Cohomologie L^p, espaces homogènes et pincement *

P. Pansu

4 juillet 1999

RESUME. On calcule, dans certains cas, la cohomologie L^p des espaces homogènes riemanniens. Notamment, on montre qu'en degré 1 la cohomologie réduite est non nulle si et seulement si l'espace est quasiisométrique à un espace homogène à courbure sectionnelle strictement négative. On donne un critère optimal d'annulation de cohomologie pour les variétés riemanniennes à courbure sectionnelle négative pincée.

ABSTRACT. The L^p-cohomology of Riemannian homogeneous spaces is computed in a number of cases. It turns out that reduced L^p-cohomology in degree one does not vanish if and only if the space is quasiisometric to a negatively curved homogeneous space. A sharp vanishing theorem for Riemannian manifolds with pinched negative curvature is given.

1 Introduction

Soit M une variété riemannienne. Soit $p > 1$ un réel. On note $L^p\Omega^*(M)$ l'espace de Banach des formes différentielles L^p et $\Omega^{*,p}(M) = L^p \cap d^{-1}L^p$ l'espace des formes différentielles L^p dont la différentielle extérieure est aussi L^p. La cohomologie du complexe $(\Omega^{*,p}(M), d)$ s'appelle la *cohomologie* L^p de M. Elle n'est intéressante que si M est non compacte.

La cohomologie L^p est invariante sous quasiisométrie (cf. [G2]). Elle permet de construire des invariants numériques assez fins. Par exemple, dans [P1], on définit le nombre

$$\mathbf{p}(M) = \inf\{p > 1 \ ; \ H^{1,p}(M) \neq 0\},$$

et on montre que lorsque M est simplement connexe et à courbure négative, ce nombre s'interprète comme une sorte de dimension du bord à l'infini. En effet, elle minore la dimension de Hausdorff du bord (relative à la distance de Hamenstädt), mais à la différence de celle-ci, c'est un invariant de quasiisométrie. Pour les espaces homogènes à courbure négative, $\mathbf{p}(M)$ coïncide avec la dimension de Hausdorff du bord. Enfin, elle est sensible au pincement de la courbure sectionnelle. Si celle-ci est comprise entre -1 et $\delta < 0$, alors

$$(n-1)\sqrt{-\delta} \leq \mathbf{p}(M) \leq (n-1)\sqrt{-\delta}^{-1}.$$

L'objet de ce papier est d'explorer d'une part, le comportement de $H^{1,p}$ lorsque la courbure n'est plus nécessairement négative, et d'autre part, le comportement de $H^{k,p}$ pour $k \geq 2$ et sa relation avec la courbure.

En toute généralité, la cohomologie L^p se décompose en cohomologie réduite et torsion

$$0 \to T^{*,p} \to H^{*,p} \to R^{*,p} \to 0$$

où la *cohomologie réduite* est $R^{*,p} = \ker d/\overline{\mathrm{im}\, d}$ et la *torsion* est $T^{*,p} = \overline{\mathrm{im}\, d}/\mathrm{im}\, d$. La cohomologie réduite est un espace de Banach sur lequel les isométries de M agissent isométriquement. La torsion est non séparée.

*Mots clé : Cohomologie L^p, courbure négative, espace homogène, espace de Besov. Mathematics Subject Classification : 43A15, 43A80, 46E35, 53C20, 53C30, 58A14.

1.1 Cohomologie en degré 1 des espaces homogènes

On sait décider pour quelles valeurs de $p > 1$ les espaces $T^{1,p}$ et $R^{1,p}$ sont nuls ou non.

Théorème A. *Soit M un espace homogène riemannien non compact. Alors la cohomologie L^p en degré 1 de M est nulle, sauf si M est fermé à l'infini ou à courbure négative. Plus précisément,*

1. *ou bien le groupe d'isométrie de M est une extension compacte d'un groupe de Lie résoluble unimodulaire. Dans ce cas, pour tout $p > 1$, $R^{1,p}(M) = 0$ et $T^{1,p}(M) \neq 0$.*
2. *ou bien M est quasiisométrique à un espace homogène à courbure sectionnelle strictement négative. Dans ce cas, $T^{1,p}(M) = 0$ pour tout $p \geq 1$. De plus, $H^{1,p}(M) = 0$ si $p \leq \mathbf{p}(M)$ et $R^{1,p}(M) \neq 0$ si $p > \mathbf{p}(M)$.*
3. *sinon, $H^{1,p}(M) = 0$ pour tout $p > 1$.*

Corollaire 1 *Soit M un espace homogène riemannien non compact. Si M possède des fonctions harmoniques non constantes dont le gradient est L^2, il est quasiisométrique au plan hyperbolique.*

1.2 Pincement de la courbure

En degrés $k > 1$, la cohomologie L^p est liée de façon optimale au pincement de la courbure.

Théorème B. *Soient $\delta \in]-1, 0[$ un réel, n et $k = 2, \ldots, n$ des entiers. Notons $\mathbf{q}(n, \delta, k) = 1 + \frac{n-k-1}{k}\sqrt{-\delta}$.*

Soit M une variété riemannienne complète de dimension n, simplement connexe, dont la courbure sectionnelle K satisfait $-1 \leq K \leq \delta$. Alors

$$H^{k,p}(M) = 0 \quad \textit{pour} \quad 1 < p \leq \mathbf{q}(n, \delta, k)$$

et

$$T^{k,p}(M) = 0, \quad \textit{i.e.} \quad H^{k,p}(M) \quad \textit{est séparé pour} \quad 1 < p < \mathbf{q}(n, \delta, k-1).$$

Ce résultat, annoncé dans [P2], améliore celui de H. Donnelly et F. Xavier, [DX]. Le résultat d'annulation de la torsion est optimal. D'abord, pour l'espace hyperbolique ($\delta = -1$) en tout degré, voir en 15.2. Mais il y a d'autres exemples. Soient n et μ des entiers tels que $2 \leq \mu \leq n-1$ et $\delta \in]-1, 0[$. Soit $G_{\mu,n,\delta}$ le produit semi-direct $G = \mathbf{R} \times_\alpha \mathbf{R}^{n-1}$ où α est une matrice diagonale avec seulement deux valeurs propres distinctes 1 et $\sqrt{-\delta} < 1$ de multiplicités $\mu - 1$ et $n - \mu$. Alors le groupe de Lie $G_{\mu,n,\delta}$ possède une métrique riemannienne invariante à gauche δ-pincée.

Théorème C. *Soient $\delta \in]-1, 0[$ un réel, n et $k = 2, \ldots, n$ des entiers. Si*

$$\mathbf{q}(n, \delta, k-1) < p < 1 + \frac{1 + (n-1-k)\sqrt{-\delta}}{k - 2 + \sqrt{-\delta}},$$

alors $T^{k,p}(G_{k,n,\delta}) \neq 0$, i.e. $H^{k,p}(G_{k,n,\delta})$ n'est pas séparé.

Par conséquent, pour tout $\mu = 2, \cdots, n-1$, $G_{\mu,n,\delta}$ n'est pas quasiisométrique à une variété δ'-pincée avec $\delta' < \delta$.

