Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques

Jean-Marc Fontaine

Résumé : Soient K un corps p-adique, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, C le complété de $\overline{K}$ pour la topologie p-adique, B_{dR} le corps des périodes p-adiques, $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K})$. On commence par expliquer les calculs de Sen et Tate sur la cohomologie galoisienne continue de C et de $GL_h(C)$. On donne ensuite une classification, essentiellement due à Sen, des *C-représentations de G_K* (c'est-à-dire des C-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action semi-linéaire et continue de G_K) puis des *B_{dR}-représentations de G_K*. On applique ceci aux représentations p-adiques de G_K, puis on décrit les principaux faits de la théorie des *représentations p-adiques semi-stables*. On termine en prouvant que les seuls endomorphismes $\mathbb{Q}_p$-linéaires continus G_K-équivariants de C sont les homothéties par des éléments de K, puis que, lorsque K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, le foncteur d'oubli de la catégorie des C-représentations de G_K dans celle des Banach p-adiques munis d'une action linéaire et continue de G_K est pleinement fidèle.

Abstract : Let K be a p-adic field, $\overline{K}$ an algebraic closure of K, C the p-adic completion of $\overline{K}$, B_{dR} the field of p-adic periods, $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K})$. We first explain Sen and Tate's computations of the continuous Galois cohomology of C and $GL_h(C)$. We give a classification (mainly due to Sen) of *C-representations of G_K* (that is of finite dimensional C-vector spaces endowed with a semi-linear and continuous action of G_K). We continue with a *classification of B_{dR}-representations of G_K*. Then we apply these results to p-adic Galois representations and we review the main facts of the theory of semi-stable Galois representations. We finish by proving that

a) the only continous $\mathbb{Q}_p$-linear endomorphisms of C, commuting with the action of G_K, are multiplications by elements of K,

b) the forgetful functor from the category of C-representations of G_K to the category of p-adic Banach spaces equipped with a linear and continuous action of G_K is fully faithfull.

Classification AMS : 11F80, 11F85, 11S15, 11S20, 11S25.

Mots clés : Corps locaux, périodes p-adiques, représentations galoisiennes.

Keywords : Local fields, p-adic periods, Galois representations.

e-mail : fontaine@math.u-psud.fr