Sur les endomorphismes polynomiaux permutables de $\mathbb{C}^2$ *

Tien-Cuong Dinh †

21 octobre 1999

Résumé

Dans cet article, nous déterminons tous les couples d'endomorphismes polynomiaux permutables de degrés supérieurs à 1 de $\mathbb{C}^2$ qui se prolongent en des endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^2$ et qui possèdent deux suites d'itérés disjointes.

1 Introduction

Soient X une variété complexe et f_1, f_2 deux endomorphismes holomorphes de X. On considère l'équation fonctionnelle suivante:

$$f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 \tag{1}$$

Cette équation possède des solutions triviales $f_i = h^{n_i} := h \circ h \circ \cdots \circ h$ (n_i fois) où h est un endomorphisme de X. Par la suite, on suppose que:

$$f_1^n \neq f_2^m \text{ pour tout } (n,m) \neq (0,0) \tag{2}$$

Si X, f_1, f_2 sont algébriques et si $(\deg f_1)^n \neq (\deg f_2)^m$ pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2 - (0,0)$ alors (2) est vraie (*voir* également le corollaire 2).

* **Classification mathématique:** 30D05, 58F23.
Mots clés: itérés, applications permutables, orbifold, critiquement finie.

† Mathématique-Bâtiment 425, Université Paris-Sud, 91405 ORSAY Cedex (France). E-mails: TienCuong.Dinh@math.u-psud.fr.

Soit σ un automorphisme holomorphe de X. Le couple (f_1, f_2) vérifie (1) si et seulement si $(\sigma^{-1} \circ f_1 \circ \sigma, \sigma^{-1} \circ f_2 \circ \sigma)$ la vérifie. On dit que le couple $(\sigma^{-1} \circ f_1 \circ \sigma, \sigma^{-1} \circ f_2 \circ \sigma)$ est *conjugué* au couple (f_1, f_2).

Dans $\mathbb{C}$, si les f_i sont des polynômes de degrés $d_i \geq 2$, le problème (1)(2) est résolu par Julia et Fatou [5, 3]. Pour f_i les fractions rationnelles de degrés $d_i \geq 2$ de $X = \mathbb{P}^1$, ce problème est résolu par Ritt et par Eremenko [8, 2] (*voir* également [7]). Notons $w = [w_0 : w_1 : \cdots : w_k]$ les coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^k$ et $z = (z_1, z_2, \ldots, z_k)$ ses coordonnées afines où $z_i := w_i/w_0$. Voici les solutions de (1)(2) pour $X = \mathbb{P}^1$ à une classe de conjugaison près:

1. $(f_1, f_2) = (z^{\pm d_1}, \lambda z^{\pm d_2})$ pour une certaine racine de l'unité λ;

2. $(f_1, f_2) = (\pm T_{d_1}, \pm T_{d_2})$ où T_d est le polynôme de Tchebychev de degré d défini par $T_d(\cos t) := \cos dt$. Les signes $\pm$ sont choisis selon la parité des d_i. Les solutions sont les quatres couples $(\pm T_{d_1}, \pm T_{d_2})$ pour les d_i impairs, un seul couple (T_{d_1}, T_{d_2}) (à une classe de conjugaison près) pour les autres cas;

3. Il existe un tore complexe $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Gamma$, une fonction elliptique $F : \mathbb{T} \to \mathbb{P}^1$, des applications linéaires $\Lambda_i(z) = a_i z + b_i$ qui préservent le groupe Γ et vérifient $F \circ f_i = F \circ \Lambda_i$, $\Lambda_1 \circ \Lambda_2 = \Lambda_2 \circ \Lambda_1$ sur $\mathbb{T}$. La fonction F et les applications Λ_i sont décrites dans [2].

Nous donnons ci-dessous quelques exemples pour $X = \mathbb{C}^2$.

Exemple 1 $f_1(z_1, z_2) := (z_1^{d_1}, \pm T_{d_1} z_2)$ et $f_2(z_1, z_2) := (\lambda z_1^{d_2}, \pm T_{d_2} z_2)$ sont permutables, où λ est une certaine racine de l'unité et les signes $\pm$ sont choisis selon la parité des d_i (*voir* le cas $X = \mathbb{P}^1$).

Exemple 2 $f_i(z_1, z_2) := (\pm T_{d_i} z_1, \pm T_{d_i} z_2)$ ou $(\pm T_{d_i} z_2, \pm T_{d_i} z_1)$ sont permutables où les signes $\pm$ sont choisis selon la parité des d_i.

Exemple 3 Soient P_i, Q_i les polynômes homogènes à deux variables, de degré d_i et sans facteur commun. Supposons que les $[P_i : Q_i]$ définissent sur $\mathbb{P}^1$ deux endomorphismes permutables. Alors il existe des constantes $\lambda_i \neq 0$ telles que les $f_i := (\lambda_i P_i, \lambda_i Q_i)$ définissent des endomorphismes holomorphes permutables de $\mathbb{C}^2$ qui se prolongent holomorphiquement à l'infini en des endomorphismes permutables de $\mathbb{P}^2$.

Exemple 4 Soient h_1, h_2 deux endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^1$ et π l'application holomorphe de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^2$ qui définit un revêtement ramifié à deux feuillets et vérifie $\pi(x, y) = \pi(x, y)$. Si $([x_0 : x_1], [y_0 : y_1])$ sont les coordonnées de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, on a $\pi([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) = [x_0y_0 : x_0y_1 + x_1y_0 : x_1y_1]$. Soient $F_i(a, b) : = (h_ia, h_ib)$ deux endomorphismes de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Il existe des endomorphismes holomorphes f_i de $\mathbb{P}^2$ tels que $f_i \circ \pi = \pi \circ F_i$. Lorsque h_1, h_2 sont permutables, les f_i sont permutables. Lorsque les h_i sont des polynômes, f_1, f_2 sont polynomiaux.

De même manière, on peut construire des endomorphismes permutables de $\mathbb{P}^k$. Pour $k \geq 3$, d'autres exemples sont construits dans [10]. Les automorphismes polynomiaux permutables de $\mathbb{C}^2$ sont étudiés dans [6].

Notons $\mathcal{PH}_d$ l'ensemble des endomorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$ qui se prolongent holomorphiquement à l'infini. Notre résultat principal est:

Théorème 1 *Soient $f_1 \in \mathcal{PH}_{d_1}$ et $f_2 \in \mathcal{PH}_{d_2}$ vérifiant les conditions (1), (2) où $d_1 \geq 2$ et $d_2 \geq 2$. Alors le couple (f_1, f_2) est conjugué à l'un des couples décrits dans les exemples 1-4.*

Un *orbifold* est un couple $\mathcal{O} = (X, n)$, où X est une variété complexe et n est une fonction à valeur dans $\mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$, définie sur l'ensemble des hypersurfaces irréductibles de X; cette fonction est égale à 1 sauf sur un ensemble fini d'hypersurfaces. *Une application holomorphe* d'un orbifold $\mathcal{O}$ dans un autre $\mathcal{O}' = (X', n')$ de même dimension est une application holomorphe ouverte f de $X \setminus H$ dans X' telle que $n'(f(\mathcal{D})) = \mathrm{mult}(f, \mathcal{D})n(\mathcal{D})$ pour toute hypersurface irréductible $\mathcal{D}$ de X, où H est la réunion des hypersurfaces H_j vérifiant $n(H_j) = \infty$ et $\mathrm{mult}(f, \mathcal{D})$ est la multiplicité de f en un point générique de $\mathcal{D}$ (on dira simplement *la multiplicité* de f sur $\mathcal{D}$). Lorsque f est un revêtement ramifié au-dessus de $X' \setminus H'$, on dit que f est *un revêtement* de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}'$, où H' est la réunion des hypersurfaces H'_j vérifiant $n'(H'_j) = \infty$. Remarquons que si f définit un revêtement d'un orbifold dans lui-même, alors l'ensemble critique $\mathcal{C}$ de f est prépériodique, i.e. $f^n\mathcal{C} = f^m\mathcal{C}$ pour certains $0 \leq n < m$. Une telle application s'appelle *critiquement finie*. Si f^n définit un orbifold de $\mathcal{O}$ dans lui-même, f définit également un revêtement de $\mathcal{O}$ dans lui-même.

Dans [2], Eremenko a montré que si f_i vérifient (1)(2) pour $X = \mathbb{P}^1$, il existe un orbifold $\mathcal{O} = (\mathbb{P}^1, n)$ tel que les f_i définissent des revêtements de $\mathcal{O}$ dans lui-même. On déduit de ce résultat et du théorème 1 que:

Corollaire 1 *Sous l'hypothèse du théorème 1, il existe un orbifold $\mathcal{O}$ =*

$(\mathbb{P}^2, n)$ tel que les applications f_i définissent des revêtements de $\mathcal{O}$ dans lui-même. En particulier, les applications f_i sont critiquement finies.

Dans le paragraphe 2, nous donnons quelques propriétés des suites d'itérés de f_1 et f_2. On montre que $d_1^m \neq d_2^n$ pour tout $(m,n) \neq (0,0)$. On montre aussi que si (f_1^m, f_2^n) appartient aux exemples 1–4, (f_1, f_2) sera conjugué à l'un des couples décrits dans ces exemples (lemme 2). Par conséquent, au cours de la preuve du théorème 1, on peut toujours remplacer les f_i par leurs itérés. On note $f_i|_\infty$ la restriction de f_i à la droite infinie $\{w_0 = 0\}$ et $\tilde{T}_d(x) := 2T_d(x/2)$. D'après le lemme 2, il suffit de considérer les cas suivants: $(f_1|_\infty, f_2|_\infty) = (x^{d_1}, x^{d_2})$, $(f_1|_\infty, f_2|_\infty) = (\tilde{T}_{d_1}, \tilde{T}_{d_2})$ et le cas où les $f_i^n|_\infty$ ne sont pas conjugués aux polynômes pour tout $n \geq 1$.

Dans le paragraphe 3, nous donnons quelques propriétés de l'ensemble critique d'une application holomorphe ouverte et de leur image. Ces propriétés seront utilisées dans les trois derniers paragraphes au voisinage des points singuliers de l'ensemble critique de f_i, en particulier, au voisinages des points critiques de $f_i|_\infty$.

Le paragraphe 4 nous donne le comportement assymptotique de f_i et son ensemble critique au point super-attractif à l'infini lorsque ce point existe.

La preuve du théorème 1 se constitue par 3 derniers paragraphes correspondant au 3 cas cités ci-dessus. Dans les paragraphes 2, 4, 5, 6, on note $\mathcal{C}_i \cup \{w_0 = 0\}$ l'ensemble critique de f_i et on écrit en coordonnées affines $f_i = (f_{i1}, f_{i2})$. Alors $\mathcal{C}_i$ est de degré $2d_i - 2$ compté avec les multiplicités. Pour simplifier les notations, fa et $f^{-1}a$ signifieront l'image et l'image réciproque de a par f.

Je tiens à remercier Nessim Sibony de m'avoir proposé ce problème ainsi que pour ses indications.

2 Quelques propriétés de suites d'itérés

Lemme 1 *Soient $f_1 \in \mathcal{PH}_{d_1}$ et $f_2 \in \mathcal{PH}_{d_2}$. Supposons que $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ et $f_1^n|_\infty = f_2^m|_\infty$. Alors il existe $n', m' \geq 1$ tels que $f_1^{n'} = f_2^{m'}$.*

Preuve. Il suffit de considérer $n = m = 1$. Comme $f_1|_\infty = f_2|_\infty$, $d_1 = d_2$. Posons $d := d_1 = d_2$. On peut écrire les f_i sur les coordonnées homogènes:

$$f_1(w) := [w_0^d : P(w_1, w_2) + w_0 R(w) : Q(w_1, w_2) + w_0 S(w)]$$

$$f_2(w) := [w_0^d : \lambda P(w_1, w_2) + w_0 \tilde{R}(w) : \lambda Q(w_1, w_2) + w_0 \tilde{S}(w)]$$

où P, Q sont homogènes de degré d, R, S, $\tilde{R}, \tilde{S}$ sont homogènes de degré $d-1$ et $\lambda \neq 0$. Comme $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$, $\lambda = \lambda^d$. Quitte à remplacer f_i par f_i^{d-1}, on peut supposer que $\lambda = 1$. Supposons que $f_1 \neq f_2$. Soit $0 < \alpha \leq d$ le nombre naturel minimal tel que:

$$f_i(w) = [w_0^d : P^* + w_0^\alpha R_i^* + w_0^{\alpha+1} U_i : Q^* + w_0^\alpha S_i^* + w_0^{\alpha+1} T_i]$$

où P^*, Q^* sont homogènes de degré d et ne contiennent aucun mononôme dont la puissance de w_0 est $\geq \alpha$, R_i^*, S_i^* sont homogènes de degré $d-\alpha$, indépendants de w_0 et U_i, T_i sont homogènes de degré $d-\alpha-1$. Considérons deux polynômes suivants en variable w_0 et à coefficients dans $\mathbb{C}[w_1, w_2]$:

$$P(P^* + w_0^\alpha R_i^*, Q^* + w_0^\alpha S_i^*) - P(P^*, Q^*).$$

Comme $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$, les coefficients de w_0^α dans ces polynômes sont égaux:

$$P_1(P,Q)R_1^* + P_2(P,Q)S_1^* = P_1(P,Q)R_2^* + P_2(P,Q)S_2^*$$

où $P_1 := \partial P/\partial w_1$ et $P_2 := \partial P/\partial w_2$. Par conséquent,

$$P_1(P,Q)(R_1^* - R_2^*) + P_2(P,Q)(S_1^* - S_2^*) = 0.$$

De même,

$$Q_1(P,Q)(R_1^* - R_2^*) + Q_2(P,Q)(S_1^* - S_2^*) = 0.$$

Comme α est maximal, $R_1^* - R_2^*$ et $S_1^* - S_2^*$ ne sont pas tous nuls. On en déduit que $P_1/P_2 = Q_1/Q_2$. L'application $f_i|_\infty = [P : Q]$ est donc constante. C'est la contradiction recherchée.

□

Corollaire 2 *Sous l'hypothèse du théorème 1, $d_1^m \neq d_2^n$ pour $(m,n) \neq (0,0)$.*

Preuve. On peut supposer que $m = n = 1$. Supposons que $d_1 = d_2 =: d$. Posons $x := w_2/w_1$.

Cas 1. $(f_1|_\infty, f_2|_\infty)$ est conjugué à $(x^{\pm d}, \lambda x^{\pm d})$. Dans ce cas, $(f_1^2|_\infty, f_2^2|_\infty)$ est conjugué à $(x^{d^2}, \lambda' x^{d^2})$. On vérifie facilement que $\lambda'^{d^2-1} = 0$ et $f_1^{2(d^2-1)}|_\infty = f_2^{2(d^2-1)}|_\infty$. D'après le lemme 1, $f_1^{n'} = f_2^{m'}$. C'est contradiction.

Cas 2. $(f_1|_\infty, f_2|_\infty)$ est conjugué à $(\pm T_d, \pm T_d)$. Alors soit $f_1|_\infty = f_2|_\infty$ soit $f_1|_\infty = -f_2|_\infty$. La deuxième égalité aura lieu seulement si d est impair (*voir* l'introduction). Dans les deux cas, $f_1^2|_\infty = f_2^2|_\infty$. D'après le lemme 1, $f_1^{n'} = f_2^{m'}$. C'est contradiction.

Cas 3. Aucune itéré de $f_i|_\infty$ n'est conjuguée au polynôme. D'après le théorème de Ritt-Eremenko [2], il existe un tore complexe $\mathbb{T}=\mathbb{C}/\Gamma$, une fonction elliptique F définie sur $\mathbb{T}$, des applications linéaires $\Lambda_i(x)=a_ix+b_i$ qui préservent le groupe Γ tels que $F\circ f_i|_\infty=F\circ\Lambda_i$. Le nombre a_i est égal à $p\theta_i$ où θ_i est une racine de l'unité et $p=\sqrt{d}$ est un nombre entier. Quitte à remplacer f_i par f_i^m, on peut supposer que $\theta_i=1$ et il existe un point fixe répulsif commun α des $f_i|_\infty$. Soit φ une application inversible d'un voisinage de $0\in\mathbb{C}$ dans $\mathbb{P}^1$, vérifiant $\varphi(0)=\alpha$, $\varphi^{-1}\circ f_1|_\infty\circ\varphi(x)=px$. Posons $\Theta_i:=\varphi^{-1}\circ f_i|_\infty\circ\varphi$. On a $\Theta_1\circ\Theta_2=\Theta_2\circ\Theta_1$. Utilisant les développements de Taylor, on montre facilement que $\Theta_2(x)=px$. D'où $f_1|_\infty=f_2|_\infty$. D'après le lemme 1, $f_1^{n'}=f_2^{m'}$. C'est contradiction.

