banach p-adique.

Pour tout $x \in U_1^\times$, $[x] \in W(R)$ et la série

$$\log[x] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n ([x] - 1)^n / n$$

converge dans A_{cris}. En rendant p inversible, on étend l'application $x \mapsto \log[x]$ en une application notée de la même manière de $U^\times$ dans $B_{cris}^+ \subset B_{dR}^+$ et on note U son image. C'est un fermé de l'espace de Banach p-adique B^+_{cris} et cette application est un homéomorphisme de $U^\times$ sur U. Pour ε générateur de $\mathbb{Z}_p(1)^\times$, on a bien $t = \log[\varepsilon]$, comme au §3.1. On voit que $\theta(U) = C$ et que le noyau de la restriction de θ à U est $\mathbb{Q}_p(1) = \mathbb{Q}_p.t$. Comme $t \in \mathrm{Fil}^1\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ et $\notin \mathrm{Fil}^2\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$, on en déduit :

Proposition 5.12. — *Le composé de l'inclusion de U dans B^+_{dR} avec la projection de B^+_{dR} sur $B_2 = B^+_{dR}/\mathrm{Fil}^2\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ est injectif et on a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathbb{Q}_p(1) & \to & U & \to & C & \to & 0 \\ & & \cap & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & C(1) & \to & B_2 & \to & C & \to & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes.

Proposition 5.13. — *L'anneau B^0 est la sous-$\mathbb{Q}_p$-algèbre de B_{dR} engendrée par $U(-1)$ (i.e. par les u/t pour $u \in U$). La suite*

$$0 \to \mathbb{Q}_p \to B^0 \to B_{dR}/B^+_{dR} \to 0$$

(où l'application $B^0 \to B_{dR}/B^+_{dR}$ est le composé de l'inclusion de B^0 dans B_{dR} avec la projection de B_{dR} sur B_{dR}/B^+_{dR}) est exacte.

Pour tout entier $i \geq 0$, soit $\mathrm{Fil}^{-\mathrm{i}}\mathrm{B}^0 = \mathrm{B}^0 \cap \mathrm{Fil}^{-\mathrm{i}}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$. *On a* $\mathrm{Fil}^0\mathrm{B}^0 = \mathbb{Q}_\mathrm{p}$, $\mathrm{Fil}^{-1}\mathrm{B}^0 = \mathrm{U}(-1)$ *et, si $i \geq 2$,* $\mathrm{Fil}^{-\mathrm{i}}\mathrm{B}^0$ *s'identifie au sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de B_{dR} engendré par les $v_1v_2\ldots v_i$, avec $v_1, v_2, \ldots, v_i \in U(-1)$.*

On a $B^{\varphi=1}_{st} = B^0[log[\pi]/t]$, anneau des polynômes à coefficients dans B^0 en l'indéterminé $log[\pi]/t$.

Preuve : On sait ([Fo94a], th.5.3.7) que $\mathrm{Fil}^0\mathrm{B}^0 = \mathbb{Q}_\mathrm{p}$. Si $u \in U$, $u \in B^+_{cris} \subset B^+_{dR} = \mathrm{Fil}^0\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ et est de la forme $u = \log[x]$, avec $x \in U^*$; on a $\varphi([x]) = [x^p] = [x]^p$, d'où l'on déduit que $\varphi(u) = pu$; par conséquent $u/t \in \mathrm{Fil}^{-1}B_{dR}$ et vérifie $\varphi(u/t) = u/t$. On a donc $U(-1) \subset \mathrm{Fil}^{-1}B^0$ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathbb{Q}_p & \to & U(-1) & \to & C(-1) & \to & 0 \\ & & \| & & \cap & & \| & & \\ 0 & \to & \mathbb{Q}_p & \to & \mathrm{Fil}^{-1}\mathrm{B}^0 & \to & C(-1) & & \end{array}$$

dont les lignes sont exactes (la première grâce à la proposition précédente). On en déduit bien que $\mathrm{Fil}^{-1}B^0 = U(-1)$ et que l'application naturelle $\mathrm{Fil}^{-1}\mathrm{B}^0 \to \mathrm{C}(-1)$ est surjective.

Si $i \geq 2$, on en déduit aussi que, si S^i désigne l'image dans B_{dR} du sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel engendré par les $v_1v_2\ldots v_i$, avec $v_1, v_2, \ldots, v_h \in U(-1)$, alors $S^i \subset \mathrm{Fil}^{-i}B^0$. Si $u_0 \in U$ est tel que $\theta(u_0) = 1$, on voit que, pour tout $u \in U$, l'image de $(u_0t^{-1})^{i-1}ut^{-1} \in S^i$ dans $C(-i)$ est $\theta(u)t^{-i}$ et on en déduit que l'application naturelle de S^i dans $C(-i)$ est surjective. Comme $1 \in U(-1)$, $S^{i-1} \subset S^i$ et on en déduit, par induction sur i, que l'application naturelle de S^i dans $\mathrm{Fil}^{-\mathrm{i}}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}/\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ est surjective. On a donc encore un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & S^i \cap B_{dR}^+ & \to & S^i & \to & \mathrm{Fil}^{-\mathrm{i}}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}/\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+} & \to & 0 \\ & & \cap & & \cap & & \| & & \\ 0 & \to & \mathbb{Q}_p & \to & \mathrm{Fil}^{-\mathrm{i}}\mathrm{B}^0 & \to & \mathrm{Fil}^{-\mathrm{i}}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}/\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+} & & \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. Comme $\mathbb{Q}_p \subset S^i$, on en déduit bien que $S^i = \mathrm{Fil}^{-\mathrm{i}}\mathrm{B}^0$ et que l'application naturelle $\mathrm{Fil}^{-\mathrm{i}}\mathrm{B}^0 \to \mathrm{Fil}^{-\mathrm{i}}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}/\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ est surjective, donc, par passage à la limite sur i que l'application $B^0 \to B_{dR}/B_{dR}^+$ est aussi surjective.

Comme t est inversible dans B_{st}, cet anneau, qui s'identifie à l'anneau des polynômes en $\log[\pi]$ à coefficients dans B_{cris}, est aussi l'anneau des polynômes en $\log[\pi]/t$ à coefficients dans B_{cris}. Comme $\varphi(\log[\pi]/t) = \log[\pi]/t$, un tel polynôme est dans $B_{st}^{\varphi=1}$ si et seulement s'il est à coefficients dans B^0. □

Remarque : La $\mathbb{Q}_p$-algèbre B^0 s'identifie donc au quotient de $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Q}_p} U(-1)$ par un idéal I convenable. Il serait intéressant de pouvoir donner une description "explicite" de I. Le problème se ramène à déterminer le noyau I_2 de l'application $\mathrm{Sym}^2 U \to B_{dR}^+$ qui envoie $u.v$ sur uv, car on vérifie facilement que, si 1_0 désigne l'élément unité de $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Q}_p} U(-1)$ et si 1_1 est l'élément de degré 1 qui vaut $t.t^{-1}$, I est l'idéal engendré par $1_0 - 1_1$ et $I_2(-2) \subset \mathrm{Sym}^2 U(-1)$.

Proposition 5.14. — *L'homomorphisme d'anneau*

$$P_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^0 \to B_{dR} \ (\text{ resp. } \quad P_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{st}^{\varphi=1} \to B_{dR} \ )$$

induit par l'inclusion de P_0 et de B^0 (resp. $B_{st}^{\varphi=1}$) dans B_{dR} est injectif. Son image s'identifie à $B_{cris,0}$ (resp. $B_{st,0}$).

Dans la suite on utilise cette injection pour identifier $P_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^0$ à $B_{cris,0}$ et $P_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{st}^{\varphi=1}$ à $B_{st,0}$. On remarque que si $\lambda \in P_0$ et $b \in B_{st}^{\varphi=1}$, on a $\varphi(\lambda b) = \sigma(\lambda) b$.

Preuve : Tout est évident, sauf peut-être l'injectivité. Posons $B = B^0$ (resp. $B = B_{st}^{\varphi=1}$). Supposons que l'application n'est pas injective et soit $m \geq 2$ le plus petit entier tel qu'il existe $b_1, b_2, \ldots, b_m \in B$, linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}_p$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in P_0$ pas tous nuls avec $\sum_{i=1}^m \lambda_i b_i = 0$. L'hypothèse de mimimalité implique que les λ_i sont tous non nuls et, quitte à diviser par λ_1, on peut supposer $\lambda_1 = 1$. Mais $\sum \sigma(\lambda_i) b_i = \varphi(\sum \lambda_i b_i) = 0$, donc $\sum (\sigma - 1)(\lambda_i) b_i = 0$. Comme $(\sigma - 1)(\lambda_0) = 0$, l'hypothèse de minimalité implique que $\sigma(\lambda_i) = \lambda_i$, pour tout i, i.e. que tous les λ_i sont dans $\mathbb{Q}_p$, d'où une contradiction. □

Dans toute la suite, pour tout entier $h \geq 1$, on note $\mathbb{Q}_{p^h}$ l'unique extension non ramifiée de degré h de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans $bark$. C'est aussi un sous-corps de P_0. Pour tout $a \in \mathbb{Q}_{p^h}$, $\sigma(a) = \varphi(a)$ et la restriction de φ à $\mathbb{Q}_{p^h}$ est un générateur de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^h}/\mathbb{Q}_p)$.

Proposition 5.15. — *Soit h un entier ≥ 1. On a*

$$\mathbb{Q}_{p^h} \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^0 = \{b \in B_{cris} \mid \varphi^h(b) = b\} \ et$$
$$\mathbb{Q}_{p^h} = \{b \in B^+_{cris} \mid \varphi^h(b) = b\} = \{b \in B_{cris} \mid \varphi^h(b) = b \ et \ \varphi^i(b) \in B^+_{dR} \ pour \ tout \ i \in \mathbb{N}\} \ .$$

Preuve : Les inclusions $\mathbb{Q}_{p^h} \otimes B^0 \subset \{b \in B_{cris} \mid \varphi^h(b) = b\}$ et $\mathbb{Q}_{p^h} \subset \{b \in B^+_{cris} \mid \varphi^h(b) = b\} \subset \{b \in B_{cris} \mid \varphi^h(b) = b$ et $\varphi^i(b) \in B^+_{dR}$ pour tout $i \in \mathbb{N}\}$ sont évidentes.

Réciproquement, soit $b \in B_{cris}$ vérifiant $\varphi^h(b) = b$. Choisissons une base normale $\{e_1, e_2, \ldots, e_h\}$ de $\mathbb{Q}_{p^h}$ sur $\mathbb{Q}_p$ de sorte que la matrice des $(\varphi^i(e_j))_{1\leq i,j\leq h}$ est inversible. Pour $1 \leq j \leq h$, posons $b_j = \sum_{i=0}^{h-1} \varphi^i(e_j b) = \sum_{i=0}^{h-1} \varphi^i(e_j)\varphi^i(b)$. On a $\varphi(b_j) = b_j$, donc $b_j \in B^0$. Les $\varphi^i(b)$, et en particulier b s'écrivent donc comme combinaisons linéaires, à coefficients dans $\mathbb{Q}_{p^h}$, en les b_j qui sont dans B^0, d'où la première égalité. Si $\varphi^i(b) \in B^+_{dR}$ pour tout i, les b_j aussi et sont donc dans $\mathbb{Q}_p$ (prop.5.5), et b est bien dans $\mathbb{Q}_{p^h}$. □

Soient $S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots$ comme au §5.4. On vérifie facilement que, pour tout entier $h \geq 1$, la suite des

$$S_n(X, X^{p^{h-1}}, \ldots, X^{p^{(n-1)(h-1)}}, Y, Y^{p^{h-1}}, \ldots, Y^{p^{(n-1)(h-1)}})$$

converge, dans l'anneau $\mathbb{F}_p[[X, Y]]$ des séries formelles en X et Y à coefficients dans $\mathbb{F}_p$, vers un élément $F_h(X, Y)$ qui est une *loi de groupe formel commutatif à un paramètre* sur $\mathbb{F}_p$ (cf., par exemple, [Fr68],§3 ou [Se67], §3.2), i.e vérifie

$$F_h(X, 0) = F_h(0, X) = X, \ F_h(Y, X) = F_h(X, Y) \text{ et } F_h(F_h(X, Y), Z) = F_h(X, F_h(Y, Z)) \ .$$

En particulier on peut définir le groupe $F_h(\mathfrak{m}_R)$ comme étant l'idéal maximal $\mathfrak{m}_R$ de R muni de la loi de composition

$$(x, y) \mapsto F_h(x, y) \ .$$

Si pour tout nombre rationnel $s > 0$, $\mathfrak{m}_R^s = \{x \in R \mid v_R(x) \geq s\}$, alors le sous-ensemble $F_h(\mathfrak{m}_R^s)$ de $F_h(\mathfrak{m}_R)$ formé des $x \in \mathfrak{m}_R^s$ est un sous-groupe; si $s' \geq s$, alors $F_h(\mathfrak{m}_R^{s'}) \subset F_h(\mathfrak{m}_R^s)$. En fait, $F_h(\mathfrak{m}_R)$ est un groupe topologique, les $F_h(\mathfrak{m}_R^s)$ formant un système fondamental de voisinages ouverts (et fermés) de 0.

