Sous-groupes elliptiques de groupes linéaires sur un corps valué

Anne Parreau

Le 21 septembre 1999.

Abstract

Let n be a positive integer and $\mathbb{F}$ be a valuation field. Let Δ be the Bruhat-Tits building associated to $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, x_0 any point in Δ and $\overline{\Delta}$ the completion of Δ. We prove the following result.

Let Γ be a subgroup of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ generated by S with $S.x_0$ bounded, such that every element of Γ fixes a point in $\overline{\Delta}$, then Γ has a global fixed point in $\overline{\Delta}$.

Introduction

Soit n un entier non nul et $\mathbb{F}$ un corps valué. Soit Δ l'immeuble de Bruhat-Tits associé à $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. Le groupe G agit par isométries sur Δ. Pour g dans G, on appelle *longueur minimale de translation* de g, et on note $\ell(g)$, la borne inférieure de la distance entre un point de Δ et son image par g. On note $\overline{\Delta}$ le complété de l'espace métrique Δ. Le but de cet article est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 1 *Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, tel que*

1. *Le groupe Γ est engendré par une partie S telle que $S.x \subset \Delta$ est bornée pour un (tout) point x de Δ (par exemple S finie ou compacte).*
2. *La longueur minimale de translation ℓ est bornée sur Γ.*

Alors Γ admet un point fixe global dans $\overline{\Delta}$.

La condition 2 est satisfaite si tout élément de Γ fixe un point de $\overline{\Delta}$, et seulement dans ce cas par le théorème 1 de [Par].

Dans le cas où $n = 2$ et où la valuation de $\mathbb{F}$ est discrète, ce résultat est dû à Serre ([Ser]). Dans le cas où $n = 2$, ce théorème est dû à Morgan-Shalen ([MoSh]).

Par le biais de quelques propriétés des immeubles classiques étudiées dans la première partie, on se ramène à démontrer l'énoncé plus algébrique suivant.

Proposition 2 *Soit n un entier non nul et $\mathbb{F}$ un corps valué. Pour tout g de $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, notons $\mathcal{N}(g) = |\det(g)|^{-\frac{1}{n}} N(g)$, où N est la norme canonique sur $\mathrm{End}(\mathbb{F}^n)$. On dit qu'une partie B de G est projectivement bornée si $\mathcal{N}$ est bornée sur B. Soit Γ un sous-groupe de G, tel que*

1. *Le groupe Γ est engendré par une partie S projectivement bornée (par exemple S finie ou compacte).*

2. Il existe un réel positif R tel que pour tout γ dans Γ, il existe $h \in G$ tel que $\mathcal{N}(h\gamma h^{-1}) \leq R$.

Alors Γ est projectivement borné.

Des cas particuliers de cet énoncé étaient déjà connus (voir [Bass] si Γ est absolument irréductible et [Ben] si Γ est zariski-dense).

En particulier, si Δ est complet (par exemple si la valuation est discrète), on a alors (en notant $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation de $\mathbb{F}$) : un sous-groupe de type fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ dont chaque élement est conjugué à un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$.

Dans le cas particulier où $\mathbb{F} = \mathbb{Q}_p$, H. Glöckner et G. A. Willis ont montré (cf. [GW, Conjecture 1.1 et Theorem 3.5]) que ce résultat entraîne le corollaire suivant. Un groupe topologique est *uniscalaire* si tout élément normalise un sous-groupe compact ouvert, et *pro-discret* si tout voisinage de l'identité contient un sous-groupe compact ouvert distingué.

Corollaire 3 *Tout groupe de Lie p-adique uniscalaire engendré par un compact est pro-discret.*

Je remercie Frédéric Paulin pour ses commentaires. Je remercie également Hyman Bass qui m'a expliqué des arguments essentiels dans la preuve de la proposition 2.

1 Préliminaires - Immeubles classiques

Une référence pour cette section est [BrTi], auquel on renvoie pour toutes les affirmations non démontrées (voir aussi [Par]).

Dans tout cet article, $\mathbb{F}$ désigne un corps valué, i.e. un corps commutatif muni d'une valuation $v : \mathbb{F}^* \longrightarrow \mathbb{R}$. On dira que v est discrète (resp. dense) si son image, qui est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, est discrète (resp. dense). Soit $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation de $\mathbb{F}$. Soit $|.| = \exp(-v(.))$ la valeur absolue sur $\mathbb{F}$ associée. Elle est ultramétrique, c'est-à-dire vérifie l'inégalité triangulaire ultramétrique $|x+y| \leq \max(|x|, |y|)$ pour tous x et y de F.