$\square$

Soit f un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k$. On note $E(f)$ l'hypersurface (éventuellement vide ou réductible) maximale et complètement invariante par f, i.e. $f^{-1}E(f)=E(f)$. Cette hypersurface existe et s'appelle *l'hypersurface exceptionelle* de f [9] et $E(f)=E(f^n)$ pour tout $n\geq 1$. Dans $\mathbb{P}^1$, $\#E(f)\leq 2$; si $\#E(f)=2$, f est conjugué à $z^{\pm d}$; si $\#E(f)=1$, f est conjugué à un polynôme. Dans $\mathbb{P}^2$, $\deg E(f)\leq 3$; si $\deg E(f)=1$, f est conjugué à un endomorphisme polynomial; si $\deg E(f)=2$, f est conjugué à $[w_p^d:w_q^d:P]$ où $\{p,q\}$ est une permutation de $\{0,1\}$ et P est un polynôme homogène de degré d; si $\deg E(f)=3$, f est conjugué à $[w_p^d:w_q^d:w_r^d]$ où $\{p,q,r\}$ est une permutation de $\{0,1,2\}$ [4].

Lemme 2 *Sous l'hypothèse du théorème 1, si (f_1^m,f_2^n) se trouve dans les exemples 1-4, (f_1,f_2) est conjugué à l'un des couples décrits dans ces exemples.*

Preuve. *Cas 1.* Supposons que (f_1^m,f_2^n) se trouve dans l'exemple 1. Alors l'ensemble exceptionel de f_i est la réunion de deux droites dont l'une est l'infini. Quitte à changer les coordonnées, on peut supposer que $f_1=(z_1^{d_1},P(z))$ et $f_2=(\lambda z_1^{d_2},Q(z))$ avec $\lambda\neq 0$. Comme les deuxièmes composantes de f_1^m,f_2^n sont indépendantes de z_1, P,Q sont indépendantes de z_1. On a donc $P\circ Q=Q\circ P$ et $P^m=\pm T_{d_1^m}$ et $Q^n=\pm T_{d_2^n}$. Alors (P,Q) est conjugué à $(\pm T_{d_1},\pm T_{d_2})$ et (f_1,f_2) est conjugué au couple décrit dans l'exemple 1.
Cas 2. Supposons que (f_1^m,f_2^n) se trouve dans l'exemple 2. On a $f_1^{2m}=(T_{d_1^{2m}}z_1,T_{d_1^{2m}}z_2)$ et $f_2^{2n}=(T_{d_2^{2n}}z_1,T_{d_2^{2n}}z_2)$. Posons $d:=d_2^{2n}$ et $f:=f_2^{2n}=(T_dz_1,T_dz_2)$. Il existe un point $a\in\mathbb{C}^2$ fixe pour f_1 et périodique pour f car l'ensemble des points fixes de f_1 est invarant par f. Quitte à remplacer f

par f^l on peut supposer que a est fixe pour f. Comme $f = (T_d z_1, T_d z_2)$, il existe $(t_1^*, t_2^*) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a = (\cos t_1^*, \cos t_2^*) = (\cos dt_1^*, \cos dt_2^*)$. Posons $\varphi(t_1, t_2) :\ = (\cos(t_1 - t_1^*), \cos(t_2 - t_2^*))$ une application holomorphe d'un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ dans un voisinage de a dans $\mathbb{C}^2$. Supposons par la suite que $\cos t_i^* \neq \pm 1$; le cas où par exemple $\cos t_1^* = 1$, il suffit de remplacer $\cos(t_1 - t_1^*)$ dans φ par $\cos\sqrt{t_1 - t_1^*}$. L'application φ est un biholomorphisme local. Soient $g :\ = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ et $g_1 :\ = \varphi^{-1} \circ f_1 \circ \varphi$. On a $g(t_1, t_2) = (dt_1, dt_2)$ et $g \circ g_1 = g_1 \circ g$. Utilisant les développements de Taylor de g et g_1, on montre facilement que g_1 est linéaire. Posons $g_1(t_1, t_2) = (\alpha t_1 + \beta t_2, \alpha' t_1 + \beta' t_2)$. Soit $f_1 = (P, Q)$. On a $\cos(\alpha t_1' + \beta t_2') = P(\cos t_1', \cos t_2')$ où $t_i' :\ = t_i - t_i^*$. Comme le membre à droite est périodique de période $(2\pi, 2\pi)$, α et β sont entiers. L'égalité précédente implique $\sin \alpha t_1' \sin \beta t_2' = \cos \alpha t_1' \cos \beta t_2' - P(\cos t_1', \cos t_2')$. Si $\alpha\beta \neq 0$, $\sin \alpha t_1'$ s'écrit en fonction de $\cos t_1'$. Ceci est impossible car $\sin \alpha t_1'$ est impaire et non identiquement nulle. Donc $\alpha\beta = 0$. De même, $\alpha'\beta' = 0$. Comme f_1 et g_1 sont ouvertes, $\alpha = \beta' = 0$ ou $\alpha' = \beta = 0$. Par conséquent, P et T_d sont permutables. On a $P = \pm T_{d_1} z_1$ ou $\pm T_{d_1} z_2$. Le polynôme Q l'est aussi. On conclut que (f_1, f_2) se trouve dans l'exemple 2.
Cas 3. Supposons que (f_1^m, f_2^n) se trouve dans l'exemple 3. Alors f_1^m et f_2^n sont homogènes. Par conséquent, f_1 et f_2 sont homogènes et (f_1, f_2) se trouve dans l'exemple 3.
Cas 4. Supposons maintenant que (f_1, f_2) se trouve dans l'exemple 4. Soit π l'application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ avec $\pi(x, y) = (x + y, xy)$ (*voir* l'exemple 4). Quitte à remplacer (m, n) par $(2m, 2n)$, on peut supposer que $f_1^m \circ \pi = \pi \circ \tilde{F}_1$ et $f_2^n \circ \pi = \pi \circ \tilde{F}_2$ où $\tilde{F}_1(x, y) :\ = (T_{d_1^m} x, T_{d_1^m} y)$, $\tilde{F}_2(x, y) :\ = (T_{d_2^n} x, T_{d_2^n} y)$ ou $\tilde{F}_1(x, y) = (\lambda_1 x^{d_1^m}, \lambda_1 y^{d_1^m})$, $\tilde{F}_2(x, y) = (\lambda_2 x^{d_2^n}, \lambda_2 y^{d_2^n})$. Comme f_1^m définit un revêtement d'un certain orbifold $\mathcal{O} = (\mathbb{P}^2, n)$ dans lui-même, f_1 définit également un revêtement de $\mathcal{O}$ dans lui-même. Remarquons que la courbe $H :\ = \{z_1^2 - 4z_2 = 0\}$ est invariante par f_1^m, f_2^n et $n(H) = 2$. Le fait que f_i définit un revêtement de $\mathcal{O}$ dans lui-même implique qu'il existe des polynômes R_i vérifiant:

$$f_{i1}^2 - 4f_{i2} = (z_1^2 - 4z_2) R_i^2.$$

Posons $H_i :\ = (H_{i1}, H_{i2}) = f_i \circ \pi$, on a:

$$H_{i1}^2 - 4H_{i2} = (x - y)^2 R_i^2(x + y, xy).$$

Ces égalités signifient qu'il existe des applications F_i vérifiant $\pi \circ F_i = H_i$. On peut choisir F_i tels que $F_1 \circ F_2 = F_2 \circ F_1$, $F_1^m = \tilde{F}_1$ et $F_2^n = \tilde{F}_2$. Comme F_1^m,

F_2^n sont prolongeables en des endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^2$, F_1 et F_2 le sont aussi. Comme dans les cas 2 et 3, on montre que $F_i = (\pm T_{d_i}x, \pm T_{d_i}y)$, $(\pm T_{d_i}y, \pm T_{d_i}x)$, $(\lambda_i x^{d_i}, \lambda_i y^{d_i})$ ou $(\lambda_i y^{d_i}, \lambda_i x^{d_i})$. Les deux premiers cas (resp. les deux derniers) donnent les mêmes applications f_i. Donc (f_1, f_2) appartient à l'exemple 4.

□

Lemme 3 *Soit $f \in \mathcal{PH}_d$ avec $d \geq 2$. Supposons qu'il existe un $\theta < 1$ positif tel que pour tout n on ait $f^n(z) = P(z) + \mathrm{O}(|z|^{\theta d^n})$ quand $|z| \to \infty$ où $P(z)$ est une application polynomiale homogène de degré d^n. Alors f est homogène.*

Preuve. Supposons que f n'est pas homogène. Alors f^2 n'est pas homogène et donc f^{2^n} n'est pas homogène pour tout $n \geq 0$. Soit $n \geq 0$ tel que $d^{2^n}/(d^{2^n} - 1) > \theta$. Comme f^{2^n} n'est pas homogène, $f^{2^{n+1}}$ contient des mononômes de degré plus grand que $d^{2^{n+1}} - d^{2^n}$ et plus petit que $d^{2^{n+1}}$. C'est contradiction.

□

Proposition 1 ([1]) *Sous l'hypothèse du théorème 1, pour toute composante A de $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, il existe deux couples de nombres naturels $(n, m) \neq (n', m')$ tels que $f_1^n f_2^m A = f_1^{n'} f_2^{m'} A$. De plus, il existe N qui ne dépend que du nombre des composantes de $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ tel que n, m, n', m' soient majorés par N.*

Remarque 1 Cette proposition reste valable pour les endomorphismes ouverts permutables d'une variété quelconque tels que les ensembles critiques des f_i contiennent un nombre fini de composantes irréductibles.

Preuve. Il suffit de considérer $A \subset \mathcal{C}_1$. La relation $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ implique:

$$f_1'(f_2(z)).f_2'(z) = f_2'(f_1(z)).f_1'(z).$$

D'où:

$$\mathcal{C}_2 \cup f_2^{-1}(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_1 \cup f_1^{-1}(\mathcal{C}_2) \tag{3}$$

Supposons qu'il n'existe pas n, m, n', m' vérifiant cette proposition. Alors la suite $f_2^n A$ contient une infinité de courbes differentes. Ceci implique qu'il existe un n tel que $f_2^n A \not\subset \mathcal{C}_1$ car $\mathcal{C}_1$ ne contient qu'un nombre fini de courbes irréductibles. On choisit n minimal possible. Posons $A' := f_2^{n-1} A$. La relation (3) implique que $A' \subset \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ et $f_1^{-1} A' \subset \mathcal{C}_2 \cup f_2^{-1} \mathcal{C}_1$.

Supposons que pour tout $m \geq 0$, $f_1^{-m}A' \subset \mathcal{C}_2$. Comme $\mathcal{C}_2$ ne contient qu'un nombre fini de composantes, il existe $m_1 < m_2$ et une composante $A'' \subset \mathcal{C}_2$ vérifiant $A' = f_1^{m_1}A'' = f_1^{m_2}A''$. Par conséquent, $f_2^{n-1}A = f_2^{n-1}f_1^{m_2-m_1}A$. C'est contradiction.

Soit $m \geq 1$ le nombre minimal vérifiant $f_1^{-m}A' \not\subset \mathcal{C}_2$. Comme $f_1^{-m+1}A' \subset \mathcal{C}_2$, (3) implique $f_1^{-m}A' \subset \mathcal{C}_2 \cup f_2^{-1}\mathcal{C}_1$. Donc $f_1^{-m}A'$ contient une composante de $f_2^{-1}\mathcal{C}_1$. Il existe une composante A_2 de $\mathcal{C}_1$ telle que $f_2A' = f_1^m A_2$. D'où $f_2^n A = f_1^m A_2$.

De même, il existe une suite $\{A_i\}$ de composantes de $\mathcal{C}_1$ avec $A_1 = A$ et des n_i, $m_i \geq 1$ avec $n_1 := n$ et $m_1 := m$ tels que $f_2^{n_i}A_i = f_1^{m_i}A_{i+1}$. Il existe $0 < l < j$ tels que $A_l = A_j$. On déduit que $f_2^r f_1^s A = f_1^p A$ pour $r := n_1 + \cdots + n_{l-1}$, $s := m_l + \cdots + m_{j-1}$ et $p := m_1 + \cdots + m_{j-1}$. C'est contradiction.

Par le résonnement ci-dessus, l'existence de N est évidente.

□

3 Ensembles critiques et leurs images

Soient f une application ouverte d'un domaine $U \subset \mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$, H et H' deux hypersurfaces de U. Pour tout $a \in U$, on note $\mathrm{mult}(f, a)$ *la multiplicité* de f en a, i.e. le nombre de préimages dans U' d'un point b générique suffisamment proche de $f(a)$, où U' est un voisinage suffisamment petit de a. On note $\mathrm{mult}(f, H)$ *la multiplicité* de f sur H, i.e. la multiplicité de f en un point générique de H et $\mathrm{mult}(H \cap H', c)$ la multiplicité de l'intersection $H \cap H'$ en $c \in H \cap H'$. Posons $\mathrm{m}_f(H) := \mathrm{mult}(f, H) - 1$. Alors $\mathrm{m}_f(H) > 0$ si et seulement si H appartient à l'ensemble critique de f avec la multiplicité $\mathrm{m}_f(H)$. Par la suite, f est un germe d'application holomorphe, ouverte, définie au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ à l'image dans $\mathbb{C}^2$ et $\mathcal{C}$ son ensemble critique.

Lemme 4 *Supposons que $f(x, y) = (x^d + \mathrm{o}(x^d), g(x, y))$ avec $d \geq 2$. Soient $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_m$ et $\{x = 0\}$ les composantes irréductibles de $\mathcal{C}$. Poson $n_i := \mathrm{m}_f(\mathcal{C}_i)$ et $m_i := \mathrm{mult}(\mathcal{C}_i \cap \{x = 0\}, 0)$. Alors $\sum m_i n_i = \mathrm{mult}(h, 0) - 1 = \mathrm{m}_h(0)$, où $h := f|_{\{x=0\}}$.*

Preuve. Soit J le jacobien de f. Alors $\sum m_i n_i$ est la multiplicité en 0 de la restriction de $|J|/x^{d-1}$ sur $\{x = 0\}$. D'autre part,

$$|J| = x^{d-1}\begin{vmatrix} d + \mathrm{o}(1) & x(1 + \mathrm{o}(1)) \\ g_x & g_y \end{vmatrix}$$

où $g_x := \partial g/\partial x$ et $g_y := \partial g/\partial y$. Par conséquent,

$$\sum m_i n_i = \mathrm{mult}(g_y(0,y),0) = \mathrm{mult}(g(0,y),0) - 1 = \mathrm{mult}(h,0) - 1.$$

$\square$

Lemme 5 *Soient f, h définis dans le lemme 4, A une courbe lisse qui coupe $\{x = 0\}$ transversalement en 0. Soient A_i les composantes irréductibles de $f^{-1}A$, $n_i := \mathrm{mult}(f, A_i)$ et $m_i := \mathrm{mult}(A_i \cap \{x = 0\}, 0)$. Alors* $\mathrm{mult}(f,0) = d.\mathrm{mult}(h,0) = d.\sum m_i n_i$.

Preuve. Quitte à remplacer f par $f \circ \sigma$, on peut supposer que $A = \{y = 0\}$, où σ est une application holomorphe inversible. Alors 0 est une solution de multiplicité $\mathrm{mult}(f,0)$ de l'équation $f(x,y) = 0$. Posons $f = (l,g)$. La solution de l'équation $l = 0$ est $\{x = 0\}$ avec la multiplicité d. Comme $f^{-1}A = \{g = 0\}$, $\mathrm{mult}(f,0) = d.\mathrm{mult}(\{g = 0\} \cap \{x = 0\}, 0) = d.\mathrm{mult}(h,0) = d\sum m_i n_i$.

$\square$

Lemme 6 *Suppsons que $f|_{\{y=0\}}$ est régulière et que $\mathcal{C}$ est une réunion de deux courbes lisses $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ qui coupent $\{y = 0\}$ transversalement en 0. Posons $A = f\{y = 0\}$. Supposons de plus que $f\mathcal{C}_1$ est une courbe lisse et* $\mathrm{mult}(f\mathcal{C}_1 \cap A, f(0)) = 2$. *Alors $f^{-1}A \neq \mathcal{C}_2 \cup \{y = 0\}$.*

Preuve. Supposons que $f^{-1}A = \mathcal{C}_2 \cup \{y = 0\}$. Quitte à remplacer f par $\sigma \circ f \circ \sigma'$ on peut supposer que $f(x,y) = (x + yh, y(x-u)g)$, où σ et σ' sont des applications holomorphes inversibles, h et g sont holomorphes en (x,y), $u(y)$ est holomorphe, $u(0) = 0$ et $u'(0) \neq 0$. De plus, $\mathcal{C}_1 = \{x = 0\}$, $\mathcal{C}_2 = \{x = u\}$ et $f\mathcal{C}_1 = \{y = x^2\}$. Soit J le jacobien de f. Alors:

$$|J| = (1 + yh_x)[-yu'g + (x-u)(g + yg_y)] - (h + yh_y)[yg + y(x-u)g_x].$$

Comme $|J| = 0$ sur $\mathcal{C}_2$, on a $-(1 + yh_x)yu'g - (h + yh_y)yg = 0$ sur $\mathcal{C}_2$. Supposons que g n'est pas identiquement nulle sur $\mathcal{C}_2$. Alors $(1 + yh_x)u' + (h + yh_y) = 0$ sur $\mathcal{C}_2$. Posons $l(x,y) := x + yh$. On a $l(u,y) = 0$ car sa dérivée est nulle et $l(0) = 0$. Donc f n'est pas ouverte. Ceci est impossible. Alors $g = 0$ sur $\mathcal{C}_2$. On peut écrire $g = (x-u)^{n-1}v$ avec $v(0) \neq 0$ et $n > 2$ car $f^{-1}A = \mathcal{C}_2 \cup \{y = 0\}$, $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}$ et $\{y = 0\} \not\subset \mathcal{C}$. Comme $f\mathcal{C}_1 = \{y = x^2\}$, on a $y(-u)^n v(0,y) = y^2h^2(0,y)$. Comme $v(0) \neq 0$ et $n > 2$, $h(0,y) = \mathrm{O}(y)$ et $yh_y(0,y) = \mathrm{O}(y)$ quand $t \to 0$. D'autre part,

$$\begin{aligned} |J| &= (x-u)^{n-1}\{(1+yh_x)[-nu'yv + (x-u)v + y(x-u)v_y] \\ &\quad -(h+yh_y)y[nv + (x-u)v_x]\} \end{aligned}$$

est égal à 0 quand $x = 0$. Donc pour $x = 0$:

$$0 = |J| = (-u)^{n-1}[(1+yh_x)(-nu'y - u)v + \mathrm{o}(y)].$$

C'est contradiction car $-nu'y - u = -(n+1)u'(0)y + \mathrm{o}(y) \neq \mathrm{o}(y)$ et $v(0) \neq 0$.