On voit que, pour tout $x \in \mathfrak{m}_R$, $l_h(x) = (x^{p^{-n(h-1)}})_{n\in\mathbb{Z}} =$

$$(\ldots, x^{p^{m(h-1)}}, \ldots, x^{p^{h-1}}, x, x^{p^{-(h-1)}}, \ldots, x^{p^{-n(h-1)}} \ldots) \in BW_{\text{cris}}(R)[1/p]$$

et que l'application l_h est un isomorphisme de $F_h(\mathfrak{m}_R)$ sur un sous groupe de $BW_{\text{cris}}(R)[1/p]$. Plus précisément, pour tout nombre rationnel $s > 0$, $F_h(\mathfrak{m}_R^s)$ est séparé et complet pour la topologie p-adique et l_h induit un homéomorphisme de ce groupe sur un sous-$\mathbb{Z}_p$-module de $BW_{\mathrm{cris}}(R)[1/p]$ (contenu dans $BW_{\mathrm{cris}}(R)$ si et seulement si si $s \geq p^{1-h}$), $F_h(\mathfrak{m}_R$ s'identifie au Banach p-adique $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_h(\mathfrak{m}_R^s)$ et l_h est un homéomorphisme de ce Banach p-adique sur un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel fermé de $BW_{\mathrm{cris}}(R)[1/p]$.

Il résulte immédiatement de la définition de B_{dR} que, si $\overline{\mathbb{Q}_p}$ désigne la fermeture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{K}$, le corps B_{dR} relatif à l'extension $\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p$, que nous notons $B_{dR}(\overline{\mathbb{Q}_p})$ s'identifie à un sous-corps du corps B_{dR} relatif à l'extension $\overline{K}/K$ que nous continuons à noter B_{dR}. De même, avec des conventions évidentes, $B_{cris}(\overline{\mathbb{Q}_p})$ s'identifie à un sous-anneau de B_{cris}. Les anneaux $B_{dR}(\overline{\mathbb{Q}_p})$ et $B_{cris}(\overline{\mathbb{Q}_p})$ sont stables par G_K qui opère à travers son image naturelle dans $G_{\mathbb{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$.

Proposition 5.16. — *Soient h un entier ≥ 1, $L_h = l_h(F_h(\mathfrak{m}_R))$ et $LT_h = L_h \cap \mathrm{Fil}^1 B_{dR}$. Alors,*

i) on a $L_h = \{b \in B_{cris}^+ \mid \varphi^h b = pb\}$;

ii) Tout élément non nul de LT_h est inversible dans B_{cris} et LT_h est un sous-$\mathbb{Q}_{p^h}$-espace vectoriel de dimension 1 de $B_{cris}(\mathbb{Q}_p)$, stable par $G_{\mathbb{Q}_p}$;

iii) la suite

$$0 \to LT_h \to L_h \to C \to 0$$

(où $L_h \to C$ est le composé de l'inclusion de L_h dans B_{dR}^+ avec la projection canonique $\theta : B_{\mathrm{dR}}^+ \to C$) est exacte ;

iv) Le $\mathbb{Q}_{p^h}$-espace vectoriel LT_h est une représentation cristalline de $G_{\mathbb{Q}_p}$ dont les poids de Hodge-Tate sont 0 et 1 avec multiplicité respective $h-1$ et 1 ;

v) si $\eta_0 : G_{\mathbb{Q}_p} \to \{1,-1\}$ est l'unique caractère non ramifié d'ordre 2 et $\chi : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique, le groupe $G_{\mathbb{Q}_p}$ opère sur $\Lambda^h_{\mathbb{Q}_p} LT_h$ via le caractère $\eta_0^{h-1}\chi$.

Preuve : Montrons d'abord (iii), c'est-à dire que l'application $L_h \to C$ est surjective : Posons $s = p^h/(p^{2h}-1)$, $s' = 1/(p^{2h}-1)$ et notons $\mathfrak{m}_C^{s'}$ l'idéal de $\mathcal{O}_C$ formé des éléments c vérifiant $v_p(c) \geq s'$. Comme $F_h(\mathfrak{m}_R^s)$ est séparé et complet pour la topologie p-adique, il suffit de vérifier que $\theta(F_h(\mathfrak{m}_R^s)) \subset \mathfrak{m}_C^{s'}$ et que l'application $\overline{\theta} : F_h(\mathfrak{m}_R^s) \to \mathfrak{m}_C^{s'}/p\mathfrak{m}_C^{s'}$ obtenue en composant avec la réduction mod p est surjective. Mais si $x \in F_h(\mathfrak{m}_R^s)$ et si $a = x^{(0)}$, on a $\overline{\theta}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a^{p^{mh}}/p^m + \sum_{n=1}^{\infty} p^n x^{(nh)}$. On vérifie facilement que, dans cette double somme, chaque terme a une valuation p-adique $\geq s'$, d'où $\theta(F_h(\mathfrak{m}_R^s)) \subset \mathfrak{m}_C^{s'}$ et que $\underline{\theta}(x) \equiv a^{p^{2h}}/p^2 + a^{p^h}/p + a \pmod{p\mathfrak{m}_C^{s'}}$ (on peut même supprimer le terme $a^{p^{2h}}/p^2$ sauf si on a à la fois $p=2$ et $h=1$). Comme l'application de $\mathfrak{m}_R^s$ dans $\mathfrak{m}_C^s$ qui envoie x sur $x^{(0)} = a$ est surjective, il suffit de vérifier que, pour tout $b \in \mathfrak{m}_C^{s'}$, il existe $a \in \mathfrak{m}_C^s$ tel que $a^{p^{2h}}/p^2 + a^{p^h}/p + a = b$. Si l'on choisit $\nu \in \mathcal{O}_C$ vérifiant $v_p(\nu) = s$, on peut écrire $a = \nu a'$, avec $a' \in \mathcal{O}_C$, on est ramené à résoudre une équation en a' qui s'écrit $c_2 a'^{p^{2h}} + a'^{p^h} + c_0 a' = b'$, où $c_2, c_0, b' \in \mathcal{O}_C$. Comme $\mathcal{O}_C$ est intégralement clos dans son corps des fractions qui est algébriquement clos, cette équation a une solution.

On voit que $R^{G_K} = k$ et $(\mathfrak{m}_R)^{G_K} = 0$. On en déduit que $(F_h(\mathfrak{m}_R))^{G_K} = 0$. Comme $C^{G_K} = K$, l'application $L_h \to C$ ne peut être un isomorphisme. Comme elle est surjective son noyau n'est pas nul. Soit t_h un élément non nul de LT_h. Soit $u = t_h\varphi(t_h)\dots\varphi^{h-1}(t_h)$. C'est un élément non nul de B^+_{cris} vérifiant $\varphi u = pu$. Comme chaque $\varphi^i(t_h) \in B^+_{cris} \subset B^+_{dR}$ et comme $t_h \in \mathrm{Fil}^1\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$, on a $u \in \mathrm{Fil}^1\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$. On voit donc que $u/t \in B^0 \cap B^+_{dR} = \mathbb{Q}_p$ (prop.5.5) donc est inversible dans B_{cris}. Il en est de même de u et de t_h.

Cet argument s'applique en particulier au cas où $K = \mathbb{Q}_p$ et l'on peut choisir $t_h \in B_{cris}(\overline{\mathbb{Q}_p})$. Posons $L'_h = \{b \in B^+_{cris} \mid \varphi^h(b) = b\}$ et $LT'_h = L'_h \cap \mathrm{Fil}^1 B_{dR}$. Il est clair que $L_h \subset L'_h$ et que $\mathbb{Q}_{p^h} t_h \subset LT_h \subset LT'_h$. Soit $b \in LT'_h$. Si l'on écrit $b = xt_h$, on a $\varphi^h(x) = x$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $\varphi^i(b) = \varphi^i(x)\varphi^i(t_h)$; comme $t_h \notin \mathrm{Fil}^2\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ et, pour $1 \leq i \leq h-1$, $\varphi^i(t_h) \notin \mathrm{Fil}^1\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$, on a $\varphi^i(x) \in B^+_{dR}$ pour tout i et (prop.5.15) $x \in \mathbb{Q}_{p^h}$. Donc $\mathbb{Q}_{p^h} t_h = LT_h = LT'_h$, ce qui, en particulier, prouve (i).

Or on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & LT_h & \to & L_h & \to & C & \to & 0 \\ & & \| & & \cap & & \| & & \\ 0 & \to & LT'_h & \to & L'_h & \to & C & & \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. On en déduit que $L_h = L'_h$, d'où (ii).

Il reste à prouver (iv) et (v), assertions pour lesquelles on peut supposer que $K = \mathbb{Q}_p$.

Soit η l'inclusion naturelle de LT_h dans B_{cris}. Alors $D^*_{cris}(V)$ contient $\eta, \varphi\circ\eta, \dots, \varphi^{h-1}\circ\eta$ et, comme LT_h est de dimension h sur $\mathbb{Q}_p$, il suffit de prouver (cf. remarque à la fin du §5.3) que ces applications sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}_p$. Pour cela, il suffit de vérifier que les $(\varphi^i\circ\eta)(t_h) = \varphi^i(t_h)$, pour $0 \leq i \leq h-1$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}_p$. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{h-1}$ des éléments de $\mathbb{Q}_p$ tels que $\sum_{i=0}^{h-1} \lambda_i\varphi^i(t_h) = 0$. L'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{Q}_p[X]$ tels que $P(\varphi)(t_h) = 0$ est un idéal de $\mathbb{Q}_p[X]$ contenant les polynômes $\sum_{i=0}^{h-1} \lambda_i X^i$ et $X^h - p$. Comme $X^h - p$ est irréductible sur $\mathbb{Q}_p$, si les λ_i n'étaient pas tous nuls, cet idéal serait l'anneau $\mathbb{Q}_p[X]$ tout entier, ce qui est impossible puisque $t_h \neq 0$.

On a $\mathrm{Fil}^0\mathrm{D}^*_{\mathrm{cris}}(\mathrm{V}) = \mathrm{D}^*_{\mathrm{cris}}(\mathrm{V})$ et on vérifie facilement que $\mathrm{Fil}^1\mathrm{D}^*_{\mathrm{cris}}(\mathrm{V})$ est le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel engendré par η tandis que $\mathrm{Fil}^2\mathrm{D}^*_{\mathrm{cris}}(\mathrm{V}) = 0$. On en déduit que $\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{gr}^0 D^*_{cris}(V) = h-1$ et $\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{gr}^1 D^*_{cris}(V) = 1$. Par conséquent les poids de Hodge-Tate de LT_h sont bien 0 et 1 avec multiplicité respective $h-1$ et 1.