Soit n un entier non nul et V le $\mathbb{F}$-espace vectoriel $\mathbb{F}^n$. Soit η_0 la norme ultramétrique canonique sur V, définie par $\eta_0(v) = \sup_i |x_i|$ pour tout $v = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{F}^n$. Soit N la norme canonique sur $\mathrm{End}(V)$, définie par $N(g) = \sup_{i,j} |g_{ij}|$, où (g_{ij}) est la matrice de g dans la base canonique. Notons que N est la norme d'endomorphisme sur $\mathrm{End}(V)$ associée à η_0.

Pour toute norme ultramétrique η sur V, la norme N_η sur $\mathrm{End}(V)$ associée à η, définie par $N_\eta(g) = \sup_{v \in V^*} \frac{\eta(g(v))}{\eta(v)}$, est ultramétrique et sous-multiplicative (i.e. $N_\eta(gg') \leq N_\eta(g) N_\eta(g')$ pour tous g et g' de $\mathrm{End}(V)$). Si η est équivalente à η_0, alors N_η est équivalente à N.

Soit $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. Soit Δ l'immeuble de Bruhat-Tits associé à G. C'est un espace métrique $\mathrm{CAT}(0)$ sur lequel G agit par isométries (voir [BrHa] pour les définitions et propriétés de base des espaces $\mathrm{CAT}(0)$). Notons d la distance et $\overline{\Delta}$ le complété de Δ. Si la valuation est discrète, alors Δ est un espace métrique complet, et c'est la réalisation géométrique d'un complexe simplicial. Le centre $Z(G) = \{xI,\ x \in \mathbb{F}^*\}$ de G agit trivialement sur Δ, donc l'action se factorise à travers la projection canonique $p : G \longrightarrow \mathbb{P}G = \mathrm{PGL}_n(\mathbb{F})$. Notons K le sous-groupe $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ de G, formé des éléments g tels que $N(g) \leq 1$ et $N(g^{-1}) \leq 1$. Le sous-groupe $\mathbb{P}K = p(K)$ est le stabilisateur dans $\mathbb{P}G$ d'un point x_0 de Δ.

Nous appelons ensemble des *sommets* de Δ l'orbite $\mathcal{S}$ de x_0 sous $\mathbb{P}G$. Si la valuation est surjective (prend toutes les valeurs réelles), alors $\mathcal{S} = \Delta$. Si elle est dense, alors $\mathcal{S}$ est dense dans Δ. Si elle est discrète, alors $\mathcal{S}$ est le 0-squelette du complexe simplicial Δ, qui est une partie discrète.

Proposition 1.1 *Il existe une constante C telle que pour tout x dans $\overline{\Delta}$, il existe $y \in \mathcal{S}$ tel que $d(x, y) \leq C$.* □

Notons δ le morphisme multiplicatif $g \mapsto |\det(g)|^{\frac{1}{n}}$ de G dans $\mathbb{R}^{+*}$. On a $\delta(g) \leq N(g)$ pour tout g dans G. Notons $\mathcal{N} = \frac{N}{\delta}$ la norme canonique renormalisée, qui est invariante par multiplication par un scalaire dans $\mathbb{F}^*$.

Définition 1.2 *Une partie B de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ est dite* projectivement bornée *si $\mathcal{N}(B)$ est bornée.*

Notons $\mathcal{N}'$ la fonction $g \mapsto N(g)N(g^{-1})$ de G dans $\mathbb{R}^{+*}$, qui est invariante par multiplication par un scalaire.