□

Lemme 7 *Soit $\mathcal{C}' \not\subset \mathcal{C}$ un germe de surface de Riemann lisse passant par 0. Supposons que* $\mathrm{mult}(f,0) = 2$*, $\mathcal{C}_1 := f\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_2 := f\mathcal{C}'$ sont lisses et* $\mathrm{mult}(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2, f(0)) = 2$*. Alors $f^{-1}\mathcal{C}_2 \neq \mathcal{C}'$.*

Preuve. Comme $\mathrm{mult}(f,0) = 2$ la courbe $\mathcal{C}$ est lisse en 0. Quitte à remplacer f par $\sigma \circ f \circ \sigma'$ on peut supposer que $f(0) = 0$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 = \{y = 0\}$ et $\mathcal{C}_2 = \{y = x^2\}$ où σ et σ' sont des germes d'application holomorphe inversible. Alors $f(x,y) = (h, yg)$. Le déterminant du jacobien de f est égal à:

$$|J| = h_x(g + yg_y) - h_y y g_x$$

qui s'annulle uniquement quand $y = 0$. D'où $h_x g = 0$ quand $y = 0$. Si $g(x,0) \neq 0$ alors $h_x(x,0) = 0$. Donc $h(x,0) = 0$ car $h(0) = 0$. Alors f n'est pas ouverte. C'est impossible. On a $g(x,0) = 0$. On peut écrire $g = yv$ et

$$|J| = y[h_x(2v + yv_y) - h_y y v_x].$$

Comme $\mathrm{mult}(f,0) = 2$, $h_x(2v + yv_y) - h_y y v_x$ n'est pas égal à 0 en 0. Donc $v(0) \neq 0$ et $h_x(0) \neq 0$. La courbe $f^{-1}\mathcal{C}_2$ est égale à $\{y^2 v = h^2\}$. Comme $v(0) \neq 0$, $f^{-1}\mathcal{C}_2$ est la réunion de deux courbes $y\sqrt{v} = \pm h$. Supposons que ces deux courbes ne sont pas distinctes. Comme $h_x(0) \neq 0$, la courbe $y\sqrt{v} = \pm h$ s'écrit sous la forme $y = u(x)$. On a $u\sqrt{v(x,u)} = \pm h(x,u)$. D'où $u = 0$. C'est impossible car $\mathcal{C}' \neq \mathcal{C}$. Alors $f^{-1}\mathcal{C}_2$ est réductible.

□

Lemme 8 *Si $\mathcal{C}' := f\mathcal{C}$ est irréductible, $f^{-1}\mathcal{C}'$ est irréductible.*

Preuve. Comme f est ouverte, elle définit un revêtement fini de $U \setminus f^{-1}\mathcal{C}'$ dans $V \setminus \mathcal{C}'$ où U et V sont certains voisinages de 0 et de $f(0)$. Mais le groupe topologique $\pi_1(V \setminus \mathcal{C}')$ de $V \setminus \mathcal{C}'$ est égal à $\mathbb{Z}$ car $\mathcal{C}'$ est irréductible. Celui de $U \setminus f^{-1}\mathcal{C}$ est égal aussi à $\mathbb{Z}$. Par conséquent, $f^{-1}\mathcal{C}$ est irréductible.

□

4 Germes holomorphes permutables

Dans ce paragraphe, on note f_1, f_2 deux germes d'application holomorphe ouverte, qui sont définies au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ à l'image dans $\mathbb{C}^2$ avec $f_1(0) = f_2(0) = 0$ et $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$. Notons $\mathcal{C}_i$ l'ensemble critique de f_i.

Lemme 9 *Supposons que $f_i(x,y) = (x^{d_1} + \mathrm{o}(x^{d_1}), a_i y + y h_i)$ où $h_i(0) = 0$, $a_i \neq 0$ et $a_1^n \neq a_2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}_+$. Soit $\mathcal{C}$ un germe de surface de Riemann en 0 (éventuellement singulier) tel que $f_1\mathcal{C} = f_2\mathcal{C}$. Alors $\mathcal{C}$ est l'une des deux courbes invariantes $\{x = 0\}$ et $\{y = 0\}$.*

Preuve. Supposons que $\mathcal{C} \neq \{x = 0\}$ et $\mathcal{C} \neq \{y = 0\}$. On peut écrire $\mathcal{C} = u(D)$ où D est un disque de $\mathbb{C}$ centré en 0, $u(t) = (t^l, ct^m + \mathrm{o}(t^m))$ une application holomorphe de D dans $\mathbb{C}^2$ et $c \neq 0$. On a:

$$f_i \circ u(t) = (t^{ld_i} + \mathrm{o}(t^{ld_i}), a_i c t^m + \mathrm{o}(t^m)).$$

Comme $f_1\mathcal{C} = f_2\mathcal{C}$, on a $ld_1 = ld_2$ et $(a_1c)^{ld_1} = (a_2c)^{ld_2}$. D'où $d_1 = d_2$ et $a_1^{ld_1} = a_2^{ld_1}$. C'est contradiction.

□

Soit $h(x,y) = \sum_{k,l \geq 1} a_{kl} x^k y^l$ une fonction holomorphe définie au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$d_\alpha :\, = \min_{a_{kl} \neq 0} \alpha k + l.$$

Alors on peut écrire $h = h_\alpha + \mathrm{o}_\alpha(y^{d_\alpha})$, où $h_\alpha :\, = \sum_{\alpha k + l = d_\alpha} a_{kl} x^k y^l$ et $\mathrm{o}_\alpha(y^{d_\alpha})$ est une fonction vérifiant $\mathrm{o}_\alpha(y^{d_\alpha}) = \mathrm{o}(t^{d_\alpha})$ quand $x = \mathrm{O}(t^\alpha)$ et $y = \mathrm{O}(t)$. Considérons $h = ay^d + xg(x,y)$ avec $a \neq 0$ et g holomorphe. On définit un nombre rationnel $\alpha_h \geq 1$ par:

$$\alpha_h :\, = \max\{1, \min_{d_\alpha = d} \alpha\}.$$

Proposition 2 *Soient* $f_i = (x^{d_i} + \mathrm{o}(x^{d_i}), h_i)$ *et* $\alpha : = \max(\alpha_{h_1}, \alpha_{h_2})$ *où* $h_i = y^{d_i} + xg_i(x,y)$. *Supposons que* $d_1^m \neq d_2^n$ *pour tout* $(m,n) \in \mathbb{N}^2 - (0,0)$. *Soient* $P_i(y) : = h_{i,\alpha}(1,y)$. *Alors* $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1$ *et l'une des conditions suivantes est vraie:*

1. $\alpha = 1$, (P_1, P_2) *est conjugué à* $(y^{d_1}, \gamma y^{d_2})$ *avec* $\gamma^{d_1 - 1} = 1$;

2. $\alpha = 1$, (P_1, P_2) *est conjugué à* $(\pm\tilde{T}_{d_1}, \pm\tilde{T}_{d_2})$;

3. $\alpha = 2$, $\beta^{-1} P_i(\beta y) = \pm\tilde{T}_{d_i}(y)$ *où* $\beta^{d_i - 1} = 1$.

Preuve. Si $\alpha = 1$, $[x^{d_i} : h_{i,\alpha}]$ définissent deux endomorphismes polynomiaux permutables de $\mathbb{P}^1$ dont $[x : y]$ sont les coordonnées homogènes. D'où $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1$. Comme $d_1^m \neq d_2^n$ pour $(m,n) \neq (0,0)$, (P,Q) est conjugué à $(y^{d_1}, \gamma y^{d_2})$ ou à $(\pm\tilde{T}_{d_1}, \pm\tilde{T}_{d_2})$. L'une des conditions 1 ou 2 est vraie.

Supposons maintenant que $\alpha = p/q$ avec p, q premiers entre eux et $p > q \geq 1$. La relation $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ appliquée à $x = t^p$ et $y = at^q$ nous donne $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1$. Comme $d_1^m \neq d_2^n$ pour $(m,n) \neq (0,0)$, (P_1, P_2) est conjugué à $(a^{d_1}, \gamma a^{d_2})$ ou à $(\pm\tilde{T}_{d_1}, \pm\tilde{T}_{d_2})$.

Le coefficient de $a^{d_i - 1}$ dans $P_i(a)$ est nul car $\alpha > 1$. Alors si (P_1, P_2) est conjugué à $(a^{d_1}, \gamma a^{d_2})$, il sera égal à $(a^{d_1}, \gamma' a^{d_2})$. Ceci est impossible (*voir* la définition de $\alpha = \max(\alpha_{h_1}, \alpha_{h_2})$). Alors (P_1, P_2) est conjugué à $(\pm\tilde{T}_{d_1}, \pm\tilde{T}_{d_2})$.

Par la définition de α, $P_i(a) = a^m P_i^*(a^p)$ pour un certain polynôme P_i^*. Alors l'ensemble des zéros de P_i est stable par la rotation $a \longmapsto \sqrt[p]{1}a$. On en déduit que $p = 2$, donc $q = 1$ et $\alpha = 2$ car les zéros de $\pm\tilde{T}_{d_i}$ sont alignés.

Finalement, il existe une application linéaire $\sigma(a) : = \beta a + \theta$ avec $\beta \neq 0$ telle que $\sigma^{-1} \circ P_i \circ \sigma = \pm\tilde{T}_{d_i}$. Si d_i est pair (ou impair) les fonctions $\tilde{T}_{d_i}$ et P_i le sont aussi. De plus, le coefficient de $y^{d_i - 1}$ dans $P_i(y)$ est nul; ceux de y^{d_i} dans P_i et dans $\tilde{T}_{d_i}$ sont 1. Donc $\theta = 0$ et $\beta^{d_i - 1} = 1$.

□

Corollaire 3 *Si la condition 3 de la proposition 2 est vraie, alors il existe une courbe* $\mathcal{D} = \{x = \beta^2 y^2/4 + \mathrm{o}(y^2)\}$ *invariante par* f_1 *et* f_2 *telle que* $\overline{f_i^{-1}\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}} = \mathcal{C}_i$. *De plus,*

1. *Si* d_i *est impair,* $\mathcal{C}_i$ *est une réunion de* $(d_i - 1)/2$ *courbes* $\mathcal{D}_r = \{x = \beta^2 y^2/r + \mathrm{o}(y^2)\}$ *où* $r \in \mathbb{R}^+$ *et* $\pm\sqrt{r} \in \tilde{T}_{d_i}^{-1}\{\pm 2\} \setminus \{\pm 2\}$.

2. *Si* d_i *est pair,* $\mathcal{C}_i$ *est une réunion de* $d_i/2 - 1$ *courbes* $\mathcal{D}_r = \{x = \beta^2 y^2/r + \mathrm{o}(y^2)\}$ *et d'une courbe* $\mathcal{D}_0$ *qui coupe* $\{x = 0\}$ *transversalement où* $r \in \mathbb{R}^+$ *et* $\pm\sqrt{r} \in \tilde{T}_{d_i}^{-1}\{\pm 2\} \setminus \{\pm 2, 0\}$.

Preuve. On peut supposer que $i = 1$. Quitte au changement de coordonnées $(z_1, z_2) \mapsto (z_1, \beta z_2)$, on peut supposer que $\beta = 1$. On écrit

$$f_j = (x^{d_j} + \mathrm{o}(x^{d_j}), \pm x^{d_j/2} \tilde{T}_{d_j}(y/\sqrt{x}) + \mathrm{o}_2(y^{d_j})).$$

Soit τ l'application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ définie par $\tau(t, a) : = (t^2, at)$. Cette application est localement inversible sauf sur $\{t = 0\}$. On considère $F_j : = \tau^{-1} \circ f_j \circ \tau$. Avec f_j décrit ci-dessus, on peut trouver des F_j holomorphes au voisinage de $\{t = 0\}$ vérifiant $F_1 \circ F_2 = F_2 \circ F_1$ et

$$F_j(t, a) = (t^{d_j} + \mathrm{o}(t^{d_j}), \pm \tilde{T}_{d_j}(a) + \mathrm{O}(t)).$$

Soit $\mathcal{C}'_j \cup \{t = 0\}$ l'ensemble critique de F_j. On a $\tau\mathcal{C}'_j = \mathcal{C}_j$. Fixons un N et un R suffisament grands. Il existe un $\epsilon > 0$ tel que les applications F_j^l sont bien définies sur $\{|t| < \epsilon\} \times \{|a| < R\}$ pour tout $l = 1, 2, \ldots, N$. On considère ici le cas où d_1 est pair et les signes $\pm$ sont les $+$; les autres cas seront traités de même manière.

Considérons un $b \in \tilde{T}_{d_1}^{-1}\{2\} \setminus \{0, 2\}$. Alors b est un point critique de $\tilde{T}_{d_1}$. D'après le lemme 4, il existe une courbe $\mathcal{D}'_b \subset \mathcal{C}'_j$ qui coupe $\{t = 0\}$ transversalement en $(0, b)$. La proposition 1 s'applique également pour F_j. Il existe $(m, n) \neq (m', n')$ tels que $F_1^m F_2^n \mathcal{D}'_b = F_1^{m'} F_2^{n'} \mathcal{D}'_b$ et m, n, m', n' soient plus petits que $N - 1$. On en déduit que $F_1^m F_2^n (F_1\mathcal{D}'_b) = F_1^{m'} F_2^{n'} (F_1\mathcal{D}'_b)$. Or $F_1\mathcal{D}'_b$ passe par $(0, 2)$ un point fixe de F_1 et F_2, le lemme 9 (appliqué à $F_1^m F_2^n$ et $F_1^{m'} F_2^{n'}$) montre que $F_1\mathcal{D}_b$ est invariante par F_1 et F_2. Cette courbe invariante, notée $\mathcal{D}'$, est la courbe stable passant par $(0, 2)$; elle est unique, lisse et indépendante de b; elle coupe $\{t = 0\}$ transversalement. La courbe $\mathcal{D}'$ est définie par une équation du type $a = 2 + \mathrm{O}(t)$. Ceci implique que $\mathcal{D} : = \tau^{-1}\mathcal{D}'$ est définie par $y^2 = 4x + x\tilde{\mathrm{o}}(1)$ où la notation $\tilde{\mathrm{o}}(1)$ signifie une fonction algébrique tendant vers 0 quand $x \to 0$. On a $\mathrm{mult}(\mathcal{D} \cap \{x = 0\}) = 2$ et $\{x = 0\}$ est tangente à $\mathcal{D}$. Donc $\mathcal{D}$ est lisse, irréductible, tangente à $\{x = 0\}$. Elle est invariante par f_1, f_2 et définie par une équation du type $x = y^2/4 + \mathrm{o}(y^2)$. Posons $r : = b^2$, $\mathcal{D}_r : = \tau^{-1}\mathcal{D}'_b$. De même manière, on prouve que $\mathcal{D}_r = \{x = y^2/r + \mathrm{o}(y^2)\}$. On a $\mathcal{D}_r \subset \mathcal{C}_1$. Il y a $d_1/2 - 1$ tels nombres r différents. Comme $\mathrm{mult}(f_1|_{\{x=0\}}, 0) = d_1$, le lemme 4 implique que $\mathcal{C}_1$ est la réunion des $\mathcal{D}_r$ et d'une courbe $\mathcal{D}_0$ qui coupe $\{x = 0\}$ transversalement en 0. Remarquons qu'il existe une composante $\mathcal{D}''$ de $\tau^{-1}(f_1\mathcal{D}_0)$ passant par $(0, -2)$ et $(n, m) \neq (n', m')$ tels que $F_1^n F_2^m \mathcal{D}'' = F_1^{n'} F_2^{m'} \mathcal{D}''$. D'où $F_1\mathcal{D}'' = \mathcal{D}'$. Ceci montre aussi que $\mathcal{D}''$ est la composante de $\tau^{-1}(\mathcal{D})$ qui passe par $(0, -2)$. D'où $\mathcal{D}_0 \subset f_1^{-1}\mathcal{D}$. Le lemme 5 montre que $f_1^{-1}\mathcal{D}$ contient seulement les $\mathcal{D}_r$, $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}$.