Enfin, $D^*_{cris}(\Lambda^h_{\mathbb{Q}_p} LT_h) = \Lambda^h D^*_{cris}(V)$ est le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension 1 de base $\nu = \eta \wedge \varphi\circ\eta \wedge \dots \wedge \varphi^{h-1}\circ\eta$; comme $\varphi^h(\eta) = p\eta$, on a $\varphi(\nu) = (-1)^{h-1}p\nu$. L'assertion (v) en résulte facilement. □

Remarques : i) On voit que $LT_1 = \mathbb{Q}_p(1) = \mathbb{Q}_p t$ et $L_1 = U$. Comme l'application $u \mapsto \log[u]$ définie une bijection de $1 + \mathfrak{m}_R$ sur U et l'application $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}}[x^{p^n}]/p^n$ une bijection de $\mathfrak{m}_R$ sur U, on voit qu'il existe une unique application $f : \mathfrak{m}_R \to 1 + \mathfrak{m}_R$ telle que $\log[f(x)] = \sum_{n\in\mathbb{Z}}[x^{p^n}]/p^n$ et que f est bijective. On laisse au lecteur courageux le soin de décrire f par passage à la limite à l'aide de fonctions liées à l'exponentielle d'Artin-Hasse (cf, par exemple, [De72], chap.III,§1).

ii) On peut montrer que LT_h s'identifie à $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(\Phi_h)$ où $T_p(\Phi_h)$ est le module de Tate d'un groupe formel Φ_h sur $\mathbb{Z}_p$ qui est un groupe formel de Lubin-Tate pour le corps $\mathbb{Q}_{p^h}$ (cf. par exemple [Se67], §3.3). Alors, L_h s'identifie au $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des suites $x^{(n)}_{n\in\mathbb{N}}$, avec, pour tout n, $x^{(n)} \in \Phi_h(\mathfrak{m}_C)$ et $px^{(n+1)} = x^{(n)}$.

Proposition 5.17. — *Soit h un entier ≥ 1 et t_h un élément non nul de LT_h. Pour tout $r \in \mathbb{Z}$, $B_{cris,r/h}$ (resp. $B_{st,r/h}$) est le sous-$B_{cris,0}$-module (resp. le sous-$B_{st,0}$-module) libre de rang 1 de B_{dR} engendré par t_h^r. L'élément t_h est transcendant sur le corps des fractions de $B_{cris,0}$ aussi bien que sur celui de $B_{st,0}$. On a $B_{cris}^h = B_{cris,0}[t_h, t_h^{-1}]$ (resp. $B_{st}^h = B_{st,0}[t_h, t_h^{-1}]$).*

Preuve :

Pour tout $r \in \mathbb{Z}$, il est clair que le sous-$B_{cris,0}$-module (resp. le sous-$B_{st,0}$-module) de B_{dR} engendré par t_h^r est libre de rang 1 et contenu dans $B_{cris,r/h}$ (resp. $B_{st,r/h}$. Montrons que, réciproquement si $b \in B_{cris,r/h}$, b appartient à ce sous-module (la démonstration est la même pour $B_{st,r/h}$). On peut écrire b comme une somme finie de la forme $\sum \lambda_i b_i$, avec les $\lambda_i \in P_0$ et les $b_i \in B_{cris}$ vérifiant $\varphi^h(b_i) = p^r b_i$; pour chaque i, $\varphi^h(b_i/t_h^r) = b_i/t_h^r$ et il en résulte facilement que $b_i/t_h^r \in B_{cris,0}$; il en est donc de même de $\lambda = \sum \lambda_i(b_i/t_h^r)$ et on a bien $b = \lambda t_h^r$ avec $\lambda \in B_{cris,0}$.

Supposons que l'on ait une relation de la forme $\sum_{r\in\mathbb{Z}} \lambda_r t_h^r = 0$, avec les $\lambda_r \in \mathrm{Frac}(B_{st,0})$ presque tous nuls, mais pas tous nuls. Quitte à multiplier par un élément non nul bien choisi de $B_{st,0}$, on peut supposer que $\lambda_r \in B_{st,0}$ pour tout r. Mais alors chaque $\lambda_r t_h^r \in B_{st,r/h}$. Comme les r/h pour $r \in \mathbb{Z}$ sont des nombres rationnels tous différents, les $B_{st,r/h}$ sont en somme directe et chaque $\lambda_r t_h^r$ doit être nul donc chaque λ_r aussi, d'où une contradiction. Donc t_h est bien transcendant sur $\mathrm{Frac}B_{st,0}$, a fortiori sur $\mathrm{Frac}B_{cris,0}$. Les assertions concernant B_{cris}^h et B_{st}^h sont alors évidentes. □

L'action de N sur chaque B_{st}^h est très facile à définir : c'est l'unique B_{cris}^h-dérivation de B_{st}^h qui envoie $\log[\pi]$ sur -1 (ou $\log[\pi]/t$ sur $-1/t$).

Il reste à définir l'endomorphisme d'anneaux φ sur chaque B_{st}^h. On sait ce que c'est sur $B_{st,0}$ et il reste à savoir calculer $\varphi(t_h)$, au moins pour un t_h bien choisi. Comme $t_h \in B_{cris}(\mathbb{Q}_p)$, on peut, pour cela supposer $K = \mathbb{Q}_p$. C'est l'objet des deux propositions suivantes.

Proposition 5.18. — *Supposons $K = \mathbb{Q}_p$. Soient h un entier ≥ 1, t_h un élément non nul de LT_h, $f = f_{t_h} : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Q}_{p^h}^*$ le 1-cocycle continu défini par $g(t_h) = f(g)t_h$, pour tout $g \in G_{\mathbb{Q}_p}$. Notons $A_h(f)$ l'ensemble des $a \in \mathbb{Q}_{p^h} \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^0$ vérifiant*

$$g(a) = f^{\varphi-1}(g)a, \text{ pour tout } g \in G_{\mathbb{Q}_p} \text{ et } a^{1+\varphi+\varphi^2+\ldots+\varphi^{h-1}} = p\ .$$

i) On a $\varphi(t_h)/t_h \in A_h(f)$.
ii) Si $a \in A_h(f)$,on a $A_h(f) = \{\zeta a \mid \zeta \in \mu_h(\mathbb{Q}_p)\}$.

Preuve : Comme t_h est inversible dans B_{cris}, on peut écrire $\varphi(t_h) = at_h$, avec $a \in B_{cris}$. On a $\varphi^h(a) = a$, donc $a \in \mathbb{Q}_{p^h} \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^0$ (prop.5.15). En écrivant que, si $g \in G_{\mathbb{Q}_p}$, on a $g(\varphi(t_h)) = \varphi(g(t_h))$, on trouve que $g(a) = f^{\varphi-1}(g)a$. Par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$, on voit que $\varphi^i(t_h) = a^{1+\varphi+\ldots+\varphi^{i-1}}t_h$; pour $i = h$, cela donne $pt_h = a^{1+\varphi+\varphi^2+\ldots+\varphi^{h-1}}t_h$ et on a bien $a^{1+\varphi+\varphi^2+\ldots+\varphi^{h-1}} = p$, d'où (i).

Il est clair que, si $a \in A_h(f)$, on a $\{\zeta a \mid \zeta \in \mu_h(\mathbb{Q}_p)\} \subset A_h(f)$. Montrons l'inclusion dans l'autre sens : soit $b \in A_h(f)$. On peut écrire $b = \zeta a$, avec $\zeta \in B_{dR}$. On doit avoir $g(\zeta) = \zeta$, pour tout $g \in G_{\mathbb{Q}_p}$, donc $\zeta \in B_{dR}^{G_{\mathbb{Q}_p}} = \mathbb{Q}_p$. En particulier, $\zeta \in B_{cris}$ et on doit avoir $\zeta^{1+\varphi+\ldots+\varphi^{h-1}} = 1$, ce qui, comme $\varphi(\zeta) = \zeta$, signifie bien $\zeta^h = 1$, i.e. $\zeta \in \mu_h(\mathbb{Q}_p)$. □

Proposition 5.19. — *Soient h, r des entiers ≥ 1 tels que $\mu_{hr}(\mathbb{Q}_p) = \mu_r(\mathbb{Q}_p)$. Soient t_{hr} un élément non nul de LT_{hr}, $f' = f_{t_{hr}}$ et $b \in A_{hr}(f')$. Posons $c = b^{1+\varphi+\varphi^2+\ldots+\varphi^{h-1}}$ et $t_h = c^{r-1+(r-2)\varphi^h+\ldots+(r-1-i)\varphi^{ih}+\ldots+\varphi^{(r-2)h}}t_{hr}^r$. Alors t_h est un élément de LT_h. On a $\varphi(t_h) = b^{1+\varphi^h+\ldots+\varphi^{(r-1)h}}t_h$.*

Preuve : Posons $\varphi(t_{hr}) = b_0 t_{hr}$. D'après la proposition précédente, il existe $\zeta \in \mu_r(\mathbb{Q}_p)$ tel que $b = \zeta b_0$. On voit que $\varphi(c) = b^{-1+\varphi^h}c$ et on en déduit que

$$\varphi(t_h) = (b^{-1+\varphi^h}c)^{r-1+(r-2)\varphi^h+\ldots+\varphi^{(r-2)h}}(b^r/\zeta^r)t_{hr}^r =$$
$$b^{((r-1)\varphi^h+(r-2)\varphi^{2h}+\ldots+\varphi^{(r-1)h})-(r-1+(r-2)\varphi^h+\ldots+\varphi^{(r-2)h})+r}\zeta^{-r}t_h = b^{1+\varphi^h+\ldots+\varphi^{(r-1)h}}t_h$$

puisque $\zeta^r = 1$.

On en déduit par récurrence, que pour tout entier $i \geq 1$, on a
$$\varphi^i(t_h) = b^{(1+\varphi+\ldots+\varphi^{i-1})(1+\varphi^h+\ldots+\varphi^{(r-1)h})}t_h,$$
ce qui appliqué à $i = h$ donne $\varphi^h(t_h) = b^{1+\varphi+\varphi^2+\ldots+\varphi^{rh-1}}t_h$; on a aussi $\varphi^i(t_{hr}) = b^{1+\varphi+\ldots+\varphi^{i-1}}t_{hr}$ pour tout i ; comme $\varphi^{hr}(t_{hr}) = pt_{hr}$, il en résulte que $b^{1+\varphi+\varphi^2+\ldots+\varphi^{rh-1}} = p$ et $\varphi^h(t_h) = pt_h$, donc $t_h \in L_h$.

Enfin, comme $\varphi(t_{hr}) \in \mathrm{Fil}^0\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ et $t_{hr} \notin \mathrm{Fil}^2 B_{dR}$, on voit que $b_0 \in \mathrm{Fil}^{-1}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ et c'est aussi le cas de $b = \zeta b_0$. De même, pour $1 \leq i \leq hr - 1$, on a $\varphi^{i+1}(t_{hr}) = \varphi^i(b_0)\varphi^i(t_{hr})$ et, comme $\varphi^{i+1}(t_{hr}) \in \mathrm{Fil}^0\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ et $\varphi^i(t_{hr}) \notin \mathrm{Fil}^1 B_{dR}$, on a $\varphi^i(b_0), \varphi^i(b) \in \mathrm{Fil}^0\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$. Il en résulte que $c \in \mathrm{Fil}^{-1}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ et que, pour $1 \leq i \leq (r-2)h$, $\varphi^i(c) \in \mathrm{Fil}^0\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$. Comme $t_{hr}^r \in \mathrm{Fil}^r B_{dR}$, on voit que $t_h = c^{r-1}\varphi^h(c)^{r-2}\ldots\varphi^{(r-2)h}(c)t_{hr}^r \in \mathrm{Fil}^1 B_{dR}$ et on a bien $t_h \in LT_h$. □

5.6 – Quelques indications sur la preuve de "faiblement admissible ⇒ admissible (th.5.9)"

La preuve repose d'une part sur *la version faible du lemme fondamental* et d'autre part sur la notion de complexe fondamental d'un (φ, N)-module filtré.