1.3 Cas des espaces symétriques de rang un

Les espaces symétriques de rang 1 de type non compact à courbure non constante sont $-1/4$-pincés. Alors que ce sont de bons candidats pour tester l'optimalité du théorème B, (la preuve ne comporte aucune perte quand on l'applique à ces espaces pour les valeurs adéquates de k), le calcul révèle que leur cohomologie L^p reste nulle (resp. séparée) au-delà des intervalles donnés par le théorème B. Cela résulte de la non commutativité de leur unipotent maximal.

Théorème D. *Soit M un espace symétrique de rang un à courbure non constante, vu comme produit semi-direct $\mathbf{R} \times_\alpha N$. Etant donné $k \leq n-1$, notons $\operatorname{suiv}\sigma(k)$ le second élément (dans l'ordre croissant) de l'ensemble $\sigma(k)$ des valeurs propres de $\Lambda^k\alpha$. Si $\operatorname{tr}\alpha/p < \operatorname{suiv}\sigma(k-1)$, alors $T^{k,p}(M) = 0$ sauf peut-être pour $\operatorname{tr}\alpha/p = \min\sigma(k-1)$.*

En particulier, si M est un espace hyperbolique complexe, $H^{k,p}(M)$ est séparé sauf pour au plus deux valeurs de p en chaque degré.

On constate que le groupe $G_{2,4,-1/4}$ et le plan hyperbolique complexe, qui sont infiniment proches comme espaces homogènes, n'ont pas la même cohomologie L^p en degrés 2 et 3.

1.4 Torsion en degré $k \geq 2$

Les théorèmes A, B et D semblent indiquer que la cohomologie L^p est souvent séparée. Ce n'est sans doute pas vrai en général. Dans la famille des produits semi directs de $\mathbf{R}^{n-1}$ par $\mathbf{R}$, la torsion est très largement présente.

Théorème E. *Soit $G = \mathbf{R} \times_\alpha \mathbf{R}^{n-1}$ un produit semi-direct tel que $\operatorname{tr}\alpha \neq 0$. Etant donné $k \leq n-1$, notons $\sigma(k)$ l'ensemble (fini) des parties réelles des valeurs propres de $\Lambda^k\alpha$. Soit $p > 1$ un réel tel que $\operatorname{tr}\alpha/p \notin \sigma(k-2) \cup \sigma(k-1)$. Alors $T^{k,p}(G) \neq 0$ si et seulement si $\operatorname{tr}\alpha/p \in [\min\sigma(k-1), \max\sigma(k-1)]$.*

Par exemple, si les parties réelles $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1}$ des valeurs propres de α satisfont $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-2} < 0 < \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1}$, alors $T^{k,p}(G) \neq 0$ pour tout $p > 1$ et tout $k = 2, \ldots, n-1$.

A l'inverse, si les λ_i sont toutes de même signe, il existe pour tout $k = 2, \ldots, n-1$ des intervalles de valeurs de p pour lesquelles la cohomologie L^p est séparée, ce qui fournit de nouveaux invariants numériques de quasiisométrie. Ces invariants suffisent à séparer certains espaces homogènes à courbure négative.

Corollaire 2 *Considérons la famille de groupes de Lie résolubles obtenus comme produits semi-directs de $\mathbf{R}^{n-1}$ par $\mathbf{R}$ au moyen d'une matrice diagonale de valeurs propres strictement positives. Deux groupes dans cette famille ont même cohomologie L^p si et seulement si ils sont isomorphes. En particulier, ils sont quasiisométriques si et seulement si ils sont isomorphes.*

1.5 Cohomologie réduite en degré $k \geq 2$

Le calcul de la cohomologie réduite $R^{k,p}$ semble plus difficile. Néanmoins, voici quelques observations et exemples.

Théorème F. *Soit M un espace homogène riemannien contractile de dimension n. Alors la cohomologie réduite $R^{0,p}(M) = 0$ et $R^{n,p}(M) = 0$. De plus, $R^{1,p}(M)$ et $R^{n-1,p}(M)$ sont nuls pour tout $p \leq n-1$.*

Inversement, pour tout $n \geq 4$, tout $k = 2, \ldots, n-2$ et tout $p > 1$ il existe un espace homogène riemannien contractile M de dimension n tel que $R^{k,p}(M) \neq 0$. Pour tout $n \geq 2$ et tout $p > n-1$ il existe un espace homogène riemannien contractile M de dimension n tel que $R^{1,p}(M) \neq 0$ et $R^{n-1,p}(M) \neq 0$.

Théorème G. *Soit M un espace homogène riemannien contractile de dimension n. Alors en degrés 0, 1, $n-1$ et n, la cohomologie réduite et la torsion ne peuvent pas être simultanément non nulles.*

Inversement, pour tout $n \geq 4$, tout $k = 2, \ldots, n-2$ et tout $p > n - 2/k - 1$ il existe un espace homogène riemannien contractile M de dimension n tel que $R^{k,p}(M) \neq 0$ et $T^{k,p}(M) \neq 0$ simultanément.

Enfin, I. Singer a conjecturé que pour toute variété simplement connexe à courbure négative possédant possédant un groupe *discret* cocompact d'isométries, il n'existe de formes harmoniques L^2 qu'en un seul degré. Ce n'est pas vrai si on ne suppose pas le groupe discret.

Théorème H. *Pour tout $n \geq 6$, il existe un espace homogène simplement connexe M à courbure négative de dimension n tel que $R^{k,2}(M) \neq 0$ simultanément pour tous les k compris entre 3 et $n-3$.*

1.6 Questions

Voici quelques questions qui se dégagent des exemples étudiés.

1. *Soit M un espace homogène riemannien. Montrer que pour tout $p > 1$ il existe un degré $k = 1, \cdots, \dim M$ tel que $H^{k,p}(M) \neq 0$.* Pour $p = 2$, le résultat est connu et dû à J. Lott, [Lt]. On trouvera un résultat partiel dans cette direction en 96.

2. *Soit M un espace symétrique de rang r. Montrer que pour $k \leq r-1$, $H^{k,p}(M) = 0$ et $H^{r,p}(M)$ est séparé pour tout $p > 1$.* Pour $p = 2$, cela résulte d'une formule de Y. Matsushima, [M], voir aussi [Bo].

3. *Soit G un groupe de Lie résoluble unimodulaire connexe et simplement connexe. Montrer que la torsion $T^{k,p}(G)$ est non nulle en tout degré et pour tout $p > 1$.* C'est connu pour les groupes abéliens (voir en 86), pour certains groupes nilpotents (voir en 88). Pour le groupe SOL, c'est un résultat de V. Goldshtein et M. Troyanov, [GT].

4. *Semi-continuïté. Soit M_j une suite d'espaces homogènes riemanniens qui converge vers M. Si pour tout j, $H^{k,p}(M_j) \neq 0$, est-ce que $H^{k,p}(M) \neq 0$?*

5. *Soit M une variété riemannienne à géométrie bornée. L'ensemble des p tels que $R^{k,p}(M) \neq 0$ est-il ouvert ? L'ensemble des p tels que $T^{k,p}(M) \neq 0$ est-il fermé ?* On trouve des résultats dans cette direction dans [CL].