$\square$

5 Preuve du théorème 1: premier cas

Dans ce paragraphe, on suppose que $f_i|_\infty = [w_1^{d_i} : w_2^{d_i}]$ (*voir* l'introduction). Soient $a = [0:0:1]$ et $a' = [0:1:0]$. En utilisant les coordonnées locales $x := w_0/w_2$, $y := w_1/w_2$, au voisinage de a, on peut écrire $f_i(x,y) = (x^{d_i} + \mathrm{o}(x^{d_i}), h_i)$ où $h_i = y^{d_i} + xg_i$.

D'après la proposition 2, il existe une application linéaire $\sigma(z_1) = \beta z_1 + \theta$ telle que l'une des conditions suivantes soit vraie:

1. $\sigma^{-1} \circ f_{11} \circ \sigma = z_1^{d_1}$ et $\sigma^{-1} \circ f_{21} \circ \sigma = \gamma z_1^{d_2}$ avec $\gamma^{d_1-1} = 1$;
2. $\sigma^{-1} \circ f_{i1} \circ \sigma = \pm \tilde{T}_{d_i} z_1$;
3. $f_{i1} = \pm \beta^{-1} z_2^{d_i/2} \tilde{T}_{d_i}(\beta z_1/\sqrt{z_2}) + \Xi_i$ où $\Xi_i = \sum_{k+2l<d_i} b_{ikl} z_1^k z_2^l$.

Quitte à remplacer f_i par f_i^2, on peut supposer que les signes $\pm$ sont les $+$. Comme $h_i = y^{d_i} + xg_i$, dans les conditions 1, 2, on a $\beta^{d_i-1} = 1$. Quitte au changement de coordonnées $(z_1, z_2) \mapsto (z_1 + \theta/\beta, z_2)$ dans les conditions 1, 2, on peut supposer que $\theta = 0$. Alors dans 1., on peut supposer que $\sigma = \mathrm{Id}$; dans 2. et 3., en utilisant le changement $(z_1, z_2) \mapsto (\beta z_1, z_2)$, on peut supposer que $\beta = 1$ et $\sigma = \mathrm{Id}$. De même pour a', l'une des conditions suivantes est vraie:

1'. $f_{i2} = z_2^{d_i}$;

2'. $f_{i2} = \tilde{T}_{d_i} z_2$;

3'. $f_{i2} = \beta'^{-1} z_1^{d_i/2} \tilde{T}_{d_i}(\beta' z_2/\sqrt{z_1}) + \Xi'_i$ où $\Xi'_i = \sum_{2k+l<d_i} b'_{ikl} z_1^k z_2^l$, $\beta'^{d_i-1} = 1$.

Il est clair que si les conditions 3 et 3' sont fausses, le couple (f_1, f_2) se trouve dans les exemples 1-3 à une classe de conjugaison près. La preuve du théorème 1 sera completée par les propositions qui suivent.

Proposition 3 *Si les conditions 1, 3' ou 1',3 sont réalisées, le couple (f_1, f_2) se trouve dans l'exemple 4 à une classe de conjugaison près.*

Preuve. On peut supposer que 1' et 3 sont vraies. D'après la proposition 2, il existe une courbe algébrique $\mathcal{D}$ invariante tangente à $\{w_0 = 0\}$ en a. Comme $f_i|_\infty = [w_1^{d_i} : w_2^{d_i}]$ et $f_{i2} = z_2^{d_i}$, $\mathcal{D} \cap \{w_0 = 0\} = \{a\}$; $\mathcal{D}$ est donc de degré 2. L'ensemble exceptionnel de $f_i|_{\mathcal{D}}$ qui est de cardinal ≤ 2, contient les points d'intersection de $\mathcal{D}$ avec $\{w_0 = 0\} \cup \{w_2 = 0\}$. Par conséquent, $\mathcal{D}$ est tangente à $\{w_2 = 0\}$ en un point, noté b. On déduit que, $f_i|_{\{w_1=0\}}$ est conjugué à $z_1^{d_i}$. Appliquant la proposition 2 en b, on constate que $\Xi_i = 0$. On vérifie facilement que les $f_i = (z_1^{d_i/2}\tilde{T}_{d_i}(z_1/\sqrt{z_2}), z_2^{d_i})$ sont conjuguées aux applications construites dans l'exemple 4 pour $h_i(x) = x^{d_i}$.

□

Proposition 4 *Les conditions 2, 3' (ou 2', 3) ne sont pas réalisées simultalement.*

Preuve. Supposons, par exemple, que 2 et 3' sont vraies.

Soit $\mathcal{D}$ la courbe invariante de f_i passant par a' qui est décrite dans le corollaire 2. Cette courbe est tangente à $\{w_0 = 0\}$ en un point unique a'. Par sa description dans le corollaire 2, $\mathcal{D}$ est de degré 2. Posons $\mathcal{E}_s = \{z_1 = s\}$. Remarquons que pour tout $s \in I := \tilde{T}_{d_1}^{-2}\{\pm 2\} \setminus \{\pm 2\}$, $\mathcal{E}_s \subset \mathcal{C}_1$ et $f_1(\mathcal{E}_s) = \mathcal{E}_{\pm 2}$. Au moins l'une des deux droites $\mathcal{E}_{\pm 2}$ coupe $\mathcal{D}$ transversalement. Supposons, par exemple, que $\mathcal{E}_{-2}$ couple $\mathcal{D}$ transversalement en c et d. Alors pour tout $s \in \tilde{T}_{d_1}^{-1}\{-2\} \setminus \{\pm 2\}$, $\mathcal{E}_s$ coupe $\mathcal{D}$ transversalement en 2 points. Ces points sont critiques pour $f_1|_{\mathcal{D}}$. En particulier, l'ensemble critique de $f_1|_{\mathcal{D}}$ contient plus que deux points. Les $f_i|_{\mathcal{D}}$ agissent sur $\mathcal{D} \setminus \{a'\}$ comme des polynômes permutables. Ces polynômes doivent être conjugués à $\pm\tilde{T}_{d_i}$. Soit x une coordonnée de $\mathcal{D} \setminus \{a'\}$ telle que $f_i|_{\mathcal{D}} = \pm\tilde{T}_{d_i}x$. On sait que $\pm\tilde{T}_{d_1}$ a $d_1 - 1$ points critiques dans $\mathbb{C}$. Par conséquent, $\#(f_1|_{\mathcal{D}})^{-1}\{c, d\} \leq d_1 - 1$. On déduit que $\{c, d\} = \{x = \pm 2\}$ et $(f_1|_{\mathcal{D}})^{-1}\{c, d\} \setminus \{c, d\}$ est l'ensemble critique de $f_1|_{\mathcal{D}\cap\mathbb{C}^2}$. Ceci montre que $\mathcal{E}_2$ ne peut pas couper $\mathcal{D}$ transversalement comme $\mathcal{E}_{-2}$; elle est tangente à $\mathcal{D}$. Comme $f_1\mathcal{E}_{\pm 2} = \mathcal{E}_{\pm 2}$, on a $f_1\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_2$ et $f_1\mathcal{E}_{-2} = \mathcal{E}_{-2}$. Soient $\nu := \mathcal{D} \cap \mathcal{E}_2$, $b \in J := (f_1|_{\mathcal{D}})^{-1}\nu \setminus \{\nu\}$ et $H := \overline{f_1^{-1}\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}}$. D'après le corollaire 2, $\deg H = d_1 - 1$, $\mathrm{mult}(H \cap \mathcal{D}, a') = d_1 - 1$. On sait que $\mathrm{mult}(f_1|_{\mathcal{D}}, b) = 1$ car $b \notin (f_1|_{\mathcal{D}})^{-1}\{c, d\}$. Comme $\{z_1 = b\} \subset \mathcal{C}_1$, $\mathrm{mult}(f_1, b) \geq 2$. Donc H passe par b. Comme $\#J = d_1 - 1 = \deg H$, H coupe $\mathcal{D}$ transversalement en b. Ceci contradicte le lemme 6.

□

Proposition 5 *Les conditions 3, 3' ne sont pas réalisées simultalement.*

Preuve. Supposons que 3, 3' sont vraies. D'après le corrollaire 2, il existe une courbe invariante $\mathcal{D}$ tangente à $\{w_0 = 0\}$ en exactement deux points a et a'

telle que $\overline{f_i^{-1}\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}} = \mathcal{C}_i$. Cette courbe $\mathcal{D}$ est de degré 4, il est une courbe irréductible ou une réunion de deux courbes de degré 2 qui sont tangentes à $\{w_0 = 0\}$ en a et en a'. On a $\deg\mathcal{C}_i = 2(d_i - 1)$ et $\mathrm{mult}(\mathcal{C}_i \cap \mathcal{D}, a) = \mathrm{mult}(\mathcal{C}_i \cap \mathcal{D}, a') = d_i - 1$. Notons S l'ensemble des singularités de $\mathcal{D}$. Quitte à remplacer f_i par f_i^n, on peut supposer que $d_i >> N$ où N est le nombre de singularités de $\mathcal{D}$ compté avec les multiplicités.

Cas 1. Supposons que $\mathcal{D}$ est irréductible. Comme elle est invariante, elle est l'image d'un $\mathbb{P}^1$ ou d'un tore par une application holomorphe [4]. L'ensemble exceptionnel de $f_1|_{\mathcal{D}}$ contient au moins deux points a et a'. Cette courbe n'est pas l'image d'un tore. De plus, pour une certaine coordonnée x de $\mathcal{D} \simeq \mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $f_1|_{\mathcal{D}} = x^{\pm d_1}$ et $\{a, a'\} = \{x = 0, \infty\}$. Soient $b \in S$, $I :\, = (f_1|_{\mathcal{D}})^{-1}S \setminus S$, $J :\, = (f_1|_{\mathcal{D}})^{-1}b \setminus S$ et $K :\, = \mathcal{D} \cap \mathcal{C}_1 \setminus \{a, a'\}$. Alors $J \subset I \subset K$, $\#J \geq d_1 - N > 0$ et $f_1|_{\mathcal{D}}$ est injective au voisinage de b. Le lemme 8 (appliqué à f_1 au point $z \in J$) montre que dans un petit voisinage V de b, $\mathcal{D} \cap V$ possède au moins deux composantes. D'où $f_1(S) \subset S$ et b est prépériodique. Comme $\deg\mathcal{D} = 4$, il y a des cas suivants:

a. $\mathcal{D} \cap V$ est la réunion de 2 courbes A_1 singulière, A_2 lisse; A_2 coupe la droite tangente de A_1 transversalement en b et $S = \{b\}$. Le point b est donc fixe. Comme $f_1|_{\mathcal{D}} = x^{\pm d_1}$, b est répulsif. Les deux valeurs propres de f_1 en b sont égales à $\pm d_1$. Dans un système de coordonnées locale (x_1, x_2), f_1 s'écrit sous la forme normale $f_1(x_1, x_2) = (\pm d_1 x_1 + c x_2, \pm d_1 x_2)$. Cette application ne possède aucune courbe invariante singulière en b. C'est contradiction.

b. Il existe un $b \in S$ tel que $\mathcal{D} \cap V$ est la réunion de 2 courbes lisses tangentes en b et $S \neq \{b\}$. Alors $J \subset K \setminus J'$ où $J' :\, = (f|_{\mathcal{D}})^{-1}b' \setminus S$, $b' \in S$ et $b' \neq b$. Comme $f_1|_{\mathcal{D}} = x^{\pm d_1}$, $\#J \geq 2d_1 - N$ et $\#J' \geq 2d_1 - N$ et donc $\#K \geq 4d_1 - 2N$. Par conséquent, il existe $d \in J$ tel que $\mathrm{mult}(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{D}, d) = 2$ car $\deg\mathcal{C}_1 = 2d_1 - 2$. Comme $f_1|_{\mathcal{D}} = x^{\pm d_1}$ est injective dans un petit voisinage U de d, $\mathcal{C}_1 \cap U = \overline{f_1^{-1}\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}} \cap U$ est la réunion de deux courbes que coupent $\mathcal{D}$ transversalement en d. Ceci contradicte le lemme 6.

c. $S = \{b\}$ et $\mathcal{D} \cap V$ est la réunion de 3 courbes lisses qui se coupent transversalement. Alors b est fixe pour f_1 et $f_1|_{\mathcal{D}}$. Il est répulsif car $(f_1|_{\mathcal{D}})'(b) = \pm d_1$ suivant chaque direction tangente de $\mathcal{D}$ en b. On a $\#J = 3(d_1 - 1)$. Il existe donc un $c \in J \subset \mathcal{C}_1$ tel que $\mathrm{mult}(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{D}, c) \leq 2$ car $J \subset K = \mathcal{D} \cap \mathcal{C}_1 \setminus \{a, a'\}$ et $\deg\mathcal{C}_1 = 2(d_1 - 1)$. Soient U un petit voisinage de c et $B :\, = f_1(\mathcal{D} \cap U)$. Comme $\mathrm{mult}(f_1, c) \geq 2$ et $\mathrm{mult}(f_1|_{\mathcal{D}}, c) = 1$, on a $f_1^{-1}B \cap U \not\subset \mathcal{D}$. Ceci implique que $f_1^{-1}(\mathcal{D} \cap V) \cap U$ contient au moins 3 courbes. Ceci contradicte le fait que $\mathrm{mult}(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{D}, c) \leq 2$.

d. $\#S = 3$ et au voisinage de chaque point $b \in S$, $\mathcal{D}$ est la réunion de 2 courbes lisses qui se coupent transversalement. On a $\#I \geq 6(d_1 - 1) - 2$. Il existe un $b \in S$ et un $c \in (f_1|_{\mathcal{D}})^{-1}b$ tels que $\mathrm{mult}(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{D}, c) = 1$. Soient U un petit voisinage de c et $B := f_1(\mathcal{D} \cap U)$. Comme $\mathrm{mult}(f_1, c) \geq 2$ et $\mathrm{mult}(f_1|_{\mathcal{D}}, c) = 1$, $f_1^{-1}B \cap U \not\subset \mathcal{D}$. Ceci implique que $f_1^{-1}(\mathcal{D} \cap V) \cap U$ contient au moins 2 courbes incluses dans $\mathcal{C}_1$. C'est contradiction car $\mathrm{mult}(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{D}, c) = 1$.

<u>*Cas 2*</u>. Supposons que $\mathcal{D}$ est la réunion de deux courbes A et A' de degré 2 avec $\mathrm{mult}(A \cap \{w_0 = 0\}, a) = \mathrm{mult}(A' \cap \{w_0 = 0\}, a') = 2$. Remarquons que les f_i agissent sur $A \setminus \{a\} \simeq \mathbb{C}$ comme des polynômes de degrés d_i. Par conséquent, $f_1|_A$ est égale à x^{d_1} ou $\pm\tilde{T}_{d_1}x$ pour une certaine coordonnée x de $A \setminus \{a\}$. Soient $I := A \cap A'$, $B := \overline{f_1^{-1}A \setminus A}$ et $B' := \overline{f_1^{-1}A' \setminus A'}$. Alors B' passe par $J := (f_1|_A)^{-1}I \setminus I$. D'après le corrollaire 2, $\deg B = \deg B' = d_1 - 1$. On a $\#J \leq 2(d_1 - 1)$. On remarque que $3 \leq \#I \leq 4$.

Supposons que $f_1|_A = x^{d_1}$. Il y a au moins 2 points $b, c \in I$ où $f_1|_A$ est régulière. Soit $z \in K := (f_1|_A)^{-1}\{b, c\} \setminus I$. On a $\mathrm{mult}(f_1, z) \geq 2$, $\mathrm{mult}(f_1|_A, z) = 1$. Donc B passe par z. C'est contradiction car $\deg B = d_1 - 1$, $\mathrm{mult}(B \cap A, a) = d_1 - 1$ et $\#K \geq 2(d_1 - 1) - 2$.

Supposons maintenant que $f_1|_A$ est égale à $\pm\tilde{T}_{d_1}$. Comme $\#J \leq 2(d_1 - 1)$, I contient nécessairement deux points b, c où $x = \pm 2$ et un autre point fixe d de f_1. Comme ci-dessus, on montre facilement que B coupe A transversalement en $d_1 - 1$ points de $D := (f_1|_A)^{-1}d \setminus \{d\}$; B' coupe A transversalement en $2(d_1 - 1)$ points de D et de $F := (f_1|_A)^{-1}\{b, c\} \setminus \{b, c\}$; $B \cap A = D \cup \{a\}$ et $B \cap F = \emptyset$. Par conséquent, $\mathrm{mult}(f_1, v) = \mathrm{mult}(f_1|_A, v) = 2$ pour tout $v \in F$. D'après le lemme 7 (appliqué à f_1 en v), $\mathrm{mult}(A \cap A', b) \neq 2$ et $\mathrm{mult}(A \cap A', c) \neq 2$. Alors A et A' sont tangentes en d. Ceci contradicte le lemme 7 appliqué à f_1 en un point de D.

□

6 Preuve du théorème 1: deuxième cas

Dans ce paragraphe, on suppose que $f_i|_\infty = [w_1^{d_i} : w_1^{d_i}\tilde{T}_{d_i}(w_2/w_1)]$ (*voir* l'introduction). Comme dans le paragraphe précédent, on utilise la proposition 3 et le corollaire 2 en $a := [0 : 0 : 1]$. Quitte à remplacer f_i par f_i^n et à changer les coordonnées, l'une des conditions suivantes sera vraie:

1. $f_{i1} = z_1^{d_i}$;

2. $f_{i1} = \tilde{T}_{d_i} z_1$;

3. $f_{i1} = z_2^{d_i/2} \tilde{T}_{d_i}(z_1/\sqrt{z_2}) + \Xi_i$ où $\Xi_i = \sum_{k+2l<d_i} b_{ikl} z_1^k z_2^l$.