Commençons par expliquer ce qu'est le lemme fondamental.

Soient U et C comme dans la proposition 5.12. Soient h un entier ≥ 2, $v_1, v_2, \ldots, v_h \in B_2$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ des éléments de C pas tous nuls. Posons

$$Y = \{(u_1, u_2, \ldots, u_h) \in U^h \mid \text{ il existe } c \in C \text{ tel que } \theta(u_n) = c\alpha_n \text{ pour tout } n\} .$$

C'est un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de U^h. Si $y = (u_1, u_2, \ldots, u_h) \in Y$ l'élément c ainsi défini est unique. L'application $\nu : Y \to C$ qui envoie y sur c est $\mathbb{Q}_p$-linéaire surjective et on a une suite exacte de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels

$$0 \to \mathbb{Q}_p(1)^h \to Y \to C \to 0 .$$

Notons $\rho : Y \to B_2$ la restriction à Y de l'application de U^h dans B_2 qui envoie $(u_1, u_2, \ldots, u_h)$ sur $\sum_{n=1}^h u_n v_n$. Si $y = (u_1, u_2, \ldots, u_h)$, on a $\theta(\rho(y)) = \sum \theta(u_n)\theta(v_n) = (\sum \alpha_n \theta(v_n))\nu(y)$. Par conséquent, si $\sum \alpha_n \theta(v_n) \neq 0$, l'application $\theta \circ \rho : Y \to C$ est surjective et son noyau est $\mathbb{Q}_p(1)^h$. Si au contraire $\sum \alpha_n \theta(v_n) = 0$, on a $\mathrm{Im}\ \rho \subset C(1)$.

Le point-clé de la preuve est le *lemme fondamental, version faible*, c'est-à-dire le résultat suivant :

Proposition 5.20 ([CF00], prop.2.1). — *Avec les hypothèses et les notations qui précèdent, si $\sum_{n=1}^h \alpha_n \theta(v_n) = 0$, ou bien $\rho(Y) = \rho(\mathbb{Q}_p(1)^h)$, ou bien $\rho(Y) = C(1)$.*

Pour prouver ce lemme, on est amené à introduire l'anneau $\mathcal{O}_C[T]$ des polynômes en l'indéterminée T à coefficients dans C, puis son séparé complété $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$ pour la topologie p-adique ainsi que l'anneau $\mathcal{K} = \mathcal{O}_{\mathcal{K}}[1/p]$. On choisit alors une clôture algébrique du corps des fractions de $\mathcal{K}$, puis on note $\overline{\mathcal{K}}$ la fermeture intégrale de $\mathcal{K}$ dans cette clôture algébrique. La norme de Gauss sur $\mathcal{K}$ s'étend de manière naturelle en une norme sur $\overline{\mathcal{K}}$ (c'est la norme spectrale sur chaque sous-$\mathcal{K}$-algèbre finie de $\overline{\mathcal{K}}$) et on note $\mathcal{C}$ le complété de $\overline{\mathcal{K}}$ pour cette norme.

On construit ensuite un Banach p-adique $\mathcal{U}$, extension de $\mathcal{C}$ par $\mathbb{Q}_p(1)$ et un anneau $\mathcal{B}_2$, extension de $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}(1)$, idéal de carré nul qui jouent pour $\mathcal{C}$ les rôles de U et B_2 respectivement. Pour $n = 1, 2, \ldots, h$, on choisit $\lambda_n \in \mathcal{U}$ relevant $\alpha_n T$ et on pose $\lambda = \sum \lambda_n v_n \in \mathcal{B}_2$. Le fait que $\sum \alpha_n \theta(v_n) = 0$ implique que $\lambda \in \mathcal{C}(1)$. Si λ est nul, on vérifie que $\rho(Y) = \rho(\mathbb{Q}_p(1)^h)$. Sinon, par fonctorialité, tout élément s de l'ensemble S des homomorphismes continus de C-algèbres de $\mathcal{C}$ dans C définit un élément $s(\lambda) \in C(1)$ dont on vérifie qu'il est dans l'image de ρ. Un argument utilisant une variante du lemme de Hensel et la notion de polygone de Newton montre alors que le sous-groupe de $C(1)$ engendré par les $s(\lambda)$ pour $s \in S$ est $C(1)$ lui-même.

Remarque : Colmez a prouvé récemment une version forte du lemme : sous les hypothèses de la proposition 5.20, il montre que lorsque $\mathrm{Im}\ \rho \neq \rho(\mathbb{Q}_p(1)^h)$, alors le noyau de ρ est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie et même, $\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Ker}\ \rho = h$.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la proposition 5.20 ([CF00], cor.2.6) :

Corollaire 5.21. — *Soient h un entier ≥ 2, V un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension h, M un B_2-module de longueur h tel que le C-espace vectoriel tM est de dimension 1. Soient $\xi : V \to M$ une application $\mathbb{Q}_p$-linéaire, $\bar{\xi}$ le composé de ξ avec la projection de M sur M/tM, $\xi_C : C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to M/tM$ l'application C-linéaire déduite de $\bar{\xi}$ par extension des scalaires et $\xi_U : U \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to M$ l'application qui envoie $u \otimes v$ sur $u\xi(v)$. On suppose que ξ_C est surjective. Alors, si le noyau de ξ_U est de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$, ξ_U est surjective.*

Expliquons maintenant ce qu'est le complexe fondamental $V_{st}^{\bullet}(D)$ d'un (φ, N)-module filtré D : c'est un complexe de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels concentrés en degrés 0 et 1 (en particulier, $H^i(V_{st}^{\bullet}(D)) = 0$ si $i \notin \{0, 1\}$) :

– On pose
$$V_{st}^0(D) = \{v \in B_{st} \otimes_{K_0} D \mid Nv = 0 \text{ et } \varphi(v) = v\} .$$
On peut voir $V_{st}^0(D)$ comme le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des morphismes de (φ, N)-modules de K_0 dans $B_{st} \otimes D$ (en particulier, $V_{st}^0(D)$ ne dépend pas de la filtration sur D_K).

– Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{Fil}^i(B_{dR} \otimes_K D_K) = \sum_{i'+i''=i} \mathrm{Fil}^{i'} \mathrm{B_{dR}} \otimes_{\mathrm{K}} \mathrm{Fil}^{i''} \mathrm{D_K}$ et on pose
$$V_{st}^1(D) = B_{dR} \otimes_K D_K / \mathrm{Fil}^0(\mathrm{B_{dR}} \otimes_{\mathrm{K}} \mathrm{D_K}) .$$
L'application naturelle de $(B_{st} \otimes D)_K / \mathrm{Fil}^0(\mathrm{B_{st}} \otimes \mathrm{D})_{\mathrm{K}}$ dans $V_{st}^1(D_K)$ est un isomorphisme. On voit aussi que $V_{st}^1(D)$ ne dépend que de la filtration du K-espace vectoriel D_K, pas de l'action de φ et de N sur D.

– Pour définir le complexe $V_{st}^{\bullet}(D)$, il suffit alors de connaître l'application δ_D : $V_{st}^0(D) \to V_{st}^1(D)$: c'est le composé de l'inclusion $V_{st}^0(D) \subset B_{st} \otimes_{K_0} D \subset B_{dR} \otimes_K D_K$ avec la projection de $B_{dR} \otimes_K D_K$ sur $V_{st}^1(D)$. On a donc $H^0(V_{st}^{\bullet}(D)) = V_{st}(D)$.

Expliquons maintenant quelles sont les différentes étapes qui permettent de déduire le théorème 5.9 de la proposition 5.21 :

Première étape ([CF00], prop.45) *: Si D est un (φ, N)-module filtré faiblement admissible, $V_{st}(D)$ est une représentation p-adique semi-stable et $D_{st}(V_{st}(D))$ s'identifie à un sous-(φ, N)-module filtré de D (en particulier, $\dim_{\mathbb{Q}_p} V_{st}(D) \leq \dim_{K_0} D$, avec égalité si et seulement si D est admissible).*

On peut supposer $V = V_{st}(D)$ non nul. Soit $C_{st} \subset B_{dR}$ le corps des fractions de B_{st}. Il est stable par G_K et $C_{st}^{G_K} = K_0$. Soit L le sous-C_{st}-espace vectoriel de $C_{st} \otimes_{K_0} D$ engendré par V et r sa dimension. Alors L est stable par G_K. Comme la grassmanienne des sous-espaces vectoriels de dimension r de D est une variété rationnelle sur K_0, on en déduit qu'il existe un-sous-K_0-espace vectoriel D' de D tel que $L = C_{st} \otimes_{K_0} D'$. On vérifie que D' est stable par φ et N et peut donc être considéré comme un sous-(φ, N)-module filtré de D.

Soient $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ une base de L sur C_{st} formée d'éléments de V et $\{d_1, d_2, \ldots, d_r\}$ une base de D' sur K_0. Si b est le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les composantes des v_j sur la base des d_i, $w = v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r = bd_1 \wedge d_2 \wedge \ldots \wedge d_r$ est un élément non nul de $W = V_{st}(\wedge^r D')$. Il résulte facilement du fait que $B^0 \cap B_{dR}^+ = \mathbb{Q}_p$ (prop.5.5) que la non-nullité de W implique que $t_H(\wedge^r D') \geq t_N(\wedge^r D')$. Comme D est faiblement admissible, on a aussi $t_H(\wedge^r D') = t_H(D') \leq t_N(\wedge^r D') = t_N(D')$. Donc $t_H(\wedge^r D') = t_N(\wedge^r D')$, $\wedge^r D'$ est admissible (prop.5.6) et $\dim_{\mathbb{Q}_p} W = 1$. On en déduit facilement que si $v = \sum c_n v_n$, avec les $c_n \in C_{st}$ est dans V, alors les c_n sont en fait dans V et V est de dimension r sur $\mathbb{Q}_p$. Alors D' s'identifie à $D_{st}(V)$, donc V est semi-stable et D' est admissible.

Deuxième étape ([CF00], prop.5.1 et 5.2) *: Si*

$$0 \to D' \to D \to D'' \to 0$$

est une suite exacte courte de (φ, N)*-modules filtrés finis,les suites*

$$\begin{gathered} 0 \to V_{st}^0(D') \to V_{st}^0(D) \to V_{st}^0(D'') \to 0 \\ 0 \to V_{st}^1(D') \to V_{st}^1(D) \to V_{st}^1(D'') \to 0 \end{gathered}$$

sont exactes.

Pour tout φ-module fini Δ, posons

$$V_{cris}^0(\Delta) = \{v \in B_{cris} \otimes_{K_0} \Delta \mid \varphi(v) = v\} .$$

Si l'on choisit $\log[\pi]$ comme au §5.2, pour tout (φ, N)-module Δ, tout $v \in B_{st} \otimes_{K_0} \Delta$ s'écrit d'une manière et d'une forme sous-la forme $v = \sum_{n \in \mathbb{N}} v_n(\log[\pi])^n$, avec les $v_n \in B_{cris} \otimes_{K_0} D$, presque tous nuls. Si $v \in V_{st}^0(\Delta)$, alors $v_0 \in V_{cris}^0(\Delta)$ et on vérifie que cette application induit un isomorphisme du foncteur V_{st}^0 sur V_{cris}^0. Pour prouver l'exactitude de la première suite exacte, il suffit donc de vérifier l'exactitude du foncteur V_{cris}^0 sur la catégorie des φ-modules finis. Lorsque k est algébriquement clos, c'est évident puisque cette catégorie est semi-simple (prop.5.1). Le cas général s'en déduit en remarquant que, pour tout φ-module fini Δ sur k, $P_0 \otimes_{K_0} \Delta$ est un φ-module fini sur $\overline{k}$ et que, comme $B_{cris} \otimes_{K_0} \Delta = B_{cris} \otimes_{P_0} (P_0 \otimes_{K_0} \Delta)$, on a $V_{cris}^0(\Delta) = V_{cris}^0(P_0 \otimes_{K_0} \Delta)$.