Proposition 1.3 *Notons d_{x_0} la fonction $g \mapsto d(x_0, gx_0)$ de G dans $\mathbb{R}^+$. On a*

$$\frac{1}{n}\log\mathcal{N}' \leq \log\mathcal{N} \leq \log\mathcal{N}'$$

et

$$\log\mathcal{N} \leq d_{x_0} \leq \sqrt{n}\log\mathcal{N}'.$$

Preuve. Soit $g \in G$. On utilise la décomposition $G = KA^+K$, où A^+ est le sous-ensemble des matrices diagonales $\mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$ telles que $|a_1| \geq |a_2| \geq \ldots \geq |a_n|$. Il existe donc $a \in A^+$, k et k' dans K tels que $g = kak'$. On a alors $|\det(g)| = |\det(a)|$, $d_\Delta(x_0, g.x_0) = d_\Delta(x_0, a.x_0)$, et $N(g) = N(a)$ car $N(g) \leq N(k)N(a)N(k') \leq N(a)$ et $N(a) \leq N(k^{-1})N(g)N(k'^{-1}) \leq N(g)$. De même, $N(g^{-1}) = N(a^{-1})$. Il suffit donc d'établir les inégalités pour les éléments de A^+. Pour $a = \mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n) \in A^+$, on a $N(a) = |a_1|$ et $N(a^{-1}) = |a_n|^{-1}$, donc si $\alpha_i = \log|a_i|$ pour tout i et $\alpha = \frac{1}{n}\sum\alpha_i = \log\delta(a)$, on a $\log\mathcal{N}(a) = \alpha_1 - \alpha$ et $\log\mathcal{N}'(a) = \alpha_1 - \alpha_n$. Par ailleurs, on a $d_\Delta(x_0, a.x_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^n(\alpha_i - \alpha)^2}$. Or on a

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_n}{n} \leq \alpha_1 - \alpha \leq \alpha_1 - \alpha_n$$

et

$$\alpha_1 - \alpha \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n(\alpha_i - \alpha)^2} \leq \sqrt{n}\sup_{i=1\cdots n}|\alpha_i - \alpha| \leq \sqrt{n}(\alpha_1 - \alpha_n),$$

ce qui conclut. □

Corollaire 1.4 *Soit B une partie de G. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *La partie B de G est projectivement bornée, i.e. $\mathcal{N}(B)$ est borné.*
2. *La fonction $\mathcal{N}'$ est bornée sur B.*
3. *Pour un (tout) point x de Δ, la partie $B.x$ de Δ est bornée.* □

Proposition 1.5 *Soit Γ un sous-groupe de G. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le groupe Γ fixe un point du complété $\overline{\Delta}$ de Δ.*
2. *Les orbites de Γ dans Δ sont bornées.*
3. *Le groupe Γ est projectivement borné, i.e. $\mathcal{N}(\Gamma)$ est borné.*

Preuve. Comme Δ est CAT(0), le théorème de Cartan (voir [BrTi, Théorème 8.2.1]) dit que Γ fixe un point du complété si et seulement si l'orbite de x_0 sous Γ est bornée dans Δ. Les autres assertions découlent immédiatement de la proposition 1.3. □

Remarque 1.6 Si Γ est inclus dans le sous-groupe G_0 des éléments de G de déterminant de valeur absolue 1, alors Γ est projectivement borné si et seulement s'il est borné au sens usuel, c'est à dire pour la norme canonique. De plus on a la propriété suivante. Un sous-groupe de type fini de G_0 qui admet un point fixe dans Δ fixe un point de $\mathcal{S}$, donc est conjugué dans G à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$.

Donc, si l'immeuble Δ est complet (par exemple dans le cas de la valuation discrète) un sous-groupe de type fini, borné, de G_0 est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$.

De plus, dans le cas où la valuation est discrète, on peut même supprimer l'hypothèse "de type fini", car on a la propriété suivante. Si x est un point de Δ, alors il existe un point y de $\mathcal{S}$ tel que

$$\mathrm{Stab}_{G_0}(x) \subset \mathrm{Stab}_{G_0}(y).$$

Proposition 1.7 *Si H est un sous-groupe projectivement borné de G, alors il existe une norme ultramétrique η sur V équivalente à η_0 telle que $g.\eta = \delta(g)\eta$ pour tout g de H.*

Preuve. Soit $g \in G$. On a $N(g^{-1})^{-1}\eta_0 \leq \eta_0 \circ g \leq N(g)\eta_0$. La norme ultramétrique $\eta_g = \delta(g)^{-1}\eta_0 \circ g$ de $\mathrm{End}(V)$ est donc équivalente à η_0 avec $\mathcal{N}(g^{-1})^{-1}\eta_0 \leq \eta_g \leq \mathcal{N}(g)\eta_0$ sur V.