Soient $b := [0:1:2]$ et $c := [0:1:-2]$.

Proposition 6 *Supposons que d_i est impair. Il existe une courbe $\mathcal{D}$ réductible, invariante par f_1 et f_2, passant par a, b et c telle que* $\mathrm{mult}(\mathcal{D} \cap \{w_0 = 0\}, a) = 2$*,* $\mathrm{mult}(\mathcal{D} \cap \{w_0 = 0\}, b) = \mathrm{mult}(\mathcal{D} \cap \{w_0 = 0\}, c) = 1$ *et* $\overline{f_i^{-1}\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}} = \mathcal{C}_i$*. De plus,* $\mathrm{mult}(f_i, \mathcal{C}_i) = 2$ *et* $\mathrm{mult}(\mathcal{C}_i \cap \{w_0 = 0\}, d) = 1$ *pour tout $d \in \mathcal{C}_i \cap \{w_0 = 0\}$ et $d \neq a$.*

Preuve. On peut supposer que $i = 1$. Soient U un voisinage suffisamment petit de $\{w_0 = 0\}$ et A_p les composantes irréductibles de $\mathcal{C}_1 \cap U$ qui ne passent pas par a. Remarquons que b et c sont fixes et que l'ensemble critique de $f_1|_\infty$ est égal à $I \cup \{a\}$ où $I := (f_1|_\infty)^{-1}\{b, c\} \setminus \{b, c\}$. D'après le lemme 4, A_p coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement en un point de I et $\mathrm{mult}(f_1, A_p) = 2$. D'après la proposition 1, il existe $(n, m) \neq (n', m')$ tels que $f_1^n f_2^m A_p = f_1^{n'} f_2^{m'} A_p$. Ceci implique $f_1^n f_2^m (f_1 A_p) = f_1^{n'} f_2^{m'} (f_1 A_p)$. D'après le lemme 9, $f_1 A_p$ est la variété stable de f_1 et f_2 en b ou c. Posons $\mathcal{D}'$ la courbe algébrique invariante par f_1 et f_2 qui contient les $f_1 A_p$.

Si la condition 1 ci-dessus est vraie, $\mathcal{D}'$ ne passe pas par a. Il suffit de poser $\mathcal{D} := \mathcal{D}' \cup \{w_1 = 0\}$.

Si la condition 2 ci-dessus est vraie, $\mathcal{D}'$ ne passe pas par a. Il suffit de poser $\mathcal{D} := \mathcal{D}' \bigcup_{q=1}^{d_1-1} \{w_1 = \alpha_q\}$ où $\{\alpha_q\} := \tilde{T}_{d_1}^{-1}\{\pm 2\} \setminus \{\pm 2\}$ est l'ensemble critique de $\tilde{T}_{d_1}$.

Lorsque la condition 3 ci-dessus est vraie, on pose $\mathcal{D} := \mathcal{D}'$ si $\mathcal{D}'$ passe par a, sinon $\mathcal{D}$ est la réunion de $\mathcal{D}'$ avec la courbe algébrique contenant la courbe invariante passant par a qui est décrite dans le corollaire 2. Dans le premier cas, comme $\mathcal{D}$ est invariante, elle n'est pas irréductible car l'ensemble exceptionnel de $f_1|_\mathcal{D}$ ne peut pas contenir trois points a, b et c. On a $\overline{f_1^{-1}\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}} \subset \mathcal{C}_1$ et $\deg \overline{f_1^{-1}\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}} = 2d_1 - 2 \geq \deg \mathcal{C}_1$. D'où $\overline{f_1^{-1}\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}} = \mathcal{C}_1$ et $\mathrm{mult}(f_1, \mathcal{C}_1) = 2$.

$\square$

Proposition 7 *Supposons que d_i est pair. Il existe une droite $\mathcal{E}$ invariante par f_1, f_2, passant par b. La courbe $\overline{f_i^{-1}\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}}$ contient une droite $\mathcal{E}'$ passant par c. La réunion des composantes de $\mathcal{C}_i$ qui ne passent pas par a, est égale à*

$H := \overline{f_i^{-1}(\mathcal{E} \cup \mathcal{E}') \setminus (\mathcal{E} \cup \mathcal{E}')}$. *De plus, H coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement et* $\mathrm{mult}(f_i, H) = 2$.

Preuve. On suppose que $i = 1$. On remarque que $b = f(c)$ est un point fixe et que l'ensemble critique de $f_1|_\infty$ est égal à $I \cup \{a\}$ où $I := (f_1|_\infty)^{-1}\{b, c\} \setminus \{b, c\}$. On utilise les notations de la proposition précédente. Soit A_p une composante telle que $f_1 A_p$ passe par b. On démontre comme dans la proposition précédente que $A := f_1 A_p$ est invariante. D'après les lemmes 4 et 5, $f_1^{-1} A$ contient une courbe $B \not\subset \mathcal{C}_1$ qui coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement en c. Ceci implique que la courbe algébrique irréductible, contenant A (notée $\mathcal{E}$) ne peut pas passer par a car sinon d'après le corollaire 2, $\overline{f_1^{-1}\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}} \subset \mathcal{C}_1$. Alors $\mathcal{E}$ coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement en un seul point. Elle est donc une droite. La courbe algébrique irréductible $\mathcal{E}'$ qui contient B coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement en un point unique c. Elle est également une droite. Utiliser les lemmes 4 et 5, on montre que $H \subset \mathcal{C}_1$, H coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement et $\mathrm{mult}(f_i, H) = 2$.

$\square$

Lemme 10 *Si la condition 3 est vraie, le couple (f_1, f_2) se trouve dans l'exemple 4 à une classe de conjugaison près.*

Preuve. On considère le cas où d_1 est impair. Le cas contraire sera traité de même manière. Soit $\mathcal{D}$ la courbe définie dans la proposition 6. Quitte à remplacer f_1 par f_1^n, on peut supposer que $d_1 >> N$ où N est le nombre des singularités de $\mathcal{D}$ comptées avec leurs multiplicités.

<u>*Cas 1*</u>. Si $\mathcal{D}$ est la réunion d'une courbe R de degré 3 et une droite $\mathcal{E}$. La courbe R coupe $\{w_0 = 0\}$ en deux points qui appartiennent à l'ensemble exceptionnel de $f_1|_R$. Soit x une coordonnée de $R \setminus \{a\} \simeq \mathbb{C}$ telle que $f_1|_R = x^{\pm d_1}$. Posons $A := \overline{f_1^{-1}\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}}$ et $B := \overline{f_1^{-1} R \setminus R}$. Comme $\deg A = (d_1 - 1)/2$, $\# A \cap R \leq 3(d_1 - 1)/2$. Donc $\#(f|_R)^{-1}(\mathcal{E} \cap R) \setminus (\mathcal{E} \cap R) \leq 3(d_1 - 1)/2$. On obtient $\#\mathcal{E} \cap R = 1$ car tout point de $R \setminus \{w_0 = 0\}$ possèdent au moins $d_1 - N$ préimages sur R et $d_1 >> N$. Alors $\mathcal{E}$ est tangente à R. Soit $d := \mathcal{E} \cap R$. Comme $f_1|_R = x^{\pm d_1}$, la valeur propre de f_1 en d suivant la direction tangente à R (c.à.d. la direction $\mathcal{E}$) est égale à $\pm d_1$. Par conséquent, $f_1|_\mathcal{E}$ est régulier sur $(f_1|_\mathcal{E})^{-1} d$ car $f_1|_\mathcal{E}$ est conjugué à z^{d_1} ou $\pm \tilde{T}_{d_1}$. De plus, $B \subset \mathcal{C}_1$ passe par $I := (f_1|_\mathcal{E})^{-1} d \setminus \{d\}$. Donc $\mathrm{mult}(f_1, v) \geq 2$ pour tout $v \in I$. Ceci implique que A passe par v. C'est contradiction car $\deg A = (d_1 - 1)/2$ et $\# I = d_1 - 1$.

Cas 2. La courbe $\mathcal{D}$ contient une courbe rationnelle R tangente à $\{w_0 = 0\}$ en a. Dans ce cas, d'après le corollaire 2, il existe des nombres u et v tels que $R = \{z_1^2 - 4z_2 + uz_1 + v = 0\}$. Désormais, on utilise les nouvelles coordonnées $(z_1, z_2') : = (z_1, z_2 - uz_1/4 - v/4)$ et sur ces coordonnées $f_i = (f_{i1}', f_{i2}')$. La condition 3 reste valable pour (z_1, z_2') et $R = \{z_1^2 - 4z_2' = 0\}$. D'après le corollaire 2, appliqué au point a, $\overline{f_i^{-1}R \setminus R} \subset \mathcal{C}_i$. De plus, la multiplicité de f_i sur cet ensemble est égale à 2. Par conséquent, il existe des polynômes R_i tel que ${f_{i1}'}^2 - 4f_{i2}' = (z_1^2 - 4z_2')R_i^2(z_1, z_2')$. Soit π l'application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ avec $\pi(x, y) = (x + y, xy)$ (*voir* l'exemple 4). Posons $h_i : = (h_{i1}, h_{i2}) = f_i \circ \pi$. On a $h_{i1}^2 - 4h_{i2} = (x - y)^2 R_i^2(x + y, xy)$. Ceci montre qu'il existe des applications F_i telles que $h_i = \pi \circ F_i$. Les F_i sont définies par:

$$F_i = (F_{i1}, F_{i2}) = \left(\frac{h_{i1} \pm (x - y)R_i(x + y, xy)}{2}, \frac{h_{i2} \mp (x - y)R_i(x + y, xy)}{2}\right).$$

On peut choisir les signes tels que $F_1 \circ F_2 = F_2 \circ F_1$. Remarquons que $\tilde{T}_{d_i}(a_1 + a_2) \circ \pi = a_1^{d_i} + a_2^{d_i}$. On vérifie facilement que $h_{i1} = x^{d_i} + y^{d_i} + \mathrm{o}(|\nu|^{d_i})$ et $h_{i2} = x^{d_i} y^{d_i} + \mathrm{o}(|\nu|^{d_i})$ où $\nu : = (x, y)$. On a $F_{i1} = x^{d_i} + \mathrm{o}(|\nu|^{d_i})$ et $F_{i2} = y^{d_i} + \mathrm{o}(|\nu|^{d_i})$. On a également $F_{i1}(x, y) = F_{i2}(y, x)$. Utiliser le paragraphe précédent pour le couple (F_1, F_2) on montre que ce couple est conjugué à un des couples des exemples 1-4. Comme aucune composante de $f_i\mathcal{C}_i$ n'est incluse dans $\mathcal{C}_i$, F_i vérifie une propriété analogue. De plus, $F_i|_\infty = [x^{d_i} : y^{d_i}]$. Par conséquent, il existe un automorphisme σ de $\mathbb{P}^2$ qui préserve l'infini et vérifie $\sigma^{-1} \circ F_i \circ \sigma = (\pm\tilde{T}_{d_i}x, \pm\tilde{T}_{d_i}y)$ ou $(\pm\tilde{T}_{d_i}y, \pm\tilde{T}_{d_i}x)$. Quitte à remplacer f_i par f_i^4, on peut supposer que $\sigma^{-1} \circ F_i \circ \sigma = (\tilde{T}_{d_i}x, \tilde{T}_{d_i}y)$. Comme $F_i|_\infty = [x^{d_i} : y^{d_i}]$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) = (\alpha x + \beta, \alpha' y + \beta')$. Comme $F_{i1}(x, y) = F_{i2}(y, x)$, $\sigma_1^{-1} \circ \tilde{T}_{d_i} \circ \sigma_1 = \sigma_2^{-1} \circ \tilde{T}_{d_i} \circ \sigma_1$. Comme l'ensemble de Julia de $\tilde{T}_{d_i}$ est $[-2, 2]$, $\sigma_1\{\pm 2\} = \sigma_2\{\pm 2\}$. Ceci implique que $\beta = \beta'$ et $\alpha = \pm\alpha'$. On montre facilement que $\alpha = -\alpha'$ est possible seulement si les d_i sont impairs et $\beta = \beta' = 0$. Dans ce cas, rien n'est changé si l'on remplace α' par α. On peut supposer que $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$. Il est clair maintenant que (f_1, f_2) est conjugué à un couple construit dans l'exemple 4.

$\square$

Lemme 11 *Si d_i est impair et si la condition 3 est fausse, alors la condition 1 est vraie et $\mathcal{D}$ est la réunion de trois droites qui se coupent en un point.*

Preuve. On peut supposer que $i = 1$. Supposons que la condition 2 est vraie. Alors $\mathcal{D}$ est la réunion de $\mathcal{F} : = \{z_1 = 2\}$, de $\mathcal{F}' = \{z_1 = -2\}$ et d'une courbe invariante R de degré 2 passant par $\{b, c\}$ qui est irréductible ou une réunion de deux droites. Au moins l'une de deux droites $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ coupe R transversalement en deux points. Supposons que c'est $\mathcal{F}$. Notons u, v ces deux points. Quitte à remplacer f_1 par f_1^2, on peut supposer que u, v sont fixes. La valeur propre de f_1 en u suivante la direction tangente à R est égale à d_1^2. Si R est irréductible $f_1|_R$ possède deux points exceptionnels; elle est donc conjuguée à $x^{\pm d_1}$ qui n'a pas de point fixe avec la valeur propre d_1^2; c'est impossible.

Alors R est la réunion de deux droites L et L'. Posons $A := \overline{f_1^{-1}\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}}$, $A' := \overline{f_1^{-1}\mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}'}$, $B := \overline{f_1^{-1}L \setminus L}$ et $B' := \overline{f_1^{-1}L' \setminus L'}$. Comme $\deg(A \cup A' \cup B) = 3(d_1 - 1)/2$, $(A \cup A' \cup B) \cap L' \subset (f_1|_{L'})^{-1}(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}' \cup L) \cap L'$ et $f_1|_{L'}$ est conjugué à x^{d_1} ou $\pm\tilde{T}_{d_1}$ on a $\#(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}' \cup L) \cap L' \leq 2$. Ceci implique que $\mathcal{F}'$, L et L' se coupent en un point r car $\mathcal{F}$ coupe $R = L \cup L'$ en deux points. D'après la condition 2, r est fixe et les deux valeurs propres de f_1 en r suivant L et L' sont $\pm d_1^2$. D'où $f_1|_{\mathcal{F}'}$ est conjugué à $\pm\tilde{T}_{d_1}$. Comme $\deg B = \deg B' = (d_1 - 1)/2$ et $\#(f_1|_{\mathcal{F}'})r \setminus \{r\} = (d_1 - 1)/2$, on a $B \cap \mathcal{F}' = B' \cap \mathcal{F}' = (f_1|_{\mathcal{F}'})^{-1}r \setminus \{r\}$. Soit $s \notin (f_1|_{\mathcal{F}'})^{-1}r$ un point critique de $f_1|_{\mathcal{F}'}$. Alors A, A', B, B' ne passent pas par s. C'est contradiction car $s \in \mathcal{C}_1 = A \cup B \cup A' \cup B'$.

Si la condition 1 est vraie, $\mathcal{D}$ est la réunion de $\mathcal{F} := \{w_1 = 0\}$ et une courbe invariante R passant par b, c. Les points de $\mathcal{F} \cap R$ sont exceptionnels pour $f_1|_R$. Ceci implique que R est une réunion de deux droites L et L'. Soient $d := \mathcal{F} \cap L$ et $v := L \cap L'$, $A := \overline{f_1^{-1}L' \setminus L'}$. Comme $\deg A = (d_1 - 1)/2$, $\#(f_1|_L)^{-1}v \setminus \{v\} \leq (d_1 - 1)/2$. Ceci implique que v est exceptionnel pour $f_1|_L$ car $f_1|_L$ est conjugué à $x^{\pm d_1}$. Donc $v = d$.