Enfin, l'exactitude de la seconde suite est immédiate.

Troisième étape ([CF00], prop.5.6) *: Le complexe fondamental d'un* (φ, N)*-module filtré fini non nul* D *n'est jamais acyclique.*

Soit $i \in \mathbb{Z}$. Notons $D[i]$ le (φ, N)-module filtré qui est D en tant que K_0-espace vectoriel où, avec des conventions évidentes, $\varphi_{D[i]} = p^i \varphi_D$, $N_{D[i]} = N_D$ et, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Fil^j D[i]_K} = \mathrm{Fil^{i+j} D_K}$. En utilisant le fait que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, t^i est un élément inversible de B_{cris} vérifiant $\varphi(t^i) = p^i t^i$ et $t^i \in \mathrm{Fil^i B_{dR}} \setminus \mathrm{Fil^{i+1} B_{dR}}$, on voit que la multiplication par t^{-i} définit un isomorphisme du complexe $V_{st}^{\bullet}(D)$ sur $V_{st}^{\bullet}(D[i])$. Quitte à remplacer D par $D[i]$ avec i suffisamment grand, on peut donc supposer que

$\mathrm{Fil^0D_K} = 0$. Choisissons une extension finie totalement ramifiée K' de K_0 contenant K et distincte de K_0 (si $K \neq K_0$, on peut prendre $K' = K$) et posons $G_{K'} = \mathrm{Gal}(K'/K)$. L'application $\delta(D) : V_{st}^0(D) \to V_{st}^1(D)$ se factorise à travers l'application K_0-linéaire évidente $B_{st} \otimes_{K_0} D \to V_{st}^1(D)$. Si le complexe était acyclique, il induirait donc une surjection $\eta : (B_{st} \otimes_{K_0} D)^{G_{K'}} \to V_{st}^1(D)^{G_{K'}}$. On a $(B_{st} \otimes_{K_0} D)^{G_{K'}} = B_{st}^{G_{K'}} \otimes_{K_0} D = D$ et c'est un K_0-espace vectoriel de dimension $h = \dim_{K_0} D$. Choisissons une base $\{d_1, d_2, \ldots, d_h\}$ de D_K adaptée à la filtration, i.e. telle que, si i_n désigne le plus grand entier j vérifiant $d_n \in \mathrm{Fil^jD_K}$, on ait

$$\mathrm{Fil^jD_K} = \oplus_{\mathrm{i_n \geq j}} \mathrm{Kd_n} \ .$$

Le choix de cette base induit un isomorphisme $V_{st}^1(D_K)^{G_{K'}} \simeq \oplus_{n=1}^h (B_{dR}/\mathrm{Fil^{i_n}B_{dR}})^{\mathrm{G_{K'}}}$. Il est facile de voir que, si $j \in \mathbb{Z}$,

$$(B_{dR}/\mathrm{Fil^jB_{dR}})^{\mathrm{G_{K'}}} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \leq 0 \\ K' & \text{si} \quad j > 0 \end{cases}$$

et on en déduit que $V_{st}^1(D)^{G_{K'}}$ est un K'-espace vectoriel de dimension h, donc un K_0-espace vectoriel de dimension $h : [K' : K_0]$ ce qui contredit le fait que η est surjective.

Quatrième étape ([CF00], prop.5.7 *: Pour qu'un* (φ, N)*-module filtré faiblement admissible* D *soit admissible, il faut et il suffit que* $H^1(V_{st}^{\bullet}(D)) = 0$.

La condition est nécessaire parce que, si $D = D_{st}(V)$, $V_{st}^0(D)$ s'identifie à $B^0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$, $V_{st}^1(D)$à $B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)/B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V = (B_{dR}/B_{dR}^+) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$; la suite

$$0 \to V_{st}(D) \to V_{st}^0(D) \to V_{st}^1(D) \to 0$$

s'identifie à la suite déduite, par extension des scalaires de $\mathbb{Q}_p$ à V, de la suite exacte

$$0 \to \mathbb{Q}_p \to B^0 \to B_{dR}/B_{dR}^+ \to 0$$

(prop. 5.13) et est bien exacte.

Réciproquement, si $\delta(D) : V_{st}^0(D) \to V_{st}^1(D)$ est surjective, si $V = V_{st}(D)$ et $D' = D_{st}(V)$, alors V est semi-stable et D' est un sous-(φ, N)-module filtré de D qui est admissible (première étape). Si $D'' = D/D'$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & V & \to & V_{st}^0(D') & \to & V_{st}^1(D') & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & V & \to & V_{st}^0(D) & \to & V_{st}^1(D) & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & V_{st}^0(D'') & \to & V_{st}^1(D'') & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

dont la première ligne est exacte puisque D' est admissible, la deuxième par hypothèse et les deux colonnes de droite sont aussi exactes (deuxième étape). Le complexe $V_{st}^{\bullet}(D'')$ est donc acyclique et $D''=0$ (troisième étape), donc $D=D'$.

Cinquième étape ([CF00], prop.5.8) *: Si*

$$0\to D'\to D\to D''\to 0$$

est une suite exacte de (φ,N)*-modules filtrés et si* D' *et* D'' *sont admissibles,* D *l'est aussi.*

C'est une conséquence immédiate des étapes 1 et 4.

Pour pouvoir décrire les étapes suivantes, nous avons besoin de la notion de distance de deux filtrations : Si Fil_1 et Fil_2 sont deux filtrations (indexées par $\mathbb{Z}$, décroissantes, exhaustives et séparées) sur un K-espace vectoriel D_K de dimension finie ≥ 2, on dit que ces filtrations sont *voisines* s'il existe une base $\{d_1,d_2,\ldots,d_h\}$ de D_K et des entiers $i_1,i_2,\ldots,i_h\in\mathbb{Z}$ tels que, si l'on pose $i'_1=i_1+1, i'_2=i_2-1$ et $i'_j=i_j$ pour $2\leq j\leq h$, on ait

$$\mathrm{Fil_1D_K=\oplus_{i_j\geq i}Kd_j \text{ et } Fil_2D_K=\oplus_{i'_j\geq i}Kd_j}$$

pour tout $j\in\mathbb{Z}$.

On dit que deux filtrations Fil et Fil' sur D_K sont à distance finie s'il existe une suite de filtrations

$$\mathrm{Fil=Fil_0,Fil_1,\ldots,Fil_{d-1},Fil_d=Fil'}$$

sur D_K telle que, pour $1\leq n\leq d$, $\mathrm{Fil_{n-1}}$ et Fil_n soient voisines et on appelle distance des deux filtrations Fil et Fil' le plus petit entier d tel que ce soit possible.

Si D est un (φ,N)-module fini, on dit qu'une filtration Fil sur D_K est *admissible* (resp. *faiblement admissible*) si le (φ,N)-module filtré (D,Fil) ainsi obtenu l'est.

Si Fil est une filtration sur D_K, on définit $t_H(\mathrm{Fil})$ de façon évidente. On vérifie que deux filtrations Fil et Fil' sont à distance finie si et seulement si $t_H(\mathrm{Fil})=\mathrm{t_H(Fil)'}$. En particulier deux filtrations faiblement admissibles sont à distance finie.

Sixième étape (CF00], prop.6.1) *: Si* Fil_1 *et* Fil_2 *sont deux filtrations voisines sur un* (φ,N)*-module fini* D*, si* Fil_1 *est admissible et* Fil_2 *faiblement admissible, alors* Fil_2 *est admissible.*

C'est l'étape où l'on utilise le corollaire 5.21. Pour $m=1,2$, posons $V_m=V_{st}(D,\mathrm{Fil}_1)$. On voit (étape 4) que la suite

$$(*)\qquad 0\to V_1\to V_{st}^0(D)\to V_{st}^1(\mathrm{Fil}_1)\to 0$$

est exacte et s'identifie à la suite déduite en tensorisant avec V_1 de

$$0\to\mathbb{Q}_p\to B^0\to(B_{dR}/B_{dR}^+)\to 0\ ,$$

tandis que

$$0 \to V_2 \to V_{st}^0(D) \to V_{st}^1(\mathrm{Fil}_2)$$

est exacte et qu'il s'agit de prouver que $V_{st}^0(D) \to V_{st}^1(\mathrm{Fil}_2)$ est surjective.

Posons $\mathcal{D} = B_{dR} \otimes_K D_K$ et, pour $m = 1, 2$ et $i \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Fil}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{m}}\mathrm{D}_{\mathrm{K}} = \sum_{\mathrm{i}'+\mathrm{i}''=\mathrm{i}} \mathrm{Fil}^{\mathrm{i}'}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathrm{K}} \mathrm{Fil}^{\mathrm{i}''}_{\mathrm{m}}\mathrm{D}_{\mathrm{K}}$, de sorte que $V_{st}^1(\mathrm{Fil}_{\mathrm{m}}) = \mathcal{D}/\mathrm{Fil}^0_{\mathrm{m}}\mathcal{D}$.

Comme $\mathrm{Fil}^{-1}\mathrm{B}^0 = \mathrm{B}^0 \cap \mathrm{Fil}^{-1}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} = \mathrm{U}(-1)$ (prop.5.13), la suite (*) induit une suite exacte

$$0 \to V_1 \to U(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1 \to \mathrm{Fil}_1^{-1}\mathcal{D}/\mathrm{Fil}_1^0\mathcal{D}$$

que l'on peut réécrire, en posant $V = V_1(-1)$,

$$0 \to V_1 \to U \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to \mathrm{Fil}_1^{-1}\mathcal{D}/\mathrm{Fil}_1^0\mathcal{D}\ .$$

On a $\mathrm{Fil}_1^{-1}\mathcal{D} \subset \mathrm{Fil}_2^0\mathcal{D}$. Si l'on pose $M = \mathrm{Fil}_1^{-1}\mathcal{D}/\mathrm{Fil}_2^0\mathcal{D}$, il s'agit de prouver que, dans la suite exacte

$$0 \to V_2 \to U \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to M\ ,$$

l'application $U \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to M$ est surjective. On vérifie que l'on est exactement dans les conditions d'application du corollaire 5.21, le noyau V_2 de l'application ξ_U étant fini d'après l'étape 1.

Dernière étape dans le cas où k est algébriquement clos.

On commence par montrer que, pour tout (φ, N)-module fini D, il existe une filtration sur D_K qui est admissible. Compte-tenu de l'étape précédente, il suffit de le faire lorsque D est un objet simple de la catégorie des (φ, N)-modules finis. Ceci implique que $N = 0$ et (prop.5.1) qu'il existe $r, h \in \mathbb{Z}$, avec $h \geq 1$, $(r, h) = 1$ et un élément non nul $d \in D$ tel que $\varphi^h(d) = p^r d$.

Avec les notations des propositions 5.16 et 5.17, soit t_h un élément non nul de LT_h. Le sous-$\mathbb{Q}_{p^h}$-espace vectoriel de B_{cris} engendré par t_h^{-r} est stable par G_K et peut être considéré comme une représentation p-adique V de G_K de dimension h. On voit que $d_0 = t_h^r \otimes t_h^{-r} \in D_{\mathrm{cris}}(V) \subset D_{st}(V)$ et que $\varphi^h(d_0) = p_0^r d$. On en déduit que $d, \varphi(d), \ldots, \varphi^{h-1}(d_0)$ sont linéairement indépendants sur K_0. Pour des raisons de dimension, V est donc cristalline et $D_{\mathrm{cris}}(V)$ est admissible. Il existe un unique isomorphisme de (φ, N)-modules de $D_{\mathrm{cris}}(V)$ sur D qui envoie d_0 sur d. La filtration qu'il induit sur D_K est admissible.