6. *Soit M une variété riemannienne à géométrie bornée. Alors M admet des fonctions harmoniques non constantes à gradient L^p si et seulement si $R^{1,p}(M) \neq 0$.* C'est trivialement vrai si $p = 2$. Un théorème de N. Lohoué affirme que c'est vrai si M est ouverte à l'infini, [L1].

1.7 Méthode

Les preuves combinent des principes généraux (l'invariance par quasiisométrie, qui permet de se ramener au cas des groupes de Lie résolubles, le lien entre $T^{1,p}$ et l'inégalité isopérimétrique, ou l'annulation de la cohomologie réduite pour un groupe résoluble unimodulaire, [G2]) avec un avatar de la formule de Künneth.

Celle-ci ramène le calcul de la cohomologie L^p d'un produit semi-direct $\mathbf{R} \times H$ au calcul de la cohomologie d'un complexe $\mathcal{B}^{*,p}$ de formes différentielles sur H. L'espace $\mathcal{B}^{*,p}$ est constitué de formes différentielles dont certaines composantes s'annulent et les autres appartiennent à des sortes d'espaces de Besov anisotropes. Par exemple, l'espace hyperbolique réel (à courbure constante) s'écrit $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$ et $\mathcal{B}^{k,p}$ est essentiellement l'espace des k-formes différentielles fermées sur $\mathbf{R}^{n-1}$ à coefficients dans l'espace de Besov $B_{p,p}^{-k+(n-1/p)}$, voir paragraphe 8.2. Autrement dit, la question de savoir si la cohomologie L^p est séparée ou même nulle mêle analyse et algèbre.

Lorsque $p = 2$, la torsion est liée à la présence de spectre proche de 0 pour le laplacien (voir en 13.3). Le calcul de la torsion pour des produits tordus s'apparente à l'étude des petites valeurs propres du laplacien sur les formes dans la limite adiabatique, voir par exemple [MM] ou [F], où les considérations algébriques jouent un grand rôle. La nouveauté tient dans le fait que les poids (la "taille" des fibres) tendent simultanément vers l'infini et vers 0 suivant les directions (mélange de limite adiabatique et antiadiabatique). C'est le caractère antiadiabatique qui produit les espaces de Besov.

1.8 Plan de l'article

La section 2 explique le mécanisme de la formule de Künneth. Celle-ci ne fonctionne pas pour certaines valeurs de p baptisées *exposants critiques*, et calculés dans des exemples en section 3. La formule de Künneth est énoncée en 4, modulo un point technique établi en 5. Les sections 6, 7 et 8 contiennent des exemples et des résultats sur les espaces $\mathcal{B}^{k,p}$. En 9, on en tire deux critères d'annulation de cohomologie, et en 10 un critère d'annulation de la torsion. La preuve du théorème A se trouve en section 11. En 13, on énonce un théorème de M. Gromov sur les espaces homogènes fermés à l'infini et on montre que la cohomologie L^p de l'espace euclidien n'est jamais nulle, de même que celle de certains groupes nilpotents. La dualité de Poincaré, énoncée en 12, est exploitée en 14 pour obtenir des exemples d'espaces homogènes ouverts à l'infini où la cohomologie ne s'annule pas. La section 15 détaille les quelques exemples (espace hyperbolique réel, groupes de Lie de dimension 3, plan hyperbolique complexe) pour lesquels la cohomologie L^p est pratiquement entièrement connue.

1.9 Remerciements

Je tiens à remercier D. Rugina pour les nombreuses conversations que nous avons eues autour de la cohomologie L^p, V. Goldshtein et M. Troyanov, pour leurs marques d'intérêt et leur manuscrit [GT] qui a été une source d'inspiration. Je remercie aussi Y. Benoist pour son aide dans les questions de structure de groupes de Lie.

2 Formule de Künneth

2.1 La formule de Künneth, aspect formels

Soient M_1 et M_2 deux variétés riemanniennes. L'espace des formes différentielles sur le produit $M_1 \times M_2$ est bigradué. En effet,

$$\Lambda^* T^*(M_1 \times M_2) = \Lambda^*(T^*M_1 \oplus T^*M_2) = \bigoplus \Lambda^{p,q}$$

où $\Lambda^{p,q} = \Lambda^p T^*M_1 \times \Lambda^q T^*M_2$.

L'espace $L^p\Omega^*(M_1 \times M_2)$ des formes différentielles L^p sur le produit $M_1 \times M_2$ est un produit tensoriel,

$$L^p\Omega^*(M_1 \times M_2) = L^p\Omega^*(M_1) \otimes L^p\Omega^*(M_2)$$

au sens suivant. Le produit cartésien de formes sur les facteurs,

$$(\omega_1, \omega_2) \to \omega_1 \times \omega_2 = \pi_1^*\omega_1 \wedge \pi_2^*\omega_2$$

est bilinéaire, bigradué, satisfait

$$\| \omega_1 \times \omega_2 \|_{L^p} = \| \omega_1 \|_{L^p} \| \omega_2 \|_{L^p}$$

et son image est dense.

La différentielle d se décompose en

$$d = d_1 + \epsilon d_2$$

où ϵ est un signe, $\epsilon = (-1)^p$ sur $\Lambda^{p,q}$.

Calculer la cohomologie du complexe d, c'est trouver un projecteur P sur un sous-complexe et un opérateur B tel que $1 - P = dB + Bd$. Si $dP = 0$ la cohomologie de d s'identifie au sous-complexe, et le calcul est terminé. Si on a seulement $dP = Pd$, la paire (P, B) constitue néanmoins un pas vers la solution.

Supposons connue une telle paire (P_1, B_1) pour la variété M_1. Prolongeons P_1 et B_1 au produit en les faisant agir trivialement sur les formes sur M_2. Alors

$$dB_1 + B_1 d = d_1 B_1 + B_1 d_1 + \epsilon d_2 B_1 + B_1 \epsilon d_2 = 1 - P_1$$

car B_1 et d_2 commutent, et comme B_1 diminue le degré d'une unité dans la direction de M_1, B_1 et ϵ anticommutent.

Autrement dit, toute information sur la cohomologie de d_1 se traduit par une information sur la cohomologie de d.

2.2 Des produits aux variétés munies de flots

Sur les formes à support compact sur $\mathbf{R}$, on dispose d'opérateurs B explicites. Fixons une fonction χ sur $\mathbf{R}$ qui vaut 0 au voisinage de $-\infty$ et 1 au voisinage de $+\infty$. Sur les fonctions à support compact sur $\mathbf{R}$, on pose $B = 0$. Sur les 1-formes $v\,dt$ à support compact sur $\mathbf{R}$, on pose

$$B_1(v\,dt)(t) = \int_{-\infty}^{t} v(s)\,ds - \chi(t)\int_{\mathbf{R}} v(s)\,ds.$$

Alors $1 - dB_1 - B_1 d = P_1$ où P_1 est nul sur les 0-formes et

$$P_1(v\,dt) = (\int_{\mathbf{R}} v(s)\,ds)d\chi.$$

Autrement dit, P_1 est le projecteur sur le sous-complexe de dimension 1 engendré par la 1-forme $d\chi$.