$\square$

Lemme 12 *Si d_i est pair et si la condition 3 est fausse, alors la condition 1 est vraie. De plus, les trois droites $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ et $\{w_1 = 0\}$ se coupent en un point.*

Preuve. On peut supposer que $i = 1$. Supposons que la condition 2 est vraie. Soient $\mathcal{F} := \{z_1 = 2\}$, $\mathcal{F}' := \{z_1 = -2\}$ et $d := \mathcal{E} \cap \mathcal{F}$. Alors $\mathcal{F}$ est invariante et d est fixe. Remarquons que $f_1|_{\mathcal{E}}$ est égale à $\tilde{T}_{d_1} z_1$. Soit $v := \mathcal{E}' \cap \mathcal{E}$. Comme $\deg f_1^{-1}\mathcal{E}' = d_1/2$, $\#(f_1|_{\mathcal{E}})^{-1}v \leq d_1/2$. Donc la première coordonnée de v est -2. Pour tout $u \in (f_1|_{\mathcal{E}})^{-1}v$, $\mathrm{mult}(f_1, u) > 2 = \mathrm{mult}(f_1|_{\mathcal{E}}, u)$ car $f_1^{-1}\mathcal{E}' \subset \mathcal{C}_1$ et $\{z_1 = u\} \subset \mathcal{C}_1$ passent par u. Par conséquent, $A := \overline{f_1^{-1}\mathcal{E} \setminus (\mathcal{E} \cup \mathcal{E}')}$ passe par u. Mais $\deg A = d_1/2 - 1$ et $\#(f_1|_{\mathcal{E}})^{-1}v \setminus \{v\} = d_1/2$. C'est impossible. Alors la condition 1 est vraie. Posons $\mathcal{F} := \{w_1 = 0\}$,

$d := \mathcal{E} \cap \mathcal{F}$. Alors d et b appartiennent à l'ensemble exceptionnel de $f_1|_{\mathcal{E}}$. Par conséquent, $f_1|_{\mathcal{E}}$ est conjugué à $z_1^{d_1}$. Posons $A' := f_1^{-1}\mathcal{E}'$. Comme $\deg A' = d_1/2$, $\#(f_1|_{\mathcal{E}})^{-1}(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}') \leq d_1/2$. Par conséquent, d est exceptionnel pour $f_1|_{\mathcal{E}}$ et donc $\mathcal{E}'$ passe par d car $\mathcal{E}' \subset f_1^{-1}\mathcal{E}$.

□

Proposition 8 *Si la condition 3 est fausse, le couple (f_1, f_2) est conjugué à un couple d'applications polynomiales homogènes.*

Preuve. On considère le cas où d_1 est pair, le cas contraire sera traité de même manière. D'après le lemme 12, on peut choisir un système de coordonnées tel que $\mathcal{D} = \{2z_1 - z_2 = 0\}$, $\mathcal{D}' = \{2z_1 + z_2 = 0\}$. Soit $0 \leq \delta < d_1$ minimal tel que:

$$f_1 = (f_{11}, f_{12}) = (z_1^{d_1}, Q + \Delta + \mathrm{o}(|z|^\delta))$$

où $Q := z_1^{d_1}\tilde{T}_{d_1}(z_2/z_1)$ et Δ_1 est homogène de degré $\delta \leq d_1 - 1$. On montrera que $\delta \leq d_1/2+1$. Supposons que $\delta > d_1/2+1$. Par la définition de Q, il existe des polynômes homogènes R et S vérifiant $2z_1^{d_1} - Q = (2z_1 - z_2)(2z_1 + z_2)R^2$ et $2z_1^{d_1} + Q = S^2$. D'après la proposition 7, il existe deux polynômes R' et S' vérifiant $2f_{11} - f_{12} = (2z_1 - z_2)(2z_1 + z_2)R'^2$ et $2f_{11} + f_{12} = S'^2$. On peut écrire $R' = R + \Delta_R + \mathrm{o}(|z|^{\delta_R})$ et $S' = S + \Delta_S + \mathrm{o}(|z|^{\delta_S})$ où Δ_R et Δ_S sont homogènes de degrés $\delta_R := \delta - d_1/2 - 1$ et $\delta_S := \delta - d_1/2$. On en déduit que $\Delta = -2(2z_1 - z_2)(2z_1 + z_2)R\Delta_R = 2S\Delta_S$. Comme $(2z_1 - z_2)(2z_1 + z_2)R$ et S n'ont pas de facteur commun, Δ est divisible par $(2z_1 - z_2)(2z_1 + z_2)RS$. D'autre part, $\deg \Delta < \deg[(2z_1 - z_2)(2z_1 + z_2)RS]$. Donc $\Delta = 0$. C'est contradiction car δ est minimal. Alors $\delta \leq d_1/2+1$. De même, on montre que f_1^n ne contient pas de mononôme de degré entre $d_1^n/2 + 2$ et $d_1^n - 1$. D'après le lemme 3, f_1 est homogène. De même manière, on montre que $f_1 \circ f_2$ est homogène. D'où f_2 est homogène.

□

7 Preuve du théorème 1: troisième cas

Dans ce paragraphe, on suppose que les $f_i^n|_\infty$ ne sont pas conjugués ni à $z^{\pm d_i^n}$ ni à $\pm\tilde{T}_{d_1^n}$ (*voir* l'introduction). D'après le corollaire 2, $d_1^n \neq d_2^m$ pour tout $(n, m) \neq 0$. D'après [2], $f_i|_\infty$ définissent des revêtements de $\mathcal{O}$ dans lui-même, où $\mathcal{O} = (\mathbb{P}^1, n)$ est l'un des orbifolds $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3, \mathcal{O}_4$ qui seront décrits plus tard. Il existe également un tore complexe $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Gamma$ de dimension 1, des applications linéaires $\Lambda_i(x) = a_i x + b_i$ préservant le groupe discret Γ et une fonction elliptique $F : \mathbb{T} \to \mathbb{P}^1$ tels que $f_i \circ F = F \circ \Lambda_i$. Les nombres $|a_i|$ sont entiers, $d_i = |a_i|^2$ et tout point périodique de f_i est répulsif. En tout point fixe de f_i, la valeur propre de f_i est égale à a_i. L'orbifolds $\mathcal{O}_i$ est défini par le couple $(\mathbb{P}^1, n_i)$, où n_i est une application de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{Z}_+$ qui est égale à 1 sauf sur $s = 3$ ou $s = 4$ points. On note α_j ces s points. Alors:

1. Pour $\mathcal{O}_1$, $s = 3$ et $n_1(\alpha_j) = 3$ pour $j = 1, 2, 3$. Si d_i n'est pas divisible par 3, alors $d_i = 1$ modulo 3 car $d_i = |a_i|^2$. Les α_j sont tous périodiques répulsifs pour $f_i|_\infty$ et l'image réciproque de α_j est constitué par l'un des α_k et $(d_i - 1)/3$ autres points; la multiplicité de $f_i|_\infty$ sur chacun de ses points est égale à 3.

Sinon, $f_i(\alpha_1) = f_i(\alpha_2) = f_i(\alpha_3) = \alpha_1$. L'image réciproque de α_j pour $j = 2, 3$ est constitué par $d_i/3$ points de multiplicité 3; celle de α_1 est constitué par les α_j et $d_i/3 - 1$ autres points de multiplicité 3.

2. Pour $\mathcal{O}_2$, $s = 3$ et $n_2(\alpha_1) = 6$, $n_2(\alpha_2) = 3$, $n_2(\alpha_3) = 2$. Si d_i n'est pas divisible par 2 ni par 3, alors $d_i = 1$ modulo 6 car $d_i = |a_i|^2$. Les α_j sont tous fixes répulsifs pour f_i et l'image réciproque de α_1 (resp. α_2 et α_3) est constitué par lui-même et $(d_i - 1)/6$ (resp. $(d_i - 1)/3$ et $(d_i - 1)/2$) autres points de multiplicité 6 (resp. 3 et 2).

Si d_i est divisible par 2 mais non pas par 3, alors $d_i = 4$ modulo 6. Dans ce cas, α_1 et α_2 sont fixes et $f_i(\alpha_3) = \alpha_1$. L'image réciproque de α_3 est constitué par $d_i/2$ points de multiplicité 2; celle de α_2 (resp. α_1) est constitué par lui-même (resp. lui-même et α_3 avec la multiplicité 3) et $(d_i - 1)/3$ (resp. $(d_i - 4)/6$) autres points de multiplicité 3 (resp. 6).

Si d_i est divisible par 3 mais non pas par 2, alors $d_i = 3$ modulo 6. Dans ce cas, α_1 et α_3 sont fixes et $f_i(\alpha_2) = \alpha_1$. L'image réciproque de α_2 est constitué par $d_i/3$ points de multiplicité 3; celle de α_3 (resp. α_1) est constitué par lui-même (resp. lui-même et α_2 avec la multiplicité 2) et $(d_i - 1)/2$ (resp. $(d_i - 3)/6$) autres points de multiplicité 2 (resp. 6).

Si d_i est divisible par 6, $f_i(\alpha_1) = f_i(\alpha_2) = f_i(\alpha_3) = \alpha_1$. L'image réciproque de α_3 (resp. α_2) est constitué par $d_i/2$ (resp. $d_i/3$) points de multiplicité 2 (resp. 3); celle de α_1 est constitué par lui-même, α_3 avec la multiplicité 3, α_2 avec la multiplicité 2 et $d_i/6$ points de multiplicité 6.

3. Pour $\mathcal{O}_3$, $s = 3$ et $n_1(\alpha_1) = 4$, $n_1(\alpha_2) = 4$, $n_1(\alpha_3) = 2$. Si d_i n'est pas divisible par 2, alors $d_i = 1$ modulo 4 car $d_i = |a_i|^2$. Dans ce cas, α_3 est fixe; α_1, α_2 sont périodiques répulsifs. L'image réciproque de α_3 (resp. α_2 ou α_1) est constitué par lui-même (resp. par l'un des α_2 et α_1) et $(d_i - 1)/2$ (resp.

$(d_i - 1)/4)$ autres points de multiplicité 2 (resp. 4).

Sinon, $f_i(\alpha_1) = f_i(\alpha_2) = f_i(\alpha_3) = \alpha_1$. L'image réciproque de α_3 (resp. α_2) est constitué par $d_i/2$ (resp. $d_i/4$) points de multiplicité 2 (resp. 4); celle de α_1 est constitué par lui-même, α_2 avec multiplicité 1, α_3 avec multiplicité 2 et $d_i/4 - 1$ autres points de multiplicité 4.

4. Pour $\mathcal{O}_4$, $s = 4$ et $n_1(\alpha_j) = 2$ pour $j = 1, 2, 3, 4$. Si d_i n'est pas divisible par 2, alors $d_i = 1$ modulo 4 car $d_i = |a_i|^2$. Tous les α_j sont périodiques répulsifs. L'image réciproque de chaque α_j est constitué par l'un des α_k et $(d_i - 1)/2$ autres points de multiplicité 2.

Sinon, $f_i(\alpha_1) = f_i(\alpha_2) = f_i(\alpha_3) = f_i(\alpha_4) = \alpha_1$. L'image réciproque de α_j pour $j = 2, 3, 4$ est constitué par $d_i/2$ points de multiplicité 2; celle de α_1 est constitué par les α_j avec la multiplicité 1 et $d_i/2 - 2$ autres points de multiplicité 2.

Remarquons que dans tous les cas, on a

$$\sum_j \frac{n(\alpha_j) - 1}{n} = 2.$$

Quitte à remplacer f_i par f_i^n, on peut supposer que tout α_j périodique est fixe. Soit r_i le nombre des α_j qui sont fixes par f_i. Alors $r_i = 1$, 2 ou s.

Proposition 9 *Si $r_i = s$, il existe une courbe réductible L de $\mathbb{P}^2$ invariante par f_1 et f_2. Cette courbe coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement en $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ et elle est une réunion de courbes de degrés 1 ou 2. De plus, $\overline{f_i^{-1} L \setminus L} = \mathcal{C}_i$ et* $\mathrm{mult}(f_i, A)$ *égale à la multiplicité de $f_i|_\infty$ en chaque point de $A \cap \{w_0 = 0\}$ pour toute composante A de $\mathcal{C}_i$.*

Preuve. On peut supposer que $i = 1$. Soit U un voisinage assez petit de $\{w_0 = 0\}$ tel que $\mathcal{C}_1 \cap U$ soit la réunion des courbes irréductibles A_p; chaque A_p coupe $\{w_0 = 0\}$ en un seul point β_p. D'après le lemme 4, β_p appartient à l'ensemble critique de $f_1|_\infty$. En chaque point α_j, il existe une courbe lisse, stable par f_1. Fixons un A_p. Soit $\alpha_j = f_1(\beta_p)$. On choisit un système de coordonnées local (x, y) pour un voisinage de α_j tel que $\alpha_j = (0, 0)$, $\{x = 0\} = \{w_0 = 0\}$ soit la variété instable, $(y = 0)$ soit la variété stable et tel que $f_i(x, y) = (x^{d_i} + \mathrm{o}(x^{d_i}), a_i y + xyg_i(x, y))$. Comme $|a_i|^2 = d_i$ et $d_1^n \neq d_2^m$, $a_1^n a_2^m \neq a_1^{n'} a_2^{m'}$ pour tous $(n, m) \neq (n', m')$. On va montrer que $f_1 A_p$ est la variété stable de f_1 en α_j. Il est clair que $f_1 A_p \neq \{x = 0\}$. D'après la proposition 1, $f_1^n f_2^m A_p = f_1^{n'} f_2^{m'} A_p$ pour des couples $(n, m) \neq (n', m')$. D'où

$f_1^n f_2^m(f_1 A_p) = f_1^{n'} f_2^{m'}(f_1 A_p)$. D'après le lemme 9, $f_1 A_p$ est la variété stable car elle passe par α_j.

Soit $L := f_1(\mathcal{C}_1)$. Comme les variétés stables coupent $\{w_0 = 0\}$ transversalement, L coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement en les α_j. Donc $\deg L = s$. Alors A_p sont les composantes irréductibles de $\overline{f_1^{-1} L \setminus L} \cap U$. Soient $\beta_p := A_p \cap \{w_0 = 0\}$ et $\alpha_{j_p} := f_1(\beta_p)$ avec $1 \leq j_p \leq s$. Posons $m_p := \mathrm{mult}(f_1, A_p)$ et $n_p := \mathrm{mult}(A_p \cap \{w_0 = 0\}, \beta_p)$. D'après le lemme 5, $\sum_{j_p = j} m_p n_p = d_1 - 1$, $\sum m_p n_p = s(d_1 - 1)$ et $m_p \leq \mathrm{mult}(f_1|_\infty, \beta_p) = n(\alpha_{j_p})$. On sait que $\deg \mathcal{C}_1 = 2(d_1 - 1)$ compté avec les multiplicités. D'après le lemme 4, $\sum (m_p - 1) n_p = 2(d_1 - 1)$. D'où:

$$\begin{aligned} \sum_p (m_p - 1) n_p &= \sum_p \frac{m_p - 1}{m_p} m_p n_p \leq \sum_p \frac{n(\alpha_{j_p}) - 1}{n(\alpha_{j_p})} m_p n_p \\ &= \sum_j \frac{n(\alpha_j) - 1}{n(\alpha_j)} \sum_{j_p = j} m_p n_p = \sum_j \frac{n(\alpha_j) - 1}{n(\alpha_j)} (d_1 - 1) \\ &= 2(d_1 - 1) \end{aligned}$$

Par conséquent, $m_p = n(\alpha_{j_p}) = \mathrm{mult}(f_1|_\infty, \beta_p)$ et $n_p = 1$ pour tout p. Alors les A_p sont disjointes. Il est clair que $\mathcal{C}_1 = \overline{f_1^{-1} L \setminus L}$ et $\mathrm{mult}(f_1, A)$ est égale à la multiplicité de $f_1|_\infty$ en chaque point de $A \cap \{w_0 = 0\}$ pour toute composante A de $f_1^{-1} L$.

Soit $\mathcal{E}$ une composante de L. Comme $\mathcal{E}$ est invariante par f_1, elle est l'image holomorphe d'un $\mathbb{P}^1$ ou d'un tore [4]. Mais $\mathcal{E}$ n'est pas un tore car l'ensemble exceptionnel de $f_1|_{\mathcal{E}}$ contient $\mathcal{E} \cap \{w_0 = 0\}$. De plus, l'ensemble exceptionnel de $f_1|_{\mathcal{E}}$ contient au plus 2 points et $\mathcal{E}$ coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement. La courbe $\mathcal{E}$ est nécessairement de degré 1 ou 2.

$\square$

Proposition 10 *Si $r_i = 1$, il existe une droite $L \neq \{w_0 = 0\}$ invariante par f_i, passant par α_1. L'ensemble $f_i^{-1} L$ se constitue par L, par des courbes L' et $H \subset \mathcal{C}_i$ (éventuellement réductibles). La courbe L' coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement en $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$; $f_i^{-1} L' = \overline{\mathcal{C}_i \setminus (H \cup L')}$. Pour chaque composante A de $\mathcal{C}_i$,* $\mathrm{mult}(f_i, A)$ *est égale à la multiplicité de $f_i|_\infty$ en chaque point de $A \cap \{w_0 = 0\}$.*

Preuve. On peut supposer que $i = 1$. On considère le cas où $\mathcal{O} = \mathcal{O}_2$. Les autres cas seront traités de même manière.

Soient U, A_p, β_p définies dans la preuve de la proposition 9. Fixons un p tel que $f_1 A_p = \alpha_1$. Comme dans la proposition 9, on montre que $f_1 A_p$ est la variété stable de f_1 en α_1. Soit L la courbe algébrique contenant $f_1 A_p$. L coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement en un point unique α_1. Elle est donc une droite. Soient B_q, C_ν, D_ξ les composantes irréductibles de $\overline{f_1^{-1}L \setminus L} \cap U$ telles que $C_\nu \cap \{w_0 = 0\} = \alpha_2$, $D_\xi \cap \{w_0 = 0\} = \alpha_3$ et $B_q \cap \{w_0 = 0\} =: \beta_q \neq \alpha_2, \alpha_3$. On appele m_q, m_ν, m_ξ les multiplicités de f_1 sur B_q, C_ν, D_ξ et n_q, n_ν, n_ξ les multiplicités de l'intersection de B_q, C_ν, D_ξ avec $\{w_0 = 0\}$.