On veut alors montrer que, pour un (φ, N)-module fini D fixé, toute filtration faiblement admissible Fil sur D est admissible. Par induction, on peut supposer que ce résultat vaut pour tout (φ, N)-module fini qui est un sous-objet propre ou un quotient propre de D. On choisit alors une filtration admissible Fil_0 sur D qui est admissible et on procède par récurrence sur la distance d de ces deux filtrations, le cas où celle-ci est égale à 1 étant réglée par l'étape précédente. Si D n'est pas un objet simple de la catégorie des

(φ, N)-modules filtrés faiblement admissibles, on peut fabriquer une suite exacte courte non triviale

$$0 \to D' \to D \to D'' \to 0 \ ,$$

D' et D'' sont admissibles par hypothèse et D l'est aussi (étape 5). On peut donc supposer $d \geq 2$ et D simple. On choisit une filtration Fil_1 sur D_K qui est voisine de Fil_0 et telle que sa distance à Fil_1 est $d-1$. Il est facile de déduire du fait que D est simple (qui signifie que, pour tout sous-(φ, N)-module propre D' de D, on a $t_H(D') < t_N(D'')$) que Fil_1 est faiblement admissible. D'après l'étape précédente, Fil_1 est admissible et donc Fil l'est aussi par induction.

Le cas général.

Lorsque k n'est pas algébriquement clos, on peut, par exemple :

– Ou bien, prouver que, si $P = KP_0$ et si D est un (φ, N)-module filtré sur K qui est faiblement admissible, alors le (φ, N)-module filtré Δ sur P que l'on en déduit par extension des scalaires (le P_0-espace vectoriel sous-jacent à Δ est $P_0 \otimes_{K_0} D$ est aussi faiblement admissible (cf. [Fo94b], prop.4.4.9). D'après l'étape précédente Δ est admissible. Mais on voit que les anneaux B_{st} et B_{dR} relatifs à l'extension $\overline{P}/P$ sont les mêmes que ceux qu'on construit à partir de $\overline{K}/K$, on en déduit que $V_{st}(D) = V_{st}(\Delta)$, on a donc $\dim_{\mathbb{Q}_p} V_{st}(D) = \dim_{P_0}(\Delta) = \dim_{\mathrm{K}_0} D$ et D est bien admissible (étape 1).

– Ou bien montrer ici encore que tout (φ, N)-module fini D peut être muni d'une filtration faiblement admissible, le reste de la preuve étant identique à ce que l'on fait dans le cas où k est algébriquement clos.

Il suffit de montrer l'existence d'une filtration admissible lorsque $K = K_0$. Il suffit aussi, ici encore, de le faire lorsque D est simple, ce qui implique que $N = 0$ et que D n'a qu'une seule pente. Après un *twist à la Tate*, on se ramène au cas où cette pente α vérifie $0 < \alpha \leq 1$. On peut alors :

i) soit invoquer [FL82] qui nous dit que toute filtration vérifiant $\mathrm{Fil}^0\mathrm{D} = \mathrm{D}$ et $\mathrm{Fil}^2\mathrm{D} = 0$ est admissible et [La80] qui nous dit que l'on peut trouver une telle filtration sur D;

ii) soit remarquer que D peut s'identifier au module de Dieudonné(contravariant) d'un groupe de Barsotti-Tate connexe Γ_k sur k et que, si Γ est un relèvement de Γ_k sur $W(k)$, le dual V de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(\Gamma)$ (où $T_p(\Gamma)$ est le module de Tate de Γ) est une représentation cristalline de G_K qui a la vertu que le (φ, N)-module fini sous-jacent à $D_{st}(V) = D_{\mathrm{cris}}(V)$ s'identifie à D ([Fo79], §5) et que la filtration qu'il induit sur D est donc admissible.

Chapitre 6 – L'action de C perdue et retrouvée

6.1 – Le résultat

Le but de ce chapitre est de prouver le résultat suivant :

Theoreme 6.1. — *Soit E un sous-corps fermé de K. Soient W_1 et W_2 deux C-représentations de G_K. On suppose que les poids de Sen de W_1 sont algébriques sur E. Alors toute application E-linéaire continue $\eta : W_1 \to W_2$ qui est G_K-équivariante est C-linéaire.*

En particulier, si $\eta : C \to C$ est une application $\mathbb{Q}_p$-linéaire continue G_K-équivariante et si $\eta(1) = \lambda$, on a $\lambda \in C^{G_K} = K$ et $\eta(c) = c\eta(1) = \lambda c$ pour tout $c \in C$, autrement dit :

Proposition 6.2. — *On a $\mathrm{End}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(C) = \mathrm{End}_{C[G_K]}(C) = K$.*

Lorsque $K/\mathbb{Q}_p$ est finie, la condition sur les poids de Sen de W_1 est automatiquement satisfaite avec $E = \mathbb{Q}_p$ et on a donc le résultat suivant :

Corollaire 6.3. — *Lorsque K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, le foncteur d'oubli de la catégorie des C-représentations de G_K dans celle des Banach p-adiques munis d'une action linéaire et continue de G_K est pleinement fidèle.*

Après avoir établi un petit lemme, nous allons prouver la proposition 6.2 (§6.2) puis le théorème 6.1 (§6.3).

Lemme 6.4. — *Soit W une C-représentation de G_K de dimension 1 qui n'est pas isomorphe à C. Alors,*

(i) pour toute extension finie K' de K, contenue dans $\overline{K}$, on a $W^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K')} = 0$,

(ii) on a $\mathrm{Hom}^{cont}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(C, W) = 0$.

Preuve : Montrons (i) : Soit α le poids de Sen de W. Comme W n'est pas isomorphe à C, α n'est pas nul. Quitte à remplacer K par une extension finie, on peut supposer que, avec les notations du §2.5, $\alpha \in \mathfrak{a}_0$. A isomorphisme près, on peut supposer que $W = Ct^{(\alpha)} \subset C \otimes_K \mathcal{B}_{K,0}$ et, pour tout $g \in G_K$, $g(t^{(\alpha)}) = \rho(\bar{g})t^{(\alpha)}$, où $\bar{g}$ désigne l'image de g dans $\Gamma = G_K/H_K$ et $\rho : \Gamma \to K^*$ est un homomorphisme continu injectif (on a $\rho(\bar{g}) = \exp(\log\chi(g).\alpha)$ où $\log\chi : \Gamma \to \mathbb{Z}_p$ est le caractère additif défini au §2.3). Quitte à remplacer encore K par une extension finie, on peut supposer $K' = K$. Soit alors $ct^{(\alpha)} \in W^{G_K}$, avec $c \in C$. Le fait que $ct^{(\alpha)} \in W^{H_K}$ implique que $c \in C^{H_K} = L$. Si γ_0 est un générateur topologique de Γ, on a $ct^{(\alpha)} = \gamma_0(ct^{(\alpha)}) = \gamma_0(c)\rho(\gamma_0)t^{(\alpha)}$, ce qui implique que le sous-K-espace vectoriel de L engendré par c est stable par Γ, donc (prop.1.16) que $c \in K_\infty$. Si $r \in \mathbb{N}$ est tel que $c \in K_r$ et si γ_r est un générateur de $\Gamma_r = \mathrm{Gal}(K_\infty/K_r)$, on a $ct^{(\alpha)} = \gamma_r(ct^{(\alpha)}) = c\rho(\gamma_r)t^{(\alpha)}$. Comme $\rho(\gamma_r) \neq 1$, ceci implique bien que $c = 0$.

Montrons (ii) : Comme $\overline{K}$ est dense dans C, on a

$$\mathrm{Hom}^{cont}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(C, W) = \mathrm{Hom}^{cont}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(\overline{K}, W) \ .$$

Pour toute extension finie K' de K contenue dans $\overline{K}$, si $G_{K'} = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K')$, on a $\mathrm{Hom}^{cont}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(K', W) \subset \mathrm{Hom}^{cont}_{\mathbb{Q}_p[G_{K'}]}(K', W) = \mathrm{Hom}^{cont}_{\mathbb{Q}_p}(K', W^{G_{K'}}) = 0$, puisque, d'après (i), $W^{G_{K'}} = 0$. En passant à la limite sur K', on en déduit que $\mathrm{Hom}^{cont}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(\overline{K}, W) = 0$, donc $\mathrm{Hom}^{cont}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(C, W) = 0$. □

6.2 – Preuve de la proposition 6.2

LEMME 6.5. — *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, notons θ_i la projection canonique de* $\mathrm{Fil}^i B_{dR}$ *sur* $C(i)$. *Soit*

$$X = \{b \in B_{cris} \mid \varphi^2 b = p^2 b,\ b \in \mathrm{Fil}^1 \mathrm{B_{dR}} \text{ et } \varphi \mathrm{b} \in \mathrm{Fil}^0 \mathrm{B_{dR}}\} \ .$$

Notons V_0 le noyau de l'application $\pi_0 : X \to C$ définie par $\pi_0(b) = \theta_0(\varphi b)$ et V_1 le noyau de l'application $\pi_1 : X \to C(1)$ définie par $\pi_1(b) = \theta_1(b)$. Alors V_0 et V_1 sont des représentations de Hodge-Tate de dimension 2, on a $h_1(V_0) = 2$, $h_0(V_1) = h_2(V_1) = 1$ et les applications π_0 et π_1 sont surjectives.

Nous allons donner deux preuves de ce lemme : la première est un cas particulier d'une méthode très générale sur laquelle nous reviendrons ultérieurement [Fo00] ; la deuxième, plus directe, n'utilise pas le théorème 5.9 (ou théorème "faiblement admissible ⇒ admissible") et fournit une interprétation très simple des représentations V_0 et V_1.

Première preuve : Soit D le (φ, N)-module de dimension 2 de base $\{d_1, d_2\}$, avec

$$\varphi d_1 = d_2, \varphi d_2 = p^2 d_2 \text{ et } N d_1 = N d_2 = 0 \ .$$

Sur D_K, les filtrations Fil_0 et Fil_1 définies par

$$\mathrm{Fil}^i_0 \mathrm{D_K} = \begin{cases} D_K & \text{si} \quad i \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad i \geq 2 \end{cases} \text{ et } \mathrm{Fil}^i_1 \mathrm{D_K} = \begin{cases} D_K & \text{si} \quad i \leq 0 \\ K d_1 & \text{si} \quad 1 \leq i \leq 2 \\ 0 & \text{si} \quad i \geq 3 \end{cases}$$

sont toutes deux faiblement admissibles (§5.1) donc admissibles (th.5.9). Pour $m = 1, 2$, notons D^*_m le (φ, N)-module filtré dual de $(D, \mathrm{Fil_m})$ et posons $V_m = V_{st}(D^*_m)$; c'est une représentation cristalline de dimension 2, on a $h_1(V_0) = 2$, $h_0(V_1) = h_2(V_1) = 1$ et la suite

$$0 \to V_m \to V^0_{st}(D^*_m) \to V^1_{st}(D^*_m) \to 0$$

est exacte. On a $V^0_{st}(D^*_0) = V^0_{st}(D^*_1) = \mathrm{Hom}_{(\varphi,N)\text{-modules}}(D, B_{st})$ et l'application $\eta \mapsto \eta(d_1)$ identifie ce $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel au sous-espace de B_{cris} formé des b vérifiant $\varphi^2 b = p^2 b$.

L'application $\eta \mapsto (\eta(d_1), \eta(d_2))$ identifie l'ensemble des applications K-linéaires de D_K dans B_{dR} à $B_{dR} \oplus B_{dR}$ donc $V^1_{st}(D^*_0)$ à $B_{dR}/\mathrm{Fil}^1 \mathrm{B_{dR}} \oplus \mathrm{B_{dR}}/\mathrm{Fil}^1 \mathrm{B_{dR}}$ et $V^1_{st}(D^*_1)$ à $B_{dR}/\mathrm{Fil}^2 \mathrm{B_{dR}} \oplus \mathrm{B_{dR}}/\mathrm{Fil}^0 \mathrm{B_{dR}}$. On voit aussi que X s'identifie à l'image inverse dans $V^0_{st}(D^*_0) = V^0_{st}(D^*_1)$ de $\mathrm{Fil}^1 \mathrm{B_{dR}} \oplus \mathrm{Fil}^0 \mathrm{B_{dR}}$. Alors, pour $m = 0, 1$, V_m s'identifie bien au noyau de l'application π_m et la surjectivité de π_m résulte de la surjectivité de l'application $V_{st}^0(D_m^*) \to V_{st}^1(D_m^*)$. $\square$

Deuxième preuve : Soit $\mathbb{Q}_{p^2}$ l'unique extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de degré 2 de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans $\overline{K}$ donc aussi, puisqu'elle est non ramifiée, dans B_{cris}. Soit $a \in \mathbb{Q}_{p^2}$ non nul tel que $\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{p^2}/\mathbb{Q}_p}(a) = 0$. L'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^2}/\mathbb{Q}_p)$ est la restriction de φ à $\mathbb{Q}_{p^2}$ et on a donc $\varphi a = -a$.