Soit R un réel tel que $\mathcal{N}(h) \leq R$ pour tout h de H. Soit $\eta = \sup_{h\in H} \eta_h$. On a $\frac{1}{R}\eta_0 \leq \eta \leq R\eta_0$. On voit facilement que η est alors une norme ultramétrique sur V, équivalente à η_0. Pour tout g, h de H, on a $\eta_h \circ g = \delta(g)\eta_{hg}$, donc $\eta \circ g = \delta(g)\eta$ pour tout g de H. □

Pour tout $h \in G$, notons i_h le morphisme $g \mapsto hgh^{-1}$ de End$V$. Notons ϕ l'application de G dans $[1, +\infty[$, constante sur les classes de conjugaison, définie par $\phi = \inf_{h\in G} \mathcal{N} \circ i_h$.

Proposition 1.8 *Soit C la constante donnée par la proposition 1.1. On a $\log\phi(g) \leq \ell(g) + 2C$ pour tout g dans G.*

Preuve. Soit g dans G et x dans Δ. Par la proposition 1.1, il existe $y \in \mathcal{S}$ tel que $d(x, y) \leq C$. Soit $h \in G$ tel que $y = h^{-1}x_0$. On a $d_{x_0}(hgh^{-1}) = d(y, gy) \leq d(x, gx) + 2C$. Comme $\log\mathcal{N} \leq d_{x_0}$ (cf. Prop. 1.3), on en déduit que $\log\phi(g) \leq d(x, gx) + 2C$ pour tout x de Δ. D'où le résultat désiré. □

Proposition 1.9 (Décomposition polaire) *Si P est le sous-groupe des éléments de $\mathrm{GL}(V)$ qui stabilisent un sous-espace vectoriel non trivial donné de V, on a $G = KP$.* □

Proposition 1.10 *Pour tout g dans G, on a $\phi(g) = \inf_{p\in P} \mathcal{N}(pgp^{-1})$*

Preuve. D'après la proposition précédente, pour tout h dans G, il existe p dans P tel que $h = kp$. Or, pour tout k dans K, la conjugaison i_k par k conserve $\mathcal{N}$ (car $\mathcal{N}$ est sous-multiplicative et vaut 1 sur K, donc i_k et $i_{k^{-1}}$ diminuent $\mathcal{N}$). On a alors $\mathcal{N} \circ i_h = \mathcal{N} \circ i_k \circ i_p = \mathcal{N} \circ i_p$. On en déduit que $\inf_{h\in G} \mathcal{N} \circ i_h = \inf_{p\in P} \mathcal{N} \circ i_p$. □

2 Démonstration du théorème

D'après le corollaire 1.4 et les propositions 1.5 et 1.8, il suffit de démontrer la proposition 2 de l'introduction, que nous rappelons ici.

Proposition 2.1 *Pour tout entier n non nul, on a $(\mathcal{P}_n)$: Soit $\mathbb{F}$ un corps valué. Soit Γ un sous-groupe de $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, tel que*

1. *Le groupe Γ est engendré par une partie S projectivement bornée.*
2. *La fonction $\phi : g \mapsto \inf_{h\in G} \mathcal{N}(hgh^{-1})$ est bornée sur Γ.*

Alors Γ est projectivement borné dans Δ.

Preuve. Démontrons cette proposition par récurrence sur l'entier n. Pour tout corps $\mathbb{F}$, l'immeuble euclidien associé à $\mathrm{GL}_1(\mathbb{F})$ est réduit à un point, donc borné. Par conséquent $(\mathcal{P}_1)$ est vraie. Soit $n > 1$. Supposons la propriété $(\mathcal{P}_m)$ vraie pour tout $m < n$. Soient $\mathbb{F}$ et Γ vérifiant les hypothèses.

Pour tout g dans G, on a $|\mathrm{Trace}(g)| \leq N(g)$, donc

$$|\mathrm{Trace}(g)| \leq \inf_{h\in G} N(h^{-1}gh)$$

car la trace est un invariant de conjugaison. Notons $\mathcal{T} = \frac{|\mathrm{Trace}|}{\delta}$, alors $\mathcal{T} \leq \phi$ donc $\mathcal{T}(\Gamma)$ est borné d'après l'hypothèse 2.