D'après les lemmes 5 et 4, on a $\sum m_q n_q = d_1 - 6$, $\sum m_\nu n_\nu = 2$, $\sum m_\xi n_\xi = 3$, $\sum (m_q - 1) n_q = 5(d_1/6 - 1)$, $\sum (m_\nu - 1) n_\nu = 1$, $\sum (m_\xi - 1) n_\xi = 2$, $m_q \leq 6$, $m_\nu \leq 2$ et $m_\xi \leq 3$. Donc

$$5\left(\frac{d_1}{6} - 1\right) = \sum (m_q - 1) n_q = \sum \frac{m_q - 1}{m_q} m_q n_q \leq \sum \frac{5}{6} m_q n_q = 5\left(\frac{d_1}{6} - 1\right).$$

D'où $m_q = 6 = \mathrm{mult}(f_1|_\infty, \beta_q)$ et $n_q = 1$. De même, $m_\nu = 2 = \mathrm{mult}(f_1|_\infty, \alpha_2)$, $n_\nu = 1$, $m_\xi = 3 = \mathrm{mult}(f_1|_\infty, \alpha_3)$ et $n_\xi = 1$. Il y a donc $d_1/6 - 1$ composantes B_q; sur chacune B_q la multiplicité de f_1 est égale à 6; il y a une composante C_ν avec la multiplicité 2 et une composante D_ξ avec la multiplicité 3. Ces composantes sont disjointes et coupent $\{w_0 = 0\}$ transversalement. Posons $C := C_\nu$ et $D := D_\xi$. Soit A_p une composante vérifiant $f_1 A_p \cap \{w_0 = 0\} = \alpha_2$. Comme dans la proposition 9, on prouve que $f_1^2 A_p$ est la variété stable de f_1 en α_1. D'où $f_1 A_p = C$. Soient F_η les composantes irréductibles de $f_1^{-1} C \cap U$, $\beta_\eta := F_\eta \cap \{w_0 = 0\}$, $m_\eta := \mathrm{mult}(f_1, F_\eta)$ et $n_\eta := \mathrm{mult}(F_\eta \cap \{w_0 = 0\}, \beta_\eta)$. D'après les lemmes 4 et 5, on a $\sum m_\eta n_\eta = d_1$, $\sum (m_\eta - 1) n_\eta = 2d_1/3$ et $m_\eta \leq 3$. D'où:

$$\frac{2}{3} d_1 = \sum (m_\eta - 1) n_\eta = \sum \frac{m_\eta - 1}{m_\eta} m_\eta n_\eta \leq \sum \frac{2}{3} m_\eta n_\eta = \frac{2}{3} d_1.$$

Ceci implique que $n_\eta = 1$, $m_\eta = 3 = \mathrm{mult}(f_1|_\infty, \beta_\eta)$. Les F_η appartiennent à $\mathcal{C}_1$; chacune est de multiplicité 3 et coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement. La courbe $f_1^{-1} D$ vérifie une propriété analogue.

Alors $f_1^{-1} L' = \overline{\mathcal{C}_1 \setminus (H \cup L')}$ et pour chaque composante A de $\mathcal{C}_1$, $\mathrm{mult}(f_1, A)$ est égale à la multiplicité de $f_1|_\infty$ en chaque point de $A \cap \{w_0 = 0\}$.

□

Proposition 11 *Si $r_i = 2$, alors $\mathcal{O} = \mathcal{O}_2$, $s = 3$. Il existe deux droites L et L' invariantes par f_i; L passe par α_1 et L' passe par α_j avec $j = 2$ ou 3.*

L'image réciproque de L est la réunion de L, d'une droire L'' passant par α_l et d'une autre courbe H où $l \neq 1, j$. L'ensemble $\mathcal{C}_i$ est constitué par L'', H, $\overline{f_i^{-1}L' \setminus L'}$ et $f_i^{-1}L''$. Pour toute composante irréductible A de $\mathcal{C}_i$, $\mathrm{mult}(f_i, A)$ *est égale à la multiplicité de $f_i|_\infty$ en chaque point de $A \cap \{w_0 = 0\}$.*

Preuve. Par la description des orbifolds $\mathcal{O}_m$, on a $\mathcal{O} = \mathcal{O}_2$ et $s = 3$. Si d_i est pair, $j = 2$ et $l = 3$; si d_i est divisible par 3, $j = 3$ et $l = 2$.

Comme dans les propositions 9, 10, on montre qu'il existe une courbe invariante passant par α_1 et α_j. L'image réciproque de cette courbe contient des composantes de $\mathcal{C}_i$, où les multiplicités de f_i sont égales à $n(\alpha_1)$ et $n(\alpha_j)$. Comme $n(\alpha_1) \neq n(\alpha_j)$, cette courbe invariante est réductible. Elle est donc la réunion de deux droites L et L'. On montre tout comme dans les propositions précédentes que $f_i^{-1}L$ contient L'' passant par α_l, $\mathcal{C}_i = L'' \cup H \cup \overline{f_i^{-1}L \setminus L} \cup f_i^{-1}L''$ et $\mathrm{mult}(f_i, A)$ est égale à la multiplicité de $f_i|_\infty$ en chaque point de $A \cap \{w_0 = 0\}$ pour toute composante A de $\mathcal{C}_i$.

□

Lemme 13 *Si $r_i = 1$, la courbe L' coupe L en un point unique a. Si $r_i = 2$, les trois droites L, L', L'' se coupent en un point.*

Preuve. On peut supposer que $i = 1$. Supposons que $r_1 = 1$. Comme L est invariante par f_1, f_2L est invariante par f_1. D'autre part, f_2L coupe $\{w_0 = 0\}$ en α_1. Elle est donc la variété stable de f_1 en α_1, qui est unique. D'où $f_2L = L$. On peut choisir un système de coordonnées tel que $L = \{z_2 = 0\}$.

Les f_i agissent sur L comme des polynômes de degrés d_i. On sait que $d_1^n \neq d_2^m$ pour $(n, m) \neq (0, 0)$. Le couple $(f_1|_L, f_2|_L)$ est conjugué à $(z_1^{d_1}, \lambda z_1^{d_2})$ ou à $(\pm\tilde{T}_{d_1}, \pm\tilde{T}_{d_2})$. Quitte à remplacer f_i par f_i^n et à un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que $(f_1|_L, f_2|_L) = (z_1^{d_1}, z_1^{d_2})$ ou $(\tilde{T}_{d_1}, \tilde{T}_{d_2})$.

Si $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ ou $\mathcal{O}_3$, d'après la proposition 10, $\deg f_1^{-1}L' \leq 5d_1/6$ et $\deg H \leq d_1/3$. D'autre part, $f_1^{-1}L' \cap L = (f_1|_L)^{-1}(L' \cap L)$ qui implique $\#(f_1|_L)^{-1}(L' \cap L) \leq 5d_1/6$. Comme $f_1|_L = z_1^{d_1}$ ou $\tilde{T}_{d_1}$, $\#L' \cap L = 1$.

Si $\mathcal{O} = \mathcal{O}_4$, $\deg f_1^{-1}L' = 3d_1/2$ et $\deg H = d_1/2 - 1$. Par conséquent, $\#(f_1|_L)^{-1}(L' \cap L) \leq 3d_1/2$. Ceci implique que $\#L' \cap L \leq 2$. Quitte à remplacer f_1 par f_1^m, on peut supposer que $\deg f_1 >> 1$. Il y a des cas suivants:

<u>*Cas 1*</u>. $(f_1|_L)(z_1) = \tilde{T}_{d_1} z_1$ et $I := L' \cap L$ contient un point $a \neq (\pm 2, 0)$. Alors pour tout $b \in (f_1|_L)^{-1}a \setminus I$ on a $\mathrm{mult}(f_1|_L, b) = 1$ et $\mathrm{mult}(f_1, b) \geq 2$ car $b \in f_1^{-1}L' \subset \mathcal{C}_1$. Ceci montre que $\overline{f_1^{-1}L \setminus L}$ contient une courbe passant

par b. D'où H passe par b. Ceci est impossible car $\deg H = d_1/2 - 1$ et $\#(f_1|_L)^{-1}a \setminus I \geq d_1 - \#I \geq d_1 - 3$.

Cas 2. $(f_1|_L)(z_1) = \tilde{T}_{d_1}(z_1)$ et $L \cap L' = \{a, b\}$, où $a := (2,0)$ et $b := (-2,0)$. Comme $\deg L = 3$, soit $\mathrm{mult}(L' \cap L, a) = 2$ soit $\mathrm{mult}(L' \cap L, b) = 2$. Supposons, par exemple, que $\mathrm{mult}(L' \cap L, b) = 2$. Soit $c \in (f_1|_L)^{-1}b$. Si $\mathrm{mult}(f_1, c) = 2$, d'après le lemme 7, $\overline{f_1^{-1}L \setminus L} \subset \mathcal{C}_1$ contient une courbe passant par c; ceci est impossible car $f_1^{-1}L' \subset \mathcal{C}_1$ passe aussi par c. Alors $\mathrm{mult}(f_1, c) \geq 3$. On sait que $m(f_1|_L, c) = 2$. Donc H passe par c. Ceci est impossible car $\deg H = d_1/2 - 1$ et $\#(f_1|_L)^{-1}b = d_1/2$.

Cas 3. $f_1^{-1}|_L = z_1^{d_1}$. Comme dans le cas 1, on montre que $L' \cap L$ ne contient aucun point différent de 0.

Supposons maintenant que $r_1 = 2$. Alors $\deg \overline{f_1^{-1}(L' \cup L'') \setminus L'} < 5d_1/6$ et $f_1|_L$ est conjuguée à $z_1^{d_1}$ ou $\pm\tilde{T}_{d_1}$. Ceci implique que $\#(f_1|_L)^{-1}I \setminus I = \#\overline{f_1^{-1}(L' \cup L'') \setminus L'} \cap L < 5d_1/6$ où $I := (L' \cup L'') \cap L$. Par conséquent, $\#I \leq 1$. Les trois droites L, L', L'' se coupent en un point.

□

Proposition 12 *Si l'un des r_1 et r_2 est égal à 1 ou 2, le couple (f_1, f_2) est conjugué à un couple d'applications polynomiales homogènes.*

Preuve. On peut supposer que $r_1 = 1$ ou 2. Considérons le cas où $r_1 = 1$ et $\mathcal{O} = \mathcal{O}_4$. Les autres cas seront traité de même manière.

On choisit un système de coordonnées tel que $\alpha_1 = [0:1:0]$, $\alpha_2 = [0:0:1]$, $\alpha_3 = [0:1:1]$ et $L \cap L' = \{[1:0:0]\}$. Soit $0 \leq \delta < d_1$ le nombre naturel minimal tel que:

$$f_1(z) = (f_{11}, f_{12}) = (P + \Delta_1 + \mathrm{o}(|z|^\delta), Q + \Delta_2 + \mathrm{o}(|z|^\delta)) \tag{4}$$

où P, Q (resp. Δ_1 et Δ_2) sont homogènes de degré d_1 (resp. δ). On montrera que $\delta \leq d_1/2$. Supposons que $\delta > d_1/2$. On pose $\alpha_4 = [0:1:\alpha]$. La courbe L' s'écrit sous la forme $L' = \{z_1(z_1 - z_2)(\alpha z_1 - z_2) + az_2^2 + bz_1z_2 + cz_2 = 0\}$. D'après la description de $\mathcal{O}_4$, il existe des polynômes R, T, S et V tels que $P = R^2$, $Q = z_2z_1(z_1 - z_2)(\alpha z_1 - z_2)T^2$, $P - Q = S^2$, $\alpha P - Q = V^2$. De plus, R, $z_2z_1(z_1 - z_2)(\alpha z_1 - z_2)$, T et S deux à deux n'ont pas de facteur commun car P, Q n'ont pas de facteur commun et les α_j ne sont pas critiques pour $f_1|_\infty$. D'après la proposition 10, il existe T' et W tels que:

$$f_{12} = z_2[z_1(z_1 - z_2)(\alpha z_1 - z_2) + az_2^2 + bz_1z_2 + cz_2]T'^2 \tag{5}$$

et

$$f_{11}(f_{11}-f_{12})(\alpha f_{11}-f_{12})+af_{12}^2+bf_{11}f_{12}+cf_{12}=W^2 \tag{6}$$

D'après (6), on peut écrire $W=RSV+\Delta_W+\mathrm{o}(|z|^{\delta_W})$ où Δ_W est homogène de degré $\delta_W:=\delta+d_1/2$. Comme $\delta>0$, d'après (4), (6) et la définition de R, S, V:

$$S^2V^2\Delta_1+R^2V^2(\Delta_1-\Delta_2)+R^2S^2(\alpha\Delta_1-\Delta_2)=2RSV\Delta_W \tag{7}$$

Ceci implique Δ_1 est divisible par R. On pose $\Delta_1=2R\Delta_R$. De même, $\Delta_1-\Delta_2=2S\Delta_S$ et $\alpha\Delta_1-\Delta_2=2V\Delta_V$.

Par définition de P, Q, R, S, V, T:

$$R^2-S^2=z_2z_1(z_1-z_2)(\alpha z_1-z_2)T^2 \tag{8}$$

et

$$\alpha R^2-V^2=z_2z_1(z_1-z_2)(\alpha z_1-z_2)T^2 \tag{9}$$

Cas 1. Supposons que $a=b=0$ et $\delta\neq d_1-2$. D'après (5), si $\delta\neq d_1-1$, on a $c=0$. Par conséquent, on peut écrire $T'=T+\Delta_T+\mathrm{o}(|z|^{\delta_T})$ avec Δ_T homogène de degré $\delta_T:=\delta-2-d_1/2$. En écrivant $f_{12}=f_{11}-(f_{11}-f_{12})=\alpha f_{11}-(\alpha f_{11}-f_{12})$, on obtient des relations (4), (5) et des relations $\Delta_1=2R\Delta_R$, $\Delta_2=2S\Delta_S$ et $\alpha\Delta_1-\Delta_2=2V\Delta_V$:

$$2R\Delta_R-2S\Delta_S=2z_2z_1(z_1-z_2)(\alpha z_1-z_2)T\Delta_T \tag{10}$$

et

$$2\alpha R\Delta_R-2V\Delta_V=2z_2z_1(z_1-z_2)(\alpha z_1-z_2)T\Delta_T \tag{11}$$

D'après (8), (10),

$$S(S\Delta_R-R\Delta_S)=z_2z_1(z_1-z_2)(\alpha z_1-z_2)T(R\Delta_T-T\Delta_R) \tag{12}$$

D'après (9), (11),

$$V(V\Delta_R-R\Delta_V)=z_2z_1(z_1-z_2)(\alpha z_1-z_2)T(R\Delta_T-T\Delta_R) \tag{13}$$

Les relations précédentes impliquent que $R\Delta_T-T\Delta_R$ est divisible par S et par V car SV et $z_2z_1(z_1-z_2)(\alpha z_1-z_2)T$ n'ont pas de facteur commun. Mais

$\deg[R\Delta_T - T\Delta_R] < \deg SV$ et S, V n'ont pas de facteur commun. Donc $R\Delta_T - T\Delta_R = 0$. On a $\Delta_T = \Delta_R = 0$ et $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. C'est contradiction car δ est minimal.
Cas 2. Supposons que $a = b = 0$ et $\delta = d_1 - 2$. Alors $T' = T + \Delta_T + o(|z|^{\delta_T})$ avec Δ_T homogène de degré $\delta_T := d_1/2 - 4$. Comme dans (10), on obtient:

$$2R\Delta_R - 2S\Delta_S = z_2T[cz_2T + 2z_1(z_1 - z_2)(\alpha z_1 - z_2)\Delta_T] \tag{14}$$

D'après (8), (14),

$$S(S\Delta_R - R\Delta_S) = z_2T\Delta \tag{15}$$

où

$$\Delta := \frac{1}{2}cz_2TR + z_1(z_1 - z_2)(\alpha z_1 - z_2)(R\Delta_T - T\Delta_R).$$

Donc Δ est divisible par S. De même manière, on montre que Δ est divisible par V. Comme $\deg\Delta < \deg SV$ et S, V n'ont pas de facteur commun, $\Delta = 0$. C'est contradiction car z_2TR n'est pas divisible par z_1.
Cas 3. Supposons que $(a, b) \neq 0$. L'équation (5) implique $\delta = d_1 - 1$ et $\delta_W = 3d_1/2 - 1$. On peut écrire $T' = T + \Delta_T + o(|z|^{\delta_T})$ avec Δ_T homogène de degré $\delta_T := d_1/2 - 3$. En écrivant $f_{11} = f_{11} - (f_{11} - f_{12})$, on déduit des relations $\Delta_1 = 2R\Delta_R$, $\Delta_1 - \Delta_2 = 2S\Delta_S$ et de (4) et (5) que:

$$2R\Delta_R - 2S\Delta_S = z_2T[(az_2^2 + bz_1z_2)T + 2z_1(z_1 - z_2)(\alpha z_1 - z_2)\Delta_T] \tag{16}$$

D'après (8), (16),

$$S(S\Delta_R - R\Delta_S) = z_2T\Delta \tag{17}$$

où

$$\Delta := \frac{1}{2}(az_2^2 + bz_1z_2)TR + z_1(z_1 - z_2)(\alpha z_1 - z_2)(R\Delta_T - T\Delta_R)$$

Donc Δ est divisible par S. De même manière, on montre que Δ est divisible par V. Comme $\deg\Delta = \deg SV$ et S, V n'ont pas de facteur commun, $\Delta = dSV$ avec $d \in \mathbb{C}$. Par la définition de Δ:

$$\begin{aligned} aT(0,1)R(0,1) &= 2dS(0,1)V(0,1) \\ (a+b)T(1,1)R(1,1) &= 2dS(1,1)V(1,1) \\ (a+b\alpha)T(\alpha,1)R(\alpha,1) &= 2dS(\alpha,1)V(\alpha,1) \end{aligned} \tag{18}$$

Posons $R_1 : = \partial R/\partial z_1$, $S_1 : = \partial S/\partial z_1$, $T_1 : = \partial T/\partial z_1$. D'après (8),

$$RR_1 - SS_1 = z_2 T[XT + YT_1] \tag{19}$$

où

$$X : = \frac{1}{2}\left[(z_1 - z_2)(\alpha z_1 - z_2) + z_1(\alpha z_1 - z_2) + \alpha z_1(z_1 - z_2)\right]$$

et

$$Y : = z_1(z_1 - z_2)(\alpha z_1 - z_2).$$

D'après (8) et (19),

$$S(SR_1 - RS_1) = z_2 T[XTR + Y(RT_1 - TR_1)] \tag{20}$$

Ceci implique que $XTR + Y(RT_1 - TR_1)$ est divisible par S. De même manière, on montre que ce polynôme est divisible par V. Il existe un d' tel que $XTR/2 + Y(RT_1 - TR_1) = d'SV$. Ceci nous donne:

$$\begin{aligned} T(0,1)R(0,1) &= d'S(0,1)V(0,1) \\ (\alpha - 1)T(1,1)R(1,1) &= d'S(1,1)V(1,1) \\ \alpha(\alpha - 1)T(\alpha,1)R(\alpha,1) &= d'S(\alpha,1)V(\alpha,1) \end{aligned} \tag{21}$$

D'après (18), (21), les deux vecteurs $(a, a+b, a+b\alpha)$ et $(1, \alpha-1, \alpha(\alpha-1))$ sont colinéaires. Ceci est impossible car $\alpha \neq 1$.