Rappelons (§5.4) que $U = \{u \in B_{cris} \mid \varphi b = pb \text{ et } b \in \mathrm{Fil}^0\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\}$. L'application de $\mathbb{Q}_{p^2} \otimes_{\mathbb{Q}_p} U$ dans B_{cris} qui envoie $\lambda \otimes u$ sur λu est injective et nous l'utilisons pour identifier $\mathbb{Q}_{p^2} \otimes_{\mathbb{Q}_p} U$ à un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de B_{cris}. Si $Z = \{b \in B_{cris} \mid \varphi^2 b = p^2 b \text{ et } b, \varphi b \in \mathrm{Fil}^0\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\}$, on a $\mathbb{Q}_{p^2} \otimes_{\mathbb{Q}_p} U \subset Z$. Inversement si $b \in Z$, on peut écrire $b = b' + b''$, avec $b' = \frac{1}{2}(b + p^{-1}\varphi b)$ et $b'' = \frac{1}{2}(b - p^{-1}\varphi b)$; on a $b', ab'' \in U$ et $b = 1 \otimes b' + a^{-1} \otimes ab'' \in \mathbb{Q}_{p^2} \otimes_{\mathbb{Q}_p} U$ et $\mathbb{Q}_{p^2} \otimes_{\mathbb{Q}_p} U = Z$. En tensorisant la suite exacte

$$0 \to \mathbb{Q}_p(1) \to U \to C \to 0$$

(cf. prop.5.12) avec $\mathbb{Q}_{p^2}$, on obtient la suite exacte

$$0 \to \mathbb{Q}_{p^2}(1) \to Z \to \mathbb{Q}_{p^2} \otimes_{\mathbb{Q}_p} C \to 0 \ .$$

Soient α la restriction de θ_0 à Z, $\gamma : \mathbb{Q}_{p^2} \otimes_{\mathbb{Q}_p} C \to C$ l'application $\lambda \otimes c \mapsto \lambda c$, e l'unique idempotent primitif de $\mathbb{Q}_{p^2} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^2} \subset \mathbb{Q}_{p^2} \otimes_{\mathbb{Q}_p} C$ qui est dans le noyau de γ et $\beta : C \to \mathbb{Q}_{p^2} \otimes_{\mathbb{Q}_p} C$ l'application $c \mapsto e.1 \otimes c$. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & V_0 & \to & X & \stackrel{\pi_0}{\to} & C & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \beta & & \\
0 & \to & \mathbb{Q}_{p^2}(1) & \to & Z & \to & \mathbb{Q}_{p^2} \otimes_{\mathbb{Q}_p} C & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma & & \\
 & & & & C & = & C & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

où les deux dernières colonnes et la ligne du milieu sont exactes. On en déduit que la première ligne est aussi exacte, donc que π_0 est bien surjective et que V_0 s'identifie à $\mathbb{Q}_{p^2}(1)$ qui est bien une représentation p-adique de G_K de dimension 2. Les applications $\lambda t \mapsto \lambda t$ et $\lambda t \mapsto \varphi(\lambda)t$ fournissent deux plongements distincts de V_0 dans $C(1)$ qui est donc bien de Hodge-Tate avec $h_1(V_0) = 2$.

Rappelons (prop.5.16) que l'on a une suite exacte

$$0 \to LT_2 \to L_2 \to C \to 0 \ ,$$

où LT_2 est le sous $\mathbb{Q}_{p^2}$-espace vectoriel de dimension 1 engendré par un élément non nul t_2 de $B_{cris}^+ \cap \mathrm{Fil}^1 B_{dR}$ vérifiant $\varphi^2(t_2) = pt_2$. Si $x \in L_2$, d'une part $\varphi^2(xt_2) = p^2 xt_2$, d'autre part $xt_2 \in \mathrm{Fil}^1\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ et $\varphi(xt_2) = \varphi x \varphi t_2 \in \mathrm{Fil}^0 B_{dR}$, donc $xt_2 \in X$. Inversement, si $b \in X$, d'une part $\varphi^2(b/t_2) = pb/t_2$, d'autre part $b/t_2 \in \mathrm{Fil}^0\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ (puisque $t_2 \notin \mathrm{Fil}^2\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$) et $\varphi(b/t_2) = \varphi b/\varphi t_2 \in \mathrm{Fil}^0\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ (puisque $\varphi t_2 \notin \mathrm{Fil}^1 B_{dR}$), donc $b/t_2 \in L_2$, ce qui fait que la multiplication par t_2 définit un isomorphisme de L_2 sur X. Multiplions alors par t_2 la suite exacte ci-dessus. Comme $\theta_1(t_2) \neq 0$, $\theta_1(L_2t_2) = \theta_0(L_2)\theta_1(t_2) = C$, ce qui montre que π_2 est bien surjective, tandis que son noyau V_1 s'identifie à $\mathbb{Q}_{p^2} t_2^2$ et est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension 2. L'application $\lambda t_2^2 \to \theta_2(\lambda t_2^2) = \lambda\theta_1(t_2)^2$ définit un plongement de V_1 dans $C(2)$, tandis que $\lambda t_2^2 \to \theta_0(\varphi\lambda t_2^2) = \varphi(\lambda)\theta_0(t_2)^2$ est un plongement de V_1 dans C. On en déduit bien que V_1 est de Hodge-Tate avec $h_0(V_1) = h_2(V_1) = 1$. On voit aussi que, lorsque l'on considère LT_2 comme un $\mathbb{Q}_{p^2}$-espace vectoriel de dimension 1, avec action semi-linéaire de G_K, alors V_1 s'identifie à $Sym^2_{\mathbb{Q}_{p^2}} LT_2$.

Prouvons maintenant la proposition 6.2 : Soit $\eta : C \to C$ une application C-linéaire. Alors, pour tout $c \in C$, $\eta(c) = c\eta(1)$ et η commute à l'action de G_K si et seulement si $\eta(1) \in C^{G_K} = K$ (th.1.2). On a évidemment $\mathrm{End}_{C[G_K]}(C) \subset \mathrm{End}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(C)$ et il suffit de vérifier que la dimension du K-espace vectoriel $\mathrm{End}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(C)$ est ≤ 1.

Appliquons le lemme précédent. Les valeurs des poids de Hodge-Tate de V_0 et V_1 impliquent que $V_0 \cap V_1 = \{0\}$. Si l'on pose $Y = X/(V_0 \oplus V_1)$, on obtient des suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V_1 & \to & C & \to & Y & \to & 0 \\ 0 & \to & V_0 & \to & C(1) & \to & Y & \to & 0 \end{array}$$

Appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}^{cont}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(-, C)$ à ces suites exactes, on obtient des suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{Hom}(Y, C) & \to & \mathrm{End}(C) & \to & \mathrm{Hom}(V_1, C) & \to & , \\ 0 & \to & \mathrm{Hom}(Y, C) & \to & \mathrm{Hom}(C(1), C) & . & & & \end{array}$$

Mais $\mathrm{Hom}^{cont}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(C(1), C) = \mathrm{Hom}^{cont}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(C, C(-1)) = 0$ d'après le lemme 6.4. A fortiori, $\mathrm{Hom}^{cont}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(Y, C) = 0$. Comme $h_0(V_1) = 1$, $\dim_K \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V_0, C) = 1$ et on en déduit bien que $\dim_K \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(C) \leq 1$. □

6.3 – Preuve du théorème 6.1

LEMME 6.6. — *Soient E_0 un corps, F une extension finie galoisienne de E_0, V_1 et V_2 deux espaces vectoriels sur F. Pour tout $\tau \in \mathrm{Gal}(F/E_0)$, soit $\mathcal{L}_{F,\tau}(V_1, V_2)$ le E_0-espace vectoriel des applications additives $\eta : V_1 \to V_2$ vérifiant $\eta(\lambda v) = \tau(\lambda)\eta(v)$ pour tout $\lambda \in F$ et tout $v \in V$. L'application naturelle*

$$\bigoplus_{\tau \in \mathrm{Gal(F/E_0)}} \mathcal{L}_{F,\tau}(V_1, V_2) \to \mathcal{L}_{E_0}(V_1, V_2)$$

est un isomorphisme.

Preuve du lemme : L'application de $F \times F$ dans E_0, qui à (x, y) associe $\mathrm{tr}_{F/E_0}(xy)$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Choisissons une base $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$de F sur E_0 et soit $\{e^*{}_1, e^*{}_2, \dots, e^*{}_d\}$ la base duale. Soit $\eta : V_1 \to V_2$ une application E_0-linéaire. Pour tout $\tau \in Gal(F/E_0)$, et tout $v \in V_1$, posons

$$\eta_\tau(v) = \sum_{i=1}^{d} \tau(e_i^*)\eta(e_i v) \ .$$

On voit que η_τ ne dépend pas du choix de la base.

Pour $1 \leq r \leq d$, $\{e_1 e_r^*, e_2 e_r^*, \dots, e_d e_r^*\}$ est une base de F sur E dont la base duale est $\{e_1^*/e_r^*, e_2^*/e_r^*, \dots, e_d^*/e_r^*\}$. On a donc, pour tout $v \in V_1$,

$$\eta_\tau(e_r^* v) = \sum_{i=1}^{d} \tau(e_i^*)\eta(e_i e_r^* v) = \sum \tau(e_r^*)\tau(e_i^*/e_r^*)\eta(e_i e_r^* v) = \tau(e_r^*)\eta_\tau(v)$$

et $\eta_\tau \in \mathcal{L}_{F,\tau}(V_1, V_2)$.

Par ailleurs, si l'on pose $1 = \sum c_i e_i$, avec les $c_i \in E_0$, pour tout i, on a $e_j^* = \sum_i c_i e_i e_j^*$, d'où $\mathrm{tr}_{F/E_0}(e_j^*) = c_j$. Mais alors, pour tout $v \in V_1$,

$$\sum_{\tau \in \mathrm{Gal}(F/E_0)} \eta_\tau(v) = \sum_{\tau, i} \tau(e_i^*)\eta(e_i v) = \sum_i \mathrm{tr}_{F/E_0}(e_i^*)\eta(e_i v) = \eta((\sum_i c_i e_i)v) = \eta(v) \ ,$$

donc $\eta = \sum \eta_\tau$ et l'application est bien surjective.

Choisissons alors pour $e_1, e_2, \dots, e_d$ une base normale de F sur E_0 de sorte que, si $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_d$ sont les éléments de $\mathrm{Gal}(F/E_0)$, la matrice des $\tau_i(e_j)$ est inversible. Si $\eta = \oplus_{i=1}^d \eta_i$, avec $\eta_i \in \mathcal{L}_{F,\tau_i}(V_1, V_2)$, , on a, pour tout $v \in V_1$ et $1 \leq j \leq d$,

$$\eta(e_j v) = \sum_{i=1}^{d} \eta_i(e_j v) = \sum_{i=1}^{d} \tau_i(e_j)\eta_i(v) \ ,$$

de sorte que, si les $\eta(e_j v)$ sont tous nuls les $\eta_i(v)$ le sont aussi et l'application est bien injective. □

Prouvons alors le théorème : Quitte à remplacer K par une extension finie convenable et à décomposer W_1 et W_2 en sommes directes, on peut supposer que W_1 et W_2 sont indécomposables, que s_{W_1} (resp. s_{W_2}) n'a qu'une valeur propre α_1 (resp. α_2), que α_1 appartient à une extension finie galoisienne F de E contenue dans K et que $\alpha_2 \in K$.