Sur le sous-complexe de codimension 1 formé des formes dont la composante de degré 1 est d'intégrale nulle, l'opérateur B_1 est unique, c'est l'intégration. Voici une écriture sophistiquée de cet opérateur. On note ξ le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial t}$ sur $\mathbf{R}$, et $\phi_t : s \mapsto s + t$ le groupe à un paramètre de translations qu'il engendre. Alors

$$B_1\omega = \int_{-\infty}^{0} \phi_t^*(\iota_\xi\omega)\,dt$$

où ι_ξ, produit intérieur par le champ de vecteurs ξ, est nul en degré 0 et efface le dt en degré 1. On peut tout aussi bien écrire

$$B_1\omega = -\int_{0}^{+\infty} \phi_t^*(\iota_\xi\omega)\,dt.$$

Soit M_2 une variété. Comme on l'a vu au paragraphe 2.1, l'opérateur B_1 qui inverse la différentielle sur le facteur $\mathbf{R}$ se prolonge à $\mathbf{R} \times M_2$. L'opérateur obtenu n'est autre que

$$B_1\omega = \int_{-\infty}^{0} \phi_t^*(\iota_\xi\omega)\,dt$$

où ϕ_t est le groupe à un paramètre de translations le long du facteur $\mathbf{R}$. De plus $P_1 = 1 - dB_1 - B_1 d$ est à valeurs dans les formes sur M_2, autrement dit, les formes ω sur le produit qui satisfont $\iota_\xi\omega = \iota_\xi d\omega = 0$.

2.3 Généralisation

Plus généralement, soit M une variété riemannienne complète et ξ un champ de vecteurs unitaire sur M. Une condition suffisante pour que la formule

$$B^-\omega = \int_{-\infty}^{0} \phi_t^*(\iota_\xi\omega)\,dt$$

définisse un opérateur borné sur les k-formes L^p est qu'il existe des constantes $\eta > 0$ et C telles que pour tout $t \leq 0$ et toute k-forme ω,

$$\| \phi_t^*\iota_\xi\omega \|_{L^p(M)} \leq C\,e^{\eta t}\| \iota_\xi\omega \|_{L^p(M)}.$$

Lorsque c'est le cas, on dit que le champ ξ est $(k-1,p)$-*contractant*. De même, on dit que le champ ξ est $(k-1,p)$-*dilatant* si pour tout $t \geq 0$ et toute k-forme ω,

$$\| \phi_t^*\iota_\xi\omega \|_{L^p(M)} \leq C\,e^{-\eta t}\| \iota_\xi\omega \|_{L^p(M)}$$

pour un $\eta > 0$. Si c'est le cas, l'opérateur

$$B^+\omega = -\int_0^{+\infty} \phi_t^*(\iota_\xi \omega)\, dt$$

est borné sur les k-formes L^p.

Supposons que le champ ξ soit pour chaque degré k, ou bien $(k-1,p)$-contractant, ou bien (k,p)-dilatant. On définit un opérateur borné B sur les formes L^p sur M qui en chaque degré vaut B^+ ou B^- suivant les propriétés de contraction du champ. Comme B^+ et B^- satisfont $\iota_\xi B^\pm = \iota_\xi(1-dB^\pm) = 0$, l'opérateur $P = 1 - dB - Bd$ est à valeurs dans le sous-complexe $\mathcal{B}^{*,p} = \ker \iota_\xi \cap \ker \iota_\xi d$ de $L^p + dL^p$.

On montre (voir le théorème 1) que si M est à géométrie bornée, $P = 1 - dB - Bd$ induit un isomorphisme du complexe entre $\Omega^{*,p}(H^n)$ et $\mathcal{B}^{*,p}$. Les éléments de $\mathcal{B}^{*,p}$, formes basiques par rapport au champ ξ, s'identifient (au moins localement) avec un espace de formes différentielles sur une transversale, à coefficients dans un espace fonctionnel interemédiaire entre L^p et L^p_{-1}.

2.4 Cohomologie L^p de l'espace hyperbolique réel

On illustre la méthode sur l'exemple le plus simple. L'espace hyperbolique réel H^n est la variété $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$ (avec coordonnées t et $x = (x_1, \ldots, x_{n-1})$) munie d'une métrique de produit tordu $ds^2 = dt^2 + e^{2t}dx^2$.

Soit $p > 1$. On constate que le champ de vecteur $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ est (k,p)-dilatant si et seulement si $n - 1 - p(k-1) > 0$ et (k,p)-contractant si et seulement si $n - 1 - p(k-1) < 0$.

La méthode du paragraphe précédent s'applique si et seulement si $1 + (n-1)/p$ n'est pas un entier inférieur à n. Dans ce cas, on définit un opérateur borné B sur les formes L^p sur H^n qui vaut B^+ sur les formes de degré $< 1 + (n-1)/p$ et B^- sur les formes de degré $> 1 + (n-1)/p$.

Comme on l'attend d'une formule de Künneth, l'espace $\mathcal{B}^{*,p}$ peut être vu comme un espace de formes différentielles sur le facteur $\mathbf{R}^{n-1}$. Néanmoins, la norme obtenue n'est pas la norme L^p sur les formes sur $\mathbf{R}^{n-1}$.

On montrera en 8.2 que $\mathcal{B}^{k,p}$ est nul sauf pour une seule valeur de k, la partie entière de $1+(n-1)/p$. Pour cette valeur, $\mathcal{B}^{k,p}$ est l'espace des k-formes fermées sur $\mathbf{R}^{n-1}$ dont les coefficients sont dans l'espace de Besov $B_{p,p}^{-k+(n-1/p)}(\mathbf{R}^{n-1})$.

Ce qu'il faut retenir à ce niveau, c'est que la formule de Künneth généralisée concerne des variétés riemanniennes munies d'un champ de vecteurs unitaire. La méthode s'applique pour un ensemble de valeurs de p qui dépend des propriétés de contraction du champ de vecteurs.

3 Exposants critiques

On note $Gl^+(n-1)$ le groupe des matrices $n-1 \times n-1$ de déterminant strictement positif. On considère des représentations linéaires ρ du groupe $Gl^+(n-1)$ sur des espaces euclidiens, qui ont la propriété que le sous-groupe $SO(n-1)$ agit par isométries. Si M est une variété orientée de dimension n portant un champ de vecteurs ξ qui ne s'annule pas, on construit le fibré E_ρ associé au fibré des repères directs ayant ξ comme premier vecteur. Tout difféomorphisme préservant l'orientation et le champ ξ agit sur le fibré E_ρ. Si de plus M porte une métrique riemannienne, alors E_ρ porte une métrique lui aussi.