Alors $\delta \leq d_1/2$. De même manière, on montre que f_1^n ne contient aucun mononôme de degré entre $d_1^n/2 + 1$ et $d_1^n - 1$. D'après le lemme 3, f_1 est homogène. Remplaçant f_1 par $f_1 \circ f_2$, on montre que $f_1 \circ f_2$ est homogène. D'où f_2 est homogène.

□

Lemme 14 *Supposons que $r_i = s$. Alors L est une réunion de s droites qui se coupent en un point.*

Preuve. On peut supposer que $i = 1$. Considérons d'abord le cas $\mathcal{O} = (\mathbb{P}^1, n) = \mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ ou $\mathcal{O}_3$. Comme L est une réunion de droites et de courbes rationnelles et $\deg L = 3$, elle contient nécessairement une droite. D'après la proposition 9, pour toute composante A de L, la fonction n est constante sur $A \cap \{w_0 = 0\}$. Si $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1$, sans perdre en généralité, on peut supposer que L contient une droite D passant par α_1. Si $\mathcal{O} = \mathcal{O}_2$, par sa description, L est une réunion de trois droites. Notons D la droite passant par

α_1. Si $\mathcal{O} = \mathcal{O}_3$ la composante passant par α_3 est une droite, notée D. Posons $D' : = \overline{L \setminus D}$. A un changement de coordonnées près, on peut supposer que $D = \{z_2 = 0\}$ et $f_1|_D = z_1^{d_1}$ ou $\pm\tilde{T}_{d_1} z_1$. Remarquons que $\deg \overline{f_1^{-1} D' \setminus D'} < 5d_1/6$ et $f_1^{-1} D' \cap D = (f_1|_D)^{-1} I \setminus I$ avec $I : = (D' \cap D)$. Ceci implique que $\#(f_1|_D)^{-1} I \setminus I < 5d_1/6$. D'où $\# D' \cap D \leq 1$. Soit $a = D' \cap D$. C'est un point fixe de f_1.

Si D' est une courbe rationnelle, les 2 points de $D' \cap \{w_0 = 0\}$ sont exceptionnels pour $f_1|_{D'}$. Par conséquent, $f_1|_{D'}$ est conjugué à $x^{\pm d_1}$. Ceci implique que la valeur propre en a de f_1 suivante la direction tangente à D' (c.à.d la direction D) est égale à $\pm d_1$. Donc $\#(f_1|_D)^{-1} a \setminus \{a\} = d_1 - 1$.

Si $f_1|_D = \pm\tilde{T}_{d_1} z_1$, on a $a \neq (\pm 2, 0)$ car la dérivée $\pm\tilde{T}_{d_1}$ en ± 2 est égale à $\pm d_1^2$. D'où $\#(f_1|_D)^{-1} a \setminus \{a\} = d_1 - 1$.

Dans ces deux cas, pour tout $b \in (f_1|_D)^{-1} a \setminus \{a\}$, $f_1^{-1} D'$ passe par b. Par conséquent, $\mathrm{mult}(f_1, b) \geq 2$. Comme $\mathrm{mult}(f_1|_D, b) = 1$, $\overline{f_1^{-1} D \setminus D}$ passe par b. C'est impossible car $\deg \overline{f_1^{-1} D \setminus D} \leq (d_1 - 1)/2 < d_1 - 1 = \#(f_1|_D)^{-1} a \setminus \{a\}$. Alors L est une réunion de trois droites qui se coupent en un point.

Considérons maintenant $\mathcal{O} = \mathcal{O}_4$. Si L contient une courbe rationnelle R, alors l'ensemble exceptionnel de $f|_R$ contient deux points de $R \cap \{w_0 = 0\}$. Ceci implique que $f_1|_R$ est conjugué à $x^{\pm d_1}$.

Supposons que L est la réunion de deux courbes rationnelles invariantes D_1 et D_2. Alors $\deg K_i = d_1 - 1$ où $K_i : = \overline{f_1^{-1} D_i \setminus D_i}$. Par conséquent, $\# K_1 \cap D_2 \leq 2(d_1 - 1)$. Ceci implique $\#(f|_{D_2})^{-1} I \setminus I \leq 2(d_1 - 1)$ où $I : = D_1 \cap D_2$. D'où, $\# I \leq 2$. Comme D_1 et D_2 sont de degré 2, elles doivent être tangentes en 2 points distincts a et b. On déduit des inégalités précédentes que $\overline{f_1^{-1} D_1 \setminus D_1}$ coupe D_2 transversalement en $(f_1|_{D_2})^{-1} I \setminus I$. D'après la proposition 9, $(f_1|_{D_2})^{-1} I \setminus I \subset \mathcal{C}_1$. Mais $f_1|_{D_2}$ est régulière en chaque point de $(f_1|_{D_2})^{-1} I \setminus I$. On déduit que $\overline{f_1^{-1} D_2 \setminus D_2}$ passe par $(f_1|_{D_2})^{-1} I \setminus I$. Comme $\deg \overline{f_1^{-1} D_2 \setminus D_2} = \#(f_1|_{D_2})^{-1} I \setminus I = 2(d_1 - 1)$, $\overline{f_1^{-1} D_2 \setminus D_2}$ coupe D_2 transversalement en $(f_1|_{D_2})^{-1} I \setminus I$. Ceci contradicte le lemme 6.

Supposons maintenant que L contient une droite D. Soit $F : = \overline{L \setminus D}$. Comme $\deg \overline{f_1^{-1} F \setminus F} = 3(d_1 - 1)/2$, on a $\# \overline{f_1^{-1} F \setminus F} \cap D \leq 3(d_1 - 1)/2$ et donc $\# F \cap D \leq 2$. Ceci est valable pour toute droite $D \subset L$. Par conséquent, si L est une réunion de 4 droites, ces droites se coupent en un point. Supposons que ce n'est pas le cas. Alors F est une réunion d'une droite D' et une courbe rationnelle R.

Si R coupe D en deux points, D' passe par l'un de ces deux points car

$\#F \cap D = 2$. Notons a ce point. Alors a est fixe. La valeur propre de f_1 suivant la direction tangente à R est égale à $\pm d_1$ car $f_1|_R$ est conjugué à $x^{\pm d_1}$. Ceci implique que l'une de deux valeurs propres de f_1 suivant D et D' est égale à d_1. Supposons que ceci est vrai pour D. Comme ci-dessus, on montre que $\#I = d_1 - 1$ où $I := (f_1|_D)^{-1}a \setminus \{a\}$ et $D'' := \overline{f_1^{-1}D' \setminus D}$ passe par I. D'où $I \subset \mathcal{C}_1$. D'autre part, $\mathrm{mult}(f_1|_D, b) = 1$ pour tout $b \in I$ car $(f_1|_D)'(a) = \pm d_1$ et $f_1|_D$ est conjugué à $x^{\pm d_1}$ ou $\pm \tilde{T}_{d_1}$. On en déduit que $\overline{f_1^{-1}D \setminus D}$ passe par b. Ceci est impossible car $\deg \overline{f_1^{-1}D \setminus D} = (d_1-1)/2$ et $\#I = d_1 - 1$.

Si R coupe D en un seul point a. Ce point est donc fixe. La valeur propre de f_1 suivant la direction D est égale à $\pm d_1$ car D tangente à R et car $f_1|_R$ est conjugué à $x^{\pm d_1}$. Comme ci–dessus on montre que $\overline{f_1^{-1}D \setminus D}$ coupe D en au moins $d-1$ points de $(f_1|_D)^{-1}a \setminus \{a\}$. Ceci est impossible.

$\square$

Proposition 13 *Si $r_1 = r_2 = s$, (f_1, f_2) est conjugué à un couple d'applications polynomiales homogènes.*

Preuve. Soient D_j les s droites passant par α_j qui constituent L. On choisit un système de coordonnées tel que $\alpha_1 = [0:1:0]$, $\alpha_2 = [0:0:1]$, $\alpha_3 = [0:1:1]$ et les droites D_j se coupent en $[1:0:0]$. Posons $m := n(\alpha_1) \leq 6$, $p := n(\alpha_2) \leq 4$ et $q := n(\alpha_3) \leq 3$. On note f_{11}, f_{12}, P, Q, Δ_1, et Δ_2 comme dans la proposition 12. On montre que $\delta \leq 5d_1/6$. Supposons que $\delta > 5d_1/6$.

Par la description des $\mathcal{O}_i$, il existe des polynômes homogènes R, S et T tels que $P = z_1 R^p$, $Q = z_2 T^m$ et $P - Q = (z_1 - z_2)S^q$. On a $\deg R = (d_1 - 1)/p =: d_R$, $\deg T = (d_1-1)/m =: d_T$ et $\deg S = (d_1-1)/q =: d_S$. D'après la proposition 9, il existe des polynômes $\tilde{R}$, $\tilde{S}$ et $\tilde{T}$ tels que $f_{11} = z_1 \tilde{R}^p$, $f_{12} = z_2 \tilde{T}^m$ et $f_{11} - f_{12} = (z_1 - z_2)\tilde{S}^q$. On a $\deg \tilde{R} = d_R$, $\deg \tilde{T} = d_T$ et $\deg \tilde{S} = d_S$. On peut écrire $\tilde{R} = R + \Delta_R + \mathrm{o}(|z|^{\delta_R})$, $\tilde{T} = T + \Delta_T + \mathrm{o}(|z|^{\delta_T})$, $\tilde{S} = S + \Delta_S + \mathrm{o}(|z|^{\delta_S})$ où $\delta_R := \delta - (p-1)d_R$, $\delta_T := \delta - (m-1)d_T$, $\delta_S := \delta - (q-1)d_S$. Grâce aux relations précédentes, on obtient $\Delta_1 = pz_1 R^{p-1}\Delta_R$, $\Delta_2 = mz_2 T^{m-1}\Delta_T$ et $\Delta_1 - \Delta_2 = q(z_1 - z_2)S^{q-1}\Delta_S$. Ceci implique:

$$mz_2 T^{m-1}\Delta_T + q(z_1 - z_2)S^{q-1}\Delta_S = pz_1 R^{p-1}\Delta_R \tag{22}$$

Comme $P = z_1 R^p$, $Q = z_2 T^m$ et $P - Q = (z_1 - z_2)S^q$,

$$z_2 T^m + (z_1 - z_2)S^q = z_1 R^p \tag{23}$$

D'après (22) et (23),

$$z_2T^{m-1}[mS\Delta_T - qT\Delta_S] = z_1R^{p-1}[pS\Delta_R - qR\Delta_S] \tag{24}$$

Comme P, Q n'ont pas de facteur commun, z_2T et z_1R n'ont pas de facteur commun. La relation (24) implique que $pS\Delta_R - qR\Delta_S$ est divisible par z_2T^{m-1}. On sait que $m \geq p \geq q$. Donc $\deg[pS\Delta_R - qR\Delta_S] < \deg z_2T^{m-1}$ sauf si $m = 2$.

Pour $m \geq 3$, $pS\Delta_R - qR\Delta_S = 0$. Ceci implique que Δ_S divise S car R et S n'ont pas de facteur commun. D'où $\Delta_S = 0$ et $\Delta_R = 0$. On a aussi $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. C'est contradiction car δ est minimal.

Pour $m = 2$, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_4$ et $m = p = q = 2$. Le polynôme $S\Delta_R - R\Delta_S$ est divisible par z_2T. On pose $\alpha_4 = [0 : 1 : \alpha]$. Il existe des polynômes V, $\tilde{V}$, Δ_V et $\delta_V : = \delta - d_1/2$ tels que $\alpha P - Q = (\alpha z_1 - z_2)V^2$, $\tilde{V} = V + \Delta_V + \mathrm{o}(|z|^{\delta_V})$ et $\alpha f_{11} - f_{12} = (\alpha z_1 - z_2)\tilde{V}^2$. En écrivant $P = \frac{1}{\alpha-1}(\alpha P - Q) - \frac{1}{\alpha-1}(P - Q)$ et $f_1 = \frac{1}{\alpha-1}(\alpha f_1 - f_2) - \frac{1}{\alpha-1}(f_1 - f_2)$, on déduit que:

$$\frac{1}{\alpha - 1}2(\alpha z_1 - z_2)V\Delta_V - \frac{1}{\alpha - 1}2(z_1 - z_2)S\Delta_S = 2z_1R\Delta_R \tag{25}$$

$$\frac{1}{\alpha - 1}(\alpha z_1 - z_2)V^2 - \frac{1}{\alpha - 1}(z_1 - z_2)S^2 = z_1R^2 \tag{26}$$

$$\frac{1}{\alpha - 1}(\alpha z_1 - z_2)V[S\Delta_V - V\Delta_S] = z_1R[S\Delta_R - R\Delta_S] \tag{27}$$

Ceci implique $S\Delta_R - R\Delta_S$ est divisible par $(\alpha z_1 - z_2)V$. On a prouvé ci-dessus que $S\Delta_R - R\Delta_S$ est divisible par z_2T. Comme P, Q n'ont pas de facteur commun, $(\alpha z_1 - z_2)V$ et z_2T n'ont pas de facteur commun. Par conséquent, $S\Delta_R - R\Delta_S$ est divisible par $(\alpha z_1 - z_2)Vz_2T$. Mais $\deg[S\Delta_R - R\Delta_S] < \deg[(\alpha z_1 - z_2)Vz_2T]$. Donc $S\Delta_R - R\Delta_S = 0$. D'où $\Delta_R = \Delta_S = 0$ et $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. C'est contradiction car δ est minimal.

Alors $\delta \leq 5d_1/6$. De même, on montre que f_1^n ne contient aucun monôme de degré entre $5d_1^n/6+1$ et $d_1^n - 1$. D'après le lemme 3, f_1 est homogène. De même pour f_2.

$\square$

Références

[1] , *T.C. Dinh et N. Sibony*, *Article en préparation.*

[2] *A.E. Eremenko*, On somme functional equations connected with iteration of rational function, *Leningrad. Math. J.*, **1** (1990), No. 4, 905-919.

[3] *P. Fatou*, Sur l'itération analytique et les substitutions permutables, *J. Math.*, **2** (1923), 343.

[4] *J.E. Fornæss, N. Sibony*, Complex dynamics in higher dimension I, *Astérique*, **222** (1994), 201-213.

[5] *G. Julia*, Mémoire sur la permutabilité des fractions rationnelles, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **39** (1922), 131-215.

[6] *Lamy*, Alternative de Tits pour Aut$[\mathbb{C}^2]$, *Prépublication.*

[7] *G. Levin, F. Przytycki*, When do trow functions have the same Julia set?, *Proc. Amer. Math. Soc.* **125** (1997), no. 7, 2179-2190.

[8] *J.F. Ritt*, Permutable rational functions, *Trans. Amer. Math. Soc*, **25** (1923), 399-448.

[9] *N. Sibony*, Dynamique des applications rationelles de $\mathbb{P}^k$, *Survey*, (1999).

[10] *A.P. Veselov*, Integrable mappings and Lie algebras, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **292** (1987), 1289-1291; English transl. in Soviet Math. Dokl., **35** (1987).