Dans le cas où $V = \mathbb{F}^n$ est un Γ-module absolument irréductible, le lemme de Burnside entraîne que si $\mathrm{Trace}(\Gamma)$ est borné alors Γ est borné (voir par exemple [Bass, section 1, Corollary 1.3]). En adaptant les arguments de la démonstration, nous allons voir que, dans ce cas, si $\mathcal{T}(\Gamma)$ est borné, alors Γ est projectivement borné, ce qui conclura.

Fait 2.2 *Si $V = \mathbb{F}^n$ est un Γ-module absolument irréductible, alors Γ engendre l'espace vectoriel $\mathrm{End}(V)$ sur $\mathbb{F}$.* □

On choisit une base $s_1, \ldots, s_{n^2}$ de $\mathrm{End}(V)$ formée d'éléments de Γ. La forme bilinéaire symétrique Tr sur $\mathrm{End}(V)$ qui à (A, B) associe $\mathrm{Trace}(AB)$ étant non dégénérée, il existe une base $t_1, \ldots, t_{n^2}$ de $\mathrm{End}(V)$ duale de $s_1, \ldots, s_{n^2}$ pour Tr, c'est-à-dire telle que pour tous i et j, $\mathrm{Trace}(s_i t_j) = \delta_{i,j}$.

Soit γ dans Γ et soient $x_1, \ldots, x_{n^2} \in \mathbb{F}$ les coordonnées de γ dans la base $t_1, \ldots, t_{n^2}$. Pour tout i $\mathrm{Trace}(s_i\gamma) = x_i$. Comme N est une norme ultramétrique sur $\mathrm{End}(V)$, on a

$$N(\gamma) \leq \max_{i=1\cdots n^2} |x_i| N(t_i) \leq \left(\max_{i=1\cdots n^2} \mathcal{T}(s_i\gamma)\delta(s_i)N(t_i) \right) \delta(\gamma).$$

Si $\mathcal{T}(\Gamma)$ est borné, alors la fonction $\mathcal{N}$ est majorée sur Γ, ce qui conclut.

Considérons maintenant le cas où $\Gamma \subset \mathrm{End}(V)$ stabilise un sous-espace vectoriel de V de dimension r, avec $0 < r < n$. Quitte à conjuguer, on peut supposer que Γ est inclus dans le sous-groupe P de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ suivant (on note $r_1 = r$ et $r_2 = n - r$) :

$$\Gamma \subset P = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} ; A \in \mathrm{GL}_{r_1}(\mathbb{F}), B \in \mathrm{M}_{r_1,r_2}(\mathbb{F}), D \in \mathrm{GL}_{r_2}(\mathbb{F}) \right\}$$

On considère alors le morphisme $\pi : P \longrightarrow G' = \mathrm{GL}_{r_1}(\mathbb{F}) \times \mathrm{GL}_{r_2}(\mathbb{F}) \subset P$ tel que $\pi \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Pour $i = 1, 2$, soit π_i le morphisme $pr_i \circ \pi$ où pr_i est la projection canonique de G' dans $\mathrm{GL}_{r_i}(\mathbb{F})$, et notons g_i l'image de g par π_i pour tout g de P.

Lemme 2.3 *Pour $i = 1, 2$, pour tout γ dans Γ, on a $\delta(\gamma_i) = \delta(\gamma)$.*

Preuve. Pour tout p dans P, on a $\delta(p_i) \leq N(p_i) \leq N(p)$ donc $\frac{\delta(p_i)}{\delta(p)} \leq \mathcal{N}(p)$. Comme le membre de gauche de cette inégalité est constant sur la classe de conjugaison de p dans P, on en déduit que, pour tout p dans P,

$$\frac{\delta(p_i)}{\delta(p)} \leq \inf_{h \in P} \mathcal{N}(hph^{-1}) = \phi(p)$$

par la proposition 1.10.

Comme ϕ est bornée sur Γ (hypothèse 2), disons par R, on a donc $\frac{\delta(\gamma_i)}{\delta(\gamma)} \leq R$ pour tout γ dans Γ.