Définition 3 *Soit M une variété riemannienne complète. Soit ξ un champ de vecteurs unitaire sur M. Soit ρ une représentation linéaire du groupe $Gl^+(n-1)$. On dit que ξ est ρ-*Anosov* s'il existe des constantes positives C et η et une décomposition*

$$E_\rho = E_\rho^+ \oplus E_\rho^-$$

invariante par le flot ϕ_t de ξ, et telle que

- *quasi-orthogonalité : si $e_\pm \in E_\rho^\pm$, alors*

$$|e_+|^2 + |e_-|^2 \leq C\,|e_+ + e_-|^2;$$

- *contraction : si $e \in E_\rho^\pm$, alors pour tout $t \geq 0$,*

$$|\phi_{\pm t}(e)| \leq C\,e^{-\eta t}.$$

Soit $p \geq 1$. On dit que ξ est (k,p)-Anosov, *ou bien que p est un* exposant non critique en degré *k si ξ est ρ-Anosov pour la représentation $\rho = \Lambda^k \otimes (det)^{-1/p}$ de $Gl^+(n-1)$.*

On dit que ξ est (k,p)-contractant *si ξ est (k,p)-Anosov et $\Lambda_+^k = 0$. On dit que ξ est* (k,p)-dilatant *si $-\xi$ est (k,p)-contractant.*

Concrètement, pour $\rho = \Lambda^k$, les sections du fibré E_ρ s'identifie aux k-formes différentielles sur M annulées par le produit intérieur par ξ, ι_ξ. Une décomposition (k,p)-Anosov est une décomposition quasi-orthogonale

$$\Lambda^k T^*M \cap \ker \iota_\xi = \Lambda_+ \oplus \Lambda_-$$

telle que

$$|(\Lambda^k d\phi_{\pm t})_{|\Lambda_\pm}|^p \leq \text{const.}e^{-\eta t} Jac(\phi_t)$$

pour tout $t \geq 0$.

Remarque. Un champ de vecteurs est Anosov au sens des systèmes dynamiques si et seulement si il est $(0,+\infty)$-Anosov.

Remarque. Si la divergence $div(\xi)$ est bornée, alors les exposants non critiques forment un ouvert de $]1,+\infty]$.

Exemple. S'il existe $\eta > 0$ tel que $div(\xi) \geq \eta$, alors tout exposant $p \geq 1$ est non critique en degrés 0 et $n-1$.

En effet, si $k = 0$ ou $k = n-1$, $\Lambda^k T^*M \cap \ker \iota_\xi$ est de dimension 1, $\Lambda^0 d\phi_t$ est l'identité, $|\Lambda^{n-1} d\phi_t| = Jac(\phi_t) \geq e^{\eta t}$.

Les deux paragraphes suivants donnent des exemples moins triviaux.

3.1 Groupes de Lie

Proposition 4 *Soit G un groupe de Lie muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche. Soit ξ un champ de vecteur invariant à gauche sur G. On note $h = \mathrm{tr}\, ad_\xi$. Un réel $p \geq 1$ est un exposant critique en degré k pour ξ si et seulement si h/p est la partie réelle d'une valeur propre de $(\Lambda^k ad_\xi)_{|\Lambda^k \xi^\perp}$.*

Preuve. Soit $\Lambda_+^k \subset \Lambda^k \mathcal{G}^* \cap \ker \iota_\xi = \Lambda^k \xi^\perp$ (resp. Λ_-^k) la somme des espaces caractéristiques de $\Lambda^k ad_\xi$ relatifs à des valeurs propres w telles que $h - pw > 0$ (resp. $h - pw < 0$). On note de la même façon les sous-fibrés obtenus en translatant à gauche ces sous-espaces. Notons η_0 le plus petit des nombres $|h - pw|$ où w décrit les valeurs propres de $\Lambda^k ad_\xi$ sur $\Lambda^k \xi^\perp$. Fixons un $\eta < \eta_0$.

Par définition, $L_{\exp -t\xi} \circ R_{\exp t\xi} = Ad_{\exp t\xi} = \exp(t\, ad_\xi)$. Comme les sous-fibrés $\Lambda_\pm^*$ sont invariants par ad_ξ, ils sont invariants par les translations à droite $\phi_t = R_{\exp t\xi}$ qui constituent le flot de ξ.

Le champ de vecteurs ξ a une divergence constante égale à h, donc le jacobien de son flot vaut exactement e^{ht}.

Soit $\omega \in \Lambda_+^k$ une forme différentielle invariante à gauche qui est dans l'image de i. On a

$$(\phi_t)^*\omega = Ad^*_{\exp t\xi}\omega = (\exp t\, ad_\xi)^*\omega.$$

Comme $\eta < \eta_0$, il existe une constante indépendante de ω et de t telle que pour tout $t \geq 0$,

$$|(\exp t\, ad_\xi)^*\omega| \leq \text{const.}e^{t(h-\eta)/p}|\omega|.$$

Il vient
$$|(\phi_t)^*\omega|^p = \mathrm{const}.e^{-\eta t}J(\phi_t)|\omega|^p.$$
On conclut que p est non critique en degré k.

Inversement, s'il existe un couple de valeurs propres $(\lambda, \overline{\lambda})$ de $(\Lambda^k ad_\xi)_{|\Lambda^k\xi^\perp}$ de partie réelle h/p, alors sur la partie réelle de la somme des sous-espaces caractéristiques correspondants, $\| \exp t\, ad_\xi \|$ est polynomial en t donc ne décroît pas exponentiellement, et p est critique en degré k. ∎

Corollaire 5 *Si G n'est pas unimodulaire, un champ de vecteurs invariant à gauche générique sur G a au plus un nombre fini d'exposants critiques.*

Exemple. Produits semi-directs. Soit H un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathcal{H}$. Soit α une dérivation de $\mathcal{H}$. Soit $G = \mathbf{R} \times H$ muni de la multiplication
$$(t,h)(t',h') = (t+t', e^{t\alpha}(h)h').$$
Soit ξ le champ de vecteurs invariant à gauche correspondant au facteur $\mathbf{R}$. Alors $\xi^\perp$ s'identifie à $\mathcal{H}^*$, $ad_{\xi\,|\xi^\perp}$ à α et $d\phi_t$ à $\exp t\alpha$. Cela fournit une grande variété d'exemples.

Exemple. Soit $G = \mathbf{R} \times_\alpha \mathbf{R}^2$ le produit semi-direct défini par la dérivation $\alpha = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si $\lambda > 0$, G est à courbure sectionnelle strictement négative. G est unimodulaire si et seulement si $\lambda = -1$. Si $\lambda = 0$, G est le produit riemannien d'une droite et d'un plan hyperbolique. Noter que pour tout $\ell \neq 0$, les groupes obtenus pour les valeurs ℓ et $1/\ell$ de λ sont isomorphes. Par conséquent, sans perdre de généralité, on peut se limiter aux valeurs de $\lambda \in [-1,1]$.