Quitte à remplacer encore K par une extension finie, on peut supposer que, avec les notations du §2.5, α_1 et α_2 sont dans $\mathfrak{a}_0$. A isomorphisme près, si, pour $m = 1, 2$, on pose $h_m = \dim_C W_m$, on peut supposer que $W_m = \oplus_{i=0}^{h_m - 1} C t^{(\alpha_m)}(\log t)^i \subset B^f_{\mathrm{Sen},r}$. Pour tout $g \in G_K$, $g(t^{(\alpha_m)}) = \rho_m(g) t^{(\alpha_m)}$, avec $\rho_m(g) = \exp(\log \chi(g).\alpha_m)$, donc $\rho_1 : G_K \to F^*$ et $\rho_2 : G_K \to K^*$ sont des homomorphismes continus.

Soit $\eta : W_1 \to W_2$ comme dans le théorème. Grâce au lemme précédent, on peut poser $\eta = \sum_{\tau \in \mathrm{Gal}(F/E)} \eta_\tau$, avec $\eta_\tau \in \mathcal{L}_{F,\tau}(W_1, W_2)$. Chaque η_τ est E-linéaire continue et G_K-équivariante. On se ramène donc au cas où η est l'un des η_τ, i.e. on peut supposer qu'il existe $\tau \in \mathrm{Gal}(F/E)$ tel que $\eta \in \mathcal{L}_{F,\tau}(W_1, W_2)$.

Pour $m = 1, 2$, posons $W'_m = \oplus_{i=0}^{h_m - 1} C(\log t)^i$, de sorte que $W_m = W'_m t^{(\alpha_m)}$. On peut écrire $\eta(wt^{(\alpha_1)}) = \eta'(w)t^{(\alpha_2)}$ où $\eta' : W'_1 \to W'_2$ est une application additive continue vérifiant $\eta'(\lambda)w = \tau(\lambda)\eta'(w)$ si $\lambda \in F$ et $w \in W'_0$ et, pour tout $g \in G_K$,

$$\eta'(g(w)\rho_1(g))t^{\alpha_2} = g(\eta'(w))\rho_2(g)t^{(\alpha_2)} ,$$

ou encore, si l'on note $\rho_3 : G_K \to K^*$ l'homomorphisme continu défini par $\rho_3(g) = \rho_2(g)/\tau(\rho_1(g))$,

$$\eta'(g(w)) = g(\eta'(w))\rho_3(g) \text{ si } g \in G_K \text{ et } w \in W'_1 .$$

Si $\alpha_3 = \alpha_2 - \tau(\alpha_1) \in \mathfrak{a}_0$ et si $\eta_0 : W'_1 \to W'_2 t^{(\alpha_3)} \subset C \otimes_K \mathcal{B}_{K,0} \subset B_{\mathrm{Sen},0}$ est défini par $\eta_0(w) = \eta'(w)t^{(\alpha_3)}$, η_0 est une application additive continue G_K équivariante vérifiant $\eta_0(\lambda w) = \tau(\lambda)\eta_0(w)$ si $\lambda \in F$ et $w \in W'_0$.

Montrons d'abord que η_0 donc η est nul si $\alpha_2 \neq \alpha_1$ ou $\tau \neq 1$. Par dévissage on se ramène à $h_1 = h_2 = 1$, donc $\eta_0 : C \to Ct^{(\alpha_3)}$. Si $\alpha_3 \neq 0$, η_0 est nul d'après le lemme 6.4. Sinon, η_0 est C-linéaire d'après la proposition 6.2, donc a fortiori F-linéaire. Si η_0 n'était pas nul, on aurait donc $\tau = 1$ et $\alpha_2 = \alpha_1$.

On peut donc supposer $\alpha_2 = \alpha_1$ et $\tau = 1$. Quitte à remplacer η par η_0, on peut supposer $\alpha_1 = 0$. Quitte à remplacer W'_2 par une représentation plus grande, on peut supposer $h_2 \geq h_1$, i.e. $W'_1 \subset W'_2$. Remarquons qu'alors $\mathrm{Hom}_{C[G_K]}(W'_1, W'_2) = \mathrm{End}_{C[G_K]}(W'_1)$ et que c'est un K-espace vectoriel de dimension h_1, de base les applications $(\eta_j)_{0 \leq j < h_1}$ définies par $\eta_j(\sum c_i(\log t)^i = \sum_{i=0}^{j} c_{h_1-1-j+i}(\log t)^i$.

On procède alors par récurrence sur h_1 :

– si $h_1 = 1$, $W'_1 = C$. On vérifie que, pour toute extension finie K' de K, $(W'_1)^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K')} = K'$ et si $\eta \in \mathrm{Hom}^{cont}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(C, W'_1)$, on a $\eta(K') \subset K'$, pour tout K', donc $\eta(\overline{K}) \subset \eta(\overline{K})$ et, comme $\overline{K}$ est dense dans C, $\eta(C) \subset C$ et la proposition 6.2 permet de conclure.

– si $h_1 \geq 2$ et si $W''_1 = \oplus_{i=0}^{h_2-2} C(\log t)^i$, on a une suite exacte courte de C-représentations

$$0 \to W''_1 \to W'_1 \to C \to 0 ,$$

où la projection de W'_1 sur C est l'application $\sum_{i=0}^{h_1-1} c_i(\log t)^i \mapsto c_{h_1-1}$.

On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & \mathrm{Hom}_{C[G_K]}(C, W'_2) & \to & \mathrm{Hom}_{C[G_K]}(W'_1, W'_2) & \to & \mathrm{Hom}_{C[G_K]}(W''_1, W'_2) & \to 0 \\
 & \| & & \cap & & \| & \\
0 \to & \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(C, W'_2) & \to & \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(W'_1, W'_2) & \to & \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(W''_1, W'_2) &
\end{array}$$

où les lignes sont exactes (l'application $\mathrm{Hom}_{C[G_K]}(W'_1, W'_2) \to \mathrm{Hom}_{C[G_K]}(W''_1, W'_2)$ est surjective parce que

$$\dim_K \mathrm{Hom}_{C[G_K]}(W'_1, W'_2) = \dim_K \mathrm{Hom}_{C[G_K]}(W''_1, W'_2) + \dim_K \mathrm{Hom}_{C[G_K]}(C, W'_2) \text{).}$$

L'égalité $\mathrm{Hom}_{C[G_K]}(W_1', W_2') = \mathrm{Hom}^{cont}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(W_1', W_2')$ en résulte. $\square$

Références

[BK90] S. Bloch and K. Kato, *L-functions and Tamagawa numbers of motives,* in The Grothendieck Festschrift II, Progress in Math., Birkhäuser, Boston (1990), 333–400.

[Br99a] C. Breuil, *Représentations semi-stables et modules fortement divisibles,* Inv. Math. **136** (1999), 89–122.

[Br99b] C. Breuil, *Modules faiblement admissibles et groupes p-divisibles,* prépublication 0rsay (1999).

[Co94] P. Colmez, *Sur un résultat de Shankar Sen*, C. R. Acad. Sci., Série I, **318** (1994), 983–985.

[Co00] P. Colmez, *travail en préparation*

[CF00] P. Colmez et J.-M. Fontaine, *Construction des représentations p-adiques semi-stables,* Inv. Math., à paraître.

[DM82] P. Deligne and J.S. Milne, *Tannakian categories,* in Hodge Cycles, Motives and Shimura Varieties, L.N. in Math. **900**, Springer-Verlag, Berlin (1982), 101–228.

[De72] M. Demazure, *Lectures on p-Divisible Groups,* L. N. in Math. **302**, Springer-Verlag, Berlin (1972).

[Di57] J. Dieudonné, *Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique* $p > 0$ *(VII),* Math. Annalen **134** (1957), 114–133.

[Fa89] G. Faltings, *Crystalline cohomology and p-adic Galois representations,* in Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, Johns Hopkins University Press, Baltimore (1989), 25–80.

[Fa94] G. Faltings, *Mumford Stabilität in der algebraischen Geometrie,* Proceedings International Congress of Mathematicians, Zürich (1994).

[Fa98] G. Faltings, *Almost Etale Extensions,*, preprint, MPI, Bonn (1998).

[Fo71] J.-M. Fontaine, *Groupes de ramification et représentations d'Artin*, Ann. Scient. Ecole Norm. Sup. **4** (1971), 337-392.

[Fo77] J.-M. Fontaine, *Groupes p-divisibles sur les corps locaux,* Astérisque **47–48**, Soc. Math. France, Paris (1977).

[Fo79] J.-M. Fontaine, *Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate,* in Journées de Géométrie algébrique de Rennes (III), Astérisque **65** (1979), 3–80.

[Fo82] J.-M. Fontaine, *Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate,* Ann. Math. **115** (1982), 529–577.

[Fo83] J.-M. Fontaine, *Représentations p-adiques,* Proc. Int. C. Math. (1983), Varszawa.

[Fo94a] J.-M. Fontaine, *Le corps des périodes p-adiques,* avec un appendice par Pierre Colmez, in *Périodes p-adiques,* Astérisque **223**, Soc. Math. de France, Paris (1994), 59–111)

[Fo94b] J.-M. Fontaine, *Représentations p-adiques semi-stables,* in *Périodes p-adiques,* Astérisque **223**, Soc. Math. de France, Paris (1994), 113–184.

[Fo00], J.-M. Fontaine, *Théorie des presque* C_p*-représentations,* en préparation.

[FL82] J.-M. Fontaine et G. Laffaille, *Constructions de représentations p-adiques,* Ann. Scient. E.N.S. **15** (1982), 547–608.

[Fr68], A. Fröhlich, *Formal Groups,* Lecture Notes in Math. **74**, Springer, Berlin (1968).
[La70 S. Lang, *Algebraic Number Theory,* Addison-Wesley, Reading (1970).
[LT65] J. Lubin and J. Tate, *Formal complex multiplication in local fields,* Annals of Mathematics **81** (1965), 380–387.
[Ma63] Y. Manin, *The Theory of Commutative Formal Groups over Fields of finite Characteristic,* Russian Math. Surveys **18** (1963), 1–83.
[Ma65] Y. Manin, *Moduli Fuchsiani,* Annali Scuola Norm. Sup. Pisa **III-18** (1965), 113–126.
[Sen69] S. Sen, *On automorphisms of lcoal fields,* Ann. of Math. **90** (1969), 33-46.
[Sen72] S. Sen, *Ramification in p-adic Lie extensions,* Invent. Math. **17** (1972), 44–50.
[Sen73] S. Sen, *Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules,* Ann. of Math. **97** (1973), 160–170.
[Sen80] S. Sen, *Continuous Cohomology and p-adic Galois Representations,* Invent. Math. **62** (1980), 89-116.
[Se67] J.-P. Serre, *Local Class Field Theory,* in Algebraic Number Theory, Academic Press, London (1967), 128–161.
[Se89] J.-P. Serre, *Abelian ℓ-adic Representations and Elliptic Curves,* 2–ième édition, Addison-Wesley, Redwood City (1989).
[Ta67] J. Tate, *p-divisible groups,* Proc. of a conference on local fields, Nuffic Summer School at Driebergen, Springer, Berlin (1967), 158–183.
[Ta76] J. Tate, *Relations between K_2 and Galois cohomology,* Invent. Math. **36** (1976), 257–274.
[To96] B. Totaro, *Tensor products in p-adic Hodge Theory,* Duke Math.J. **83** (1996), 79–104.
[Ts99] T. Tsuji, *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case,* Inv. Math., **137** (1999), 233–411.

[CL] J.-P. Serre, *Corps locaux,* deuxième éd., Hermann, Paris (1968).