En particulier, pour tout γ dans Γ, on a

$$\left(\frac{\delta(\gamma_i)}{\delta(\gamma)}\right)^k = \frac{\delta(\gamma_i^k)}{\delta(\gamma^k)} \leq R$$

pour tout entier k, ce qui entraîne que $\frac{\delta(\gamma_i)}{\delta(\gamma)} \leq 1$. En remplacant γ par son inverse, on obtient le résultat désiré. □

Montrons que, pour $i = 1, 2$, le sous-groupe $\Gamma_i = \pi_i(\Gamma)$ de $\mathrm{GL}_{r_i}(\mathbb{F})$ vérifie les hypothèses de récurrence. Le morphisme π_i diminue N donc $\mathcal{N}'$. Comme $\mathcal{N}'$ est bornée sur S, on en déduit que $\mathcal{N}'$, donc $\mathcal{N}$, est bornée sur $\pi_i(S)$, qui engendre le groupe Γ_i, donc Γ_i vérifie l'hypothèse 1.

Soit R tel que $\phi < R$ sur Γ (dont l'existence est assurée par l'hypothèse 2 sur Γ). Soit $\gamma_i \in \Gamma_i$ et $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma_i = \pi_i(\gamma)$.

D'après la proposition 1.10, il existe $p \in P$ tel que $\mathcal{N}(p\gamma p^{-1}) < R$. On a $\mathcal{N}'(p_i\gamma_i p_i^{-1}) \leq \mathcal{N}'(p\gamma p^{-1})$ car π_i diminue $\mathcal{N}'$. Donc $\mathcal{N}(p_i\gamma_i p_i^{-1}) \leq \mathcal{N}(p\gamma p^{-1})^n$ d'après la proposition 1.3. Par conséquent, on a $\phi(\gamma_i) \leq R^n$ pour tout γ_i dans Γ_i, donc Γ_i vérifie l'hypothèse 2.

Il s'ensuit que pour $i = 1, 2$, le sous-groupe Γ_i de $\mathrm{GL}_{r_i}(\mathbb{F})$ vérifie les hypothèses de $(\mathcal{P}_{r_i})$ pour r_i qui est strictement inférieur à n, donc, par récurrence, on a que Γ_i est un sous-groupe projectivement borné de $\mathrm{GL}_{r_i}(\mathbb{F})$.

D'après la proposition 1.7, pour $i = 1, 2$, il existe alors une norme ultramétrique η_i sur $\mathbb{F}^{r_i}$, équivalente à la norme canonique, telle que $\eta_i \circ \gamma_i = \delta(\gamma_i)\eta_i$ pour tout γ_i dans Γ_i. Soit η la norme ultramétrique sur V telle que $\eta(x_1, \ldots, x_n) = \sup(\eta_1(x_1, \ldots, x_{r_1}), \eta_2(x_{r_1+1}, \ldots, x_n))$ pour $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$. Soit N_η la norme d'endomorphisme sur $\mathrm{End}(V)$ associée à η, qui est ultramétrique, sous-multiplicative et équivalente à N.

Remarque. Si Γ est à éléments de déterminant de valeur absolue 1, et si la valuation est discrète, par la remarque 1.6, comme Γ_i est un sous-groupe borné, il est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{r_i}(\mathcal{O})$. Donc $N_\eta = N$ convient, quitte à conjuguer Γ.

Le sous-groupe P' de P formé des éléments g tels que $\eta_i \circ g_i = \delta(g)\eta_i$ pour $i = 1, 2$ contient Γ (par le lemme 2.3) et possède la propriété suivante. Pour $g = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{End}(V)$ avec $A \in \mathrm{M}_{r_1}(\mathbb{F})$, $B \in \mathrm{M}_{r_1,r_2}(\mathbb{F})$, $C \in \mathrm{M}_{r_2,r_1}(\mathbb{F})$, $D \in \mathrm{M}_{r_2}(\mathbb{F})$, notons $A_g = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B_g = \left(\begin{smallmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $D_g = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right)$. Alors si g et g' sont dans P', on a

$$\frac{N_\eta(B_{gg'})}{\delta(gg')} \leq \max\left(\frac{N_\eta(B_g)}{\delta(g)}, \frac{N_\eta(B_{g'})}{\delta(g')}\right)$$

En effet, $B_{gg'} = A_g B_{g'} + B_g D_{g'}$, et, comme N_η est une norme ultramétrique et sous-multiplicative, on a $N_\eta(B_{gg'}) \leq \max(N_\eta(A_g)N_\eta(B_{g'}), N_\eta(B_g)N_\eta(D_{g'}))$. Or $N_\eta(A_g) = N_{\eta_1}(g_1) = \delta(g)$ et de même $N_\eta(D_{g'}) = \delta(g')$, d'où le résultat souhaité.