On s'intéresse au champ de vecteurs invariant à gauche correspondant au facteur $\mathbf{R}$. Si $\lambda \neq -1$, il n'a d'exposants critiques qu'en degré 1, il en a deux (ce sont $p = 1+1/\lambda$ et $p = 1+\lambda$) si $\lambda \neq 0,\ 1$, un (c'est $p = 2$) si $\lambda = 1$ et aucun si $\lambda = 0$.

Si $\lambda = -1$, tout exposant $p \geq 1$ est critique en degrés 0 et 2. En degré 1, aucun exposant n'est critique.

Exemple. Espace hyperbolique réel de dimension n. Soit G le groupe des dilatations translations de $\mathbf{R}^{n-1}$. Alors G agit simplement transitivement sur l'espace hyperbolique réel de dimension n. Soit ξ le champ de vecteur invariant à gauche correspondant aux dilatations. Sur $\xi^\perp$, ad_ξ est l'identité. Il y a exactement un exposant critique pour chaque degré $k = 1, \ldots, n-1$, c'est $p = n - 1/k$. Il n'y en a pas en degrés 0.

Exemple. Espace hyperbolique complexe. Soit G le groupe des dilatations translations du groupe de Heisenberg N de dimension $2m-1$. Alors G agit simplement transitivement sur l'espace hyperbolique complexe de dimension réelle $n = 2m$, i.e., la boule de $\mathbf{C}^m$ munie de sa métrique de Bergmann. Soit ξ le champ de vecteurs invariant à gauche correspondant aux dilatations. Sur $\xi^\perp$, ad_ξ vaut 2 fois l'identité sur le centre et l'identité sur un supplémentaire.

Aucun exposant n'est critique en degré 0. Seul 1 est critique en degré $n-1$. En chaque degré $k = 1, \ldots, n-2$, il y a exactement deux exposants critiques, $p = n/k$ et $p = n/k + 1$.

Exemple. Soit G le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de $Sl(3,\mathbf{R})$. Alors G agit simplement transitivement sur l'espace symétrique $Sl(3,\mathbf{R})/SO(3)$. Soit ξ le vecteur de $\mathcal{G}$ donné par la matrice diagonale $diag(-1/3,-1/3,2/3)$. Alors ad_ξ est diagonalisable, de valeurs propres 0 (multiplicité 3) et 1 (multiplicité 2).

Le seul exposant critique est $p = 2$, critique en degrés 1, 2 et 3.

3.2 Actions de $\mathbf{R}^\ell$

Définition 6 Soit M une variété riemannienne complète, munie d'une action de $\mathbf{R}^\ell$. On dit que $p > 1$ est un *exposant non critique en degré k pour l'action de $\mathbf{R}^\ell$* s'il existe un vecteur non nul $\xi \in \mathbf{R}^\ell$ qui est (k,p)-Anosov.

Exemple. Soit $G = \mathbf{R}^\ell \times H$ un produit semi-direct. Les valeurs propres de ad_ξ deviennent des formes linéaires sur $\mathbf{R}^\ell$, appelées *racines*. Soit Σ l'ensemble des racines. Alors *p est non critique en degré k si et seulement si pour tout sous-ensemble de Σ à s éléments, $k - \ell + 1 \leq s \leq k$, la forme linéaire*

$$\sum_{\alpha \in \Sigma} \alpha - p \sum_{\alpha \in I} \alpha$$

sur $\mathbf{R}^\ell$ est non nulle.

Remarque. Si la forme linéaire $\tau = \sum_{\alpha \in \Sigma} \alpha$ sur $\mathbf{R}^\ell$ n'est pas nulle, il n'y a qu'un nombre fini d'exposants critiques.

Exemple. Tout espace symétrique de type non compact $M = G/K$ est isométrique à un produit semi-direct $\mathbf{R}^r \times N$ où r est le rang et N le sous-groupe unipotent minimal de G. Les racines de l'action de $\mathbf{R}^r$ sur N sont les racines positives de l'espace symétrique. La somme des racines positives est toujours non nulle. Il n'y a donc qu'un nombre fini d'exposants critiques. La question de savoir s'il y en a ou non est plus subtile. On traite (imparfaitement) le cas de $G = SL(q, \mathbf{R})$.

Lemme 7 *Soit $G = KAN$ la décomposition d'Iwasawa de $G = SL(q, \mathbf{R})$. On voit l'espace symétrique $M = G/K$ comme le produit semi-direct AN. Pour q pair, il n'y a aucun exposant critique en aucun degré. Si q est impair, le seul exposant critique est 2, et seulement dans certains degrés compris entre $(q^2-1)/8$ et $q(q-1)/2 - (q^2-1)/8 + q - 2$.*

Preuve. Le groupe A est le groupe des matrices diagonales $diag\{e^{x_1}, \cdots, e^{x_q}\}$ telles que $\sum x_i = 0$. Pour $\xi \in A$, les valeurs propres de ad_ξ sont les racines positives de l'espace symétrique, i.e. les $\alpha_{i,j}(\xi) = x_i - x_j$ où

$$(i,j) \in \Sigma_+ = \{(i,j) \mid i,\ j \in \{1, \cdots, q\},\ i < j\},$$

auxquelles il faut ajouter 0 compté $r - 1 = q - 2$ fois.

On cherche les sous ensembles I de Σ_+ tels que, pour un $p > 1$,

$$p \sum_{(i,j) \in I} \alpha_{i,j} = \sum_{(i,j) \in \Sigma_+} \alpha_{i,j}. \tag{1}$$

On calcule $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\Sigma_+} \alpha_{i,j} = \sum_{i=1}^{q} (q+1-2i)x_i$. D'autre part, pour tout $I \subset \Sigma_+$, $\sum_{(i,j)\in I} \alpha_{i,j} = \sum_{i=1}^{q} b_i x_i$ où les b_i sont des entiers. Si I et p sont solutions de (1), alors $2 = q+1-2-(q+1-4) = p(b_1 - b_2)$, donc p est rationnel et son numérateur divise 2. Comme $p > 1$, on conclut que $p = 2$. D'autre part, $q + 1 - 2 = 2b_1$ est pair, donc q est impair. On note $q' = q - 1/2$.

Soit

$$I_0 = \{(i,j) \in \Sigma_+ \mid j - i > q'\}$$

et I_1 son complémentaire,

$$I_1 = \{(i,j) \in \Sigma_+ \mid j - i \leq q'\}.$$

Montrons que I_0 et I_1 sont solutions de (1). Pour cela, on utilise la base $\alpha_{k,k+1}$, $k = 1, \cdots, q-1$. Notons R_k l'ensemble des couples (i,j) tels que $i \leq k < j$ (de sorte que $\#R_k = k(q-k)$). Alors pour tout $I \subset \Sigma_+$, $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I} \alpha_{i,j} = \sum_k a_k(I)\alpha_{k,k+1}$ où

$$a_k(I) = \#I \cap R_k.$$

On vérifie que $a_k(I_0) = a_{q-k}(I_0)$ et pour $k \leq q'$,

$$a_k(I_0) = \#I_0 \cap R_k = \sum_{i=1}^{k} q - q' - i = k(q-q') - \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(q-k)}{2}.$$

On va montrer que toute solution de (1) a un cardinal compris entre $\#I_0$ et $\#I_1$. Si $I \subset \Sigma_+$, on note

$$S(I) = \sum_{(i,j)\in I} j-i.$$

Etant donné un entier $s \leq q(q-1)/2$, on note $S_M(s)$ (resp. $S_m(s)$) le maximum de S sur les parties à s éléments de Σ_+. En déplaçant un à un les éléments de I pour les éloigner de la diagonale, on ne peut qu'augmenter le nombre $S(I)$. Par conséquent, pour chaque entier s, parmi toutes les parties I de Σ_+ telles que $\#I = s$, celles qui maximisent S s'obtiennent en remplissant au maximum les diagonales en descendant $\{(1,q)\}$, $\{(1,q-1),(2,q)\}$, $\{(1,q-2),(2,q-1),(3,q)\}$, etc...Par exemple, si $s = q'(q'-1)/2$, $S_M(s)$ est atteint par I_0 et si $s = q(q-1)/2 - q'(q'-1)/2$, $S_m(s)$ est atteint par I_1. Clairement, les fonctions S_M et S_m sont strictement croissantes.

Notons ξ de vecteur de composantes $x_i = i - q(q+1)/2$. On a

$$S(I) = \sum_{(i,j)\in I} \alpha_{i,j}(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{(i,j)\in\Sigma_+} \alpha_{i,j}(\xi) = S(I_0) = S(I_1)$$

donc

$$S_M(\#I_0) = S(I_0) = S(I) \leq S_M(\#I), \quad S_m(\#I_1) = S(I_1) = S(I) \geq S_m(\#I).$$

Comme, S_M et S_m sont strictement croissantes, on conclut que

$$\frac{q'(q'+1)}{2} = \#I_0 \leq \#I \leq \#I_1 = \frac{q(q-1)}{2} - \frac{q'(q'+1)}{2}.$$

Soit k un entier, $k \leq \dim M - 1 = q(q-1)/2 + q - 2$. Alors p est un exposant critique en degré k si et seulement si $k = s + k - s$ où $k - s \leq q - 2$ et il existe une partie I à s éléments de Σ_+ qui est solution de (1). Ceci ne se produit que si q est impair, $p = 2$ et $q'(q'+1)/2 \leq s \leq q(q-1)/2 - q'(q'+1)/2$. Par conséquent le seul exposant critique est $p = 2$, et il n'est pas critique en degré k si $k < q'(q'+1)/2 = (q^2-1)/8$ ou si $k > q(q-1)/2 - q'(q'+1)/2 + q - 2$. ∎

Remarque. D'après [Be], la situation est sensiblement la même pour les autres groupes simples *déployés*, comme $SO(q,q+1)$, $Sp(q,\mathbf{R})$, $SO(q,q)$.

3.3 Variétés à courbure négative

Soit M une variété riemannienne à courbure négative. Etant donné $x \in M$, on note ξ_x le gradient de la fonction distance à x. Lorsque x tend vers l'infini le long d'un rayon géodésique ρ, le champ ξ_x converge vers un champ de vecteurs ξ_ρ de classe C^∞, de norme 1, appelé *champ de vecteurs de Busemann*. La dérivée de ξ_ρ est contrôlée par la courbure sectionnelle. Si celle-ci est suffisamment *pincée*, i.e. proche de -1, ξ_ρ admet des exposants non critiques.

Proposition 8 *Soit M une variété riemannienne complète de dimension n, simplement connexe, dont la courbure sectionnelle K satisfait $-1 \leq K \leq \delta < 0$. Soit ξ un champ de vecteurs de Busemann. Si $k = 0, \cdots, n-1$ et si $p > 1$ satisfait*

$$p < 1 + \frac{n-k-1}{k}\sqrt{-\delta}, \qquad (\textit{resp. } p > 1 + \frac{n-k-1}{k\sqrt{-\delta}}),$$

alors le champ ξ est (k,p)-contractant (resp. (k,p)-dilatant).

Preuve. Notons ϕ_t le flot de ξ. Ses trajectoires sont des géodésiques parcourues à vitesse 1. Soit $x \in M$. La quantité à majorer est

$$n(t,x) = \log \| \, (\Lambda^k d\phi_t)_{|\Lambda^k\xi^\perp} \, \| - \log det(d\phi_t).$$

Elle satisfait, pour tous s et t, $n(t+s,x) = n(s,\phi_t(x)) + n(t,x)$.

Notons τ_t le transport parallèle de $\phi_t(x)$ à x le long de la géodésique $s \mapsto \phi_s(x)$. Alors $\tau_t d\phi_t$ préserve l'hyperplan orthogonal à $\xi(x)$. Notons $J(t)$ sa matrice dans une base orthonormée de $\xi(x)^{\perp}$, de sorte que $n(t,x) = p \log \| \Lambda^k J(t) \| - \log det(J(t))$.

Comme ξ est un gradient, la matrice $U(t) = J(t)^{-1}J'(t)$, seconde forme fondamentale des hypersurfaces de niveau, est symétrique. Comme les colonnes de J sont des champs de Jacobi, la matrice $U(t)$ satisfait l'équation de Riccati

$$U' + U^2 + R = 0$$

où R est la matrice de l'opérateur de courbure $v \mapsto R(v,\xi)\xi$. Classiquement (voir par exemple [BK]), on en tire une estimation des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ de U,

$$\sqrt{-\delta} \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1} \leq 1.$$

Comme $J(0) = I$ est l'identité, $J(t) = I + tU(0) + o(t)$ donc $\| \Lambda^k J(t) \| \leq 1 + |t| \| \mathcal{D}^k U(0) \| + o(t)$ où $\mathcal{D}^k U$ désigne l'extension de U comme dérivation de l'algèbre extérieure. On peut donc majorer la dérivée à droite

$$\begin{aligned}
n'(0+) = \frac{\partial n}{\partial t}(0,x) &\leq p \| \mathcal{D}^k U(0) \| - \mathrm{trU(0)} \\
&\leq p(\sum_{i=n-k}^{n-1} \lambda_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \\
&= (p-1)(\sum_{i=n-k}^{n-1} \lambda_i) - \sum_{i=1}^{n-k-1} \lambda_i \\
&\leq k(p-1) - (n-k-1)\sqrt{-\delta}.
\end{aligned}$$

En dérivant l'équation $n(t+s,x) = n(s,\phi_t(x)) + n(t,x)$, on trouve que $n'(t+,x) = n'(0+,\phi_t(x)) \leq k(p-1) - (n-k-1)\sqrt{-\delta}$ pour tout t. En intégrant, il vient pour tout $t \in \mathbf{R}$

$$\| (\Lambda^k d\phi_t)_{|\Lambda^k \xi^{\perp}} \|^p \leq e^{-\eta t} Jac(\phi_t)$$

avec $\eta = (n-k-1)\sqrt{-\delta} - k(p-1)$. Si $\eta > 0$, i.e. si la courbure est suffisamment pincée, on peut poser $\Lambda_- = 0$, utiliser cette inégalité seulement pour $t \geq 0$ et conclure que p est non critique en degré k.