Or Γ est inclus dans P'. Comme Γ est engendré par une partie S de G bornée pour $\mathcal{N}$, donc également bornée pour la fonction équivalente $\frac{N_\eta}{\delta}$, il existe une constante M telle que $N_\eta(s) \leq M\delta(s)$ pour tout s de S. Comme pour tout g de P' on a $g = \pi(g) + B_g$, et donc $N_\eta(B_g) \leq \max((N_\eta(\pi(g)), N_\eta(g)) \leq \max(\delta(g), N_\eta(g))$, on a $\frac{N_\eta(B_s)}{\delta(s)} \leq M' = \max(1, M)$ pour tout $s \in S$. Or, d'après la propriété ci-dessus, $\frac{N_\eta(B_\gamma)}{\delta(\gamma)} \leq \sup_{s\in\mathcal{S}} \frac{N_\eta(B_s)}{\delta(s)} \leq M'$ pour tout γ de Γ. Donc, comme pour tout g de P on a $N_\eta(g) \leq \max((N_\eta(\pi(g)), N_\eta(B_g)) \leq \max(\delta(g), N_\eta(B_g))$, on a $\frac{N_\eta}{\delta}(\gamma) \leq M'$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Le sous-groupe Γ est donc borné pour $\frac{N_\eta}{\delta}$, donc pour $\mathcal{N}$.

Supposons pour finir que $\mathbb{F}^n$ n'est pas un Γ-module absolument irréductible. Alors par définition il existe une extension algébrique $\mathbb{E}$ finie de $\mathbb{F}$ telle que Γ stabilise un sous-espace vectoriel non-trivial de $\mathbb{E}^n$.

Proposition 2.4 (Extension de la valuation) *Soit $\mathbb{F}$ un corps muni d'une valuation v à valeurs réelles et $\mathbb{E}$ une extension algébrique finie de $\mathbb{F}$. Alors il existe une valuation v' de $\mathbb{E}$ à valeurs réelles telle que $v' = v$ sur $\mathbb{F}$ (voir par exemple [Lan, Chap. XII, §4, Theorem 1, corollary 2]).* □

Notons $\mathcal{N}_\mathbb{E}, \mathcal{N}_\mathbb{F}$ les normes canoniques renormalisées sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ associées respectivement à v' et v. Il est facile de voir que le sous-groupe Γ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ vérifie l'hypothèse 1, car $\mathcal{N}_\mathbb{E} = \mathcal{N}_\mathbb{F}$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ qui contient Γ, et l'hypothèse 2, car, en restriction à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ qui contient Γ, la fonction $\inf_{g\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})} \mathcal{N}_\mathbb{E} \circ i_g$ est inférieure à la fonction $\inf_{g\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})} \mathcal{N}_\mathbb{F} \circ i_g$ qui est bornée sur Γ par l'hypothèse 2. D'après le cas précédent, le sous-groupe Γ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ est borné pour $\mathcal{N}_\mathbb{E}$, donc borné pour $\mathcal{N}_\mathbb{F}$ car $\mathcal{N}_\mathbb{E} = \mathcal{N}_\mathbb{F}$ sur Γ. □

Références

[Bass] H. Bass, *Groups of integral representation type* Pac. J. Math. **86** (1980), 15-51.

[Ben] Y. Benoist, *Propriétés asymptotiques des groupes linéaires* Geom. Funct. Anal. **7** (1997), 1-47.

[BrHa] M.R. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces with non-positive curvature*, Grund. math. Wiss. **319**, Springer Verlag (1999).

[BrTi] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local (données radicielles valuées)*, Pub. Math. I.H.E.S. **41** (1972), 5-252.

[GW] H. Glöeckner, G. A. Willis, *Uniscalar p-adic Lie groups*, prépublication 1999.

[Lan] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, 1965.

[MoSh] J. Morgan, P. Shalen, *Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures I* Ann. Math. **122** (1985), 398-476.

[Par] A. Parreau, *Immeubles euclidiens, construction par les normes et étude des isométries*, prépublication Univ. Orsay, Sep. 1999.

[Ser] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2*, Astérisque **46**, Soc. Math. France (1983).

Laboratoire de Mathématiques, UMR 8628 du CNRS,
Bât. 425, Université Paris-Sud,
91405 Orsay Cedex, France.
Courrier électronique : **Anne.Parreau@math.u-psud.fr**