Si on remplace ξ par $-\xi$, les valeurs propres λ_i de la seconde forme fondamentale sont remplacées par $\mu_i = -\lambda_{n-i}$ qui satisfont

$$-1 \leq \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_{n-1} \leq -\sqrt{-\delta}.$$

La nouvelle fonction $\tilde{n}(t,x) = n(-t,x)$ satisfait

$$\begin{aligned}
\tilde{n}'(0+) &\leq p(\sum_{i=n-k}^{n-1} \mu_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \\
&= (p-1)(\sum_{i=n-k}^{n-1} \mu_i) - \sum_{i=1}^{n-k-1} \mu_i \\
&\leq k(p-1)(-\sqrt{-\delta}) + (n-k-1).
\end{aligned}$$

Il vient

$$\| (\Lambda^k d\phi_t)_{|\Lambda^k \xi^{\perp}} \|^p \leq e^{\eta' t} Jac(\phi_t)$$

avec $\eta' = k(p-1)\sqrt{-\delta} - n + k + 1$. Si $\eta' > 0$, on peut poser $\Lambda_- = 0$, utiliser cette inégalité seulement pour $t \leq 0$ et conclure que p est non critique en degré k. ∎

Remarque 9 Dans l'argument ci-dessus, les inégalités sont optimales sauf celle où on remplace certaines valeurs propres par la borne inférieure $\sqrt{-\delta}$ et d'autres par la borne supérieure 1. Il existe de nombreux exemples d'espaces homogènes à courbure négative pour lesquels les valeurs propres prennent exactement deux valeurs égales aux bornes de la courbure sectionnelle.

Exemple. Les espaces symétriques de rang un. La courbure sectionnelle varie entre -1 et $-1/4$. Les valeurs propres sont $1/2$ (avec multiplicité $2m-2$ pour l'espace hyperbolique complexe $\mathbf{C}H^m$, $m \geq 2$, $4m-4$ pour l'espace hyperbolique quaternionien $\mathbf{H}H^m$, $m \geq 2$, 8 pour le plan hyperbolique des octaves de Cayley $\mathbf{Ca}H^2$), et 1 avec multiplicité complémentaire.

Exemple. Soient $1 \leq \mu < n$ des entiers et $\delta \in]-1,0[$. Soit $G_{\mu,n,\delta}$ le produit semi-direct $G = \mathbf{R} \times_\alpha \mathbf{R}^{n-1}$ où α est une matrice diagonale avec seulement deux valeurs propres distinctes 1 et $\sqrt{-\delta} < 1$ de multiplicités $\mu - 1$ et $n - \mu$. La métrique invariante $dt^2 + e^{2t}dx^2 + e^{2t\sqrt{-\delta}}dy^2$ (où x regroupe les $\mu - 1$ premières coordonnées de $\mathbf{R}^{n-1}$ et y les $n-\mu$ suivantes) a une courbure sectionnelle comprise entre -1 et $-\delta$.

Dans les deux familles d'exemples, on constate que la borne $1+(n-\mu)\sqrt{-\delta}/\mu-1$, qui apparaît dans la proposition 8, est critique en degré $\mu - 1$.

4 Formule de Künneth généralisée

Dans cette section, on démontre le principal résultat technique de cet article, le théorème 1.

4.1 L'opérateur B

Proposition 10 *Soit $p \geq 1$. Soit M une variété riemannienne complète, soit ξ un champ de vecteurs unitaire (k,p)-Anosov sur M, de flot ϕ_t. On note $\Lambda_+ \oplus \Lambda_-$ la décomposition (k,p)-Anosov des k-formes annulées par ι_ξ. Etant donnée une $k+1$-forme différentielle ω sur M, on note $\iota_\xi\omega = i\omega_+ + i\omega_-$ où $i\omega_\pm \in \Lambda_\pm$. Alors les opérateurs*

$$i = \iota_\xi = \text{ produit intérieur par } \xi$$

et

$$B : \omega \mapsto \int_{-\infty}^{0} (\phi_t)^* i\omega_- \, dt - \int_0^{+\infty} (\phi_t)^* i\omega_+ \, dt$$

sont bornés sur L^p. De plus, il satisfont $Bi = iB = 0$, $i(1-dB) = 0$.

Preuve. Par hypothèse, pour tout $x \in M$ et tout $t \geq 0$,

$$|(\phi_t)^* i\omega_+|^p(x) \leq \text{const}.e^{-\eta t}|i\omega_+|^p(\phi_t x)J_{\phi_t}(x)$$

donc

$$\int_M |(\phi_t)^* i\omega_+|^p(x)\, dx \leq \text{const}.e^{-\eta t} \int_M |\omega|^p(\phi_t x)J_{\phi_t}(x)\, dx = \text{const}.e^{-\eta t} \int_M |\omega|^p(z)\, dz.$$

Par conséquent, la fonction $t \mapsto \| (\phi_t)^* i\omega_+ \|_{L^p}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$, la seconde intégrale converge dans $L^p\Omega^k(M)$ et

$$\| (\phi_t)^* i\omega_+ \|_{L^p} \leq \frac{1}{\eta} \| i\omega_+ \|_{L^p}.$$

Il vient $\| B\omega \| \leq \eta^{-1} \| \omega \|$.

L'opérateur i est évidemment borné sur L^p. Comme il commute avec ϕ_t, il commute avec B d'où $iB = Bi = 0$. Par construction, si $\mathcal{L}_\xi$ désigne la dérivée de Lie suivant ξ, alors $i = \mathcal{L}_\xi \circ B = (di + id)B = idB$. ∎

4.2 L'espace $L^p + dL^p$

Si $\omega \in L^p$ et $d\omega \in L^p$, en général $dB\omega$ n'est pas L^p. C'est pourquoi l'opérateur $P = 1 - dB - Bd$ ne fournit pas un isomorphisme du complexe $\Omega^{*,p}$ avec un de ses sous-complexes.

Définition 11 On *note* $L^p + dL^p$ l'espace des formes différentielles sur M qui peuvent s'écrire comme somme d'une forme L^p et de la différentielle extérieure d'une forme L^p. On le munit de la *norme*

$$\| \omega \|_{L^p + dL^p} = \inf\{(\| \beta \|^p_{L^p} + \| \gamma \|^p_{L^p})^{1/p} \ ; \ \beta \in L^p\Omega^k(M), \ \gamma \in L^p\Omega^{k-1}(M), \ \omega = \beta + d\gamma\}.$$

Remarque. L'espace $L^p + dL^p$ est complet et invariant par d. L'opérateur $P : \Omega^{*,p}(M) \to L^p + dL^p$ est borné.

4.3 Le complexe des formes basiques

Définition 12 Soit M une variété riemannienne complète, ξ un champ de vecteurs borné sur M. On *note* $\mathcal{B}^{*,p}(M, \xi) \subset L^p + dL^p$ le sous-complexe des formes qui annulent $i = \iota_\xi$ et id.

Soit $G = \mathbf{R} \times H$ un produit semi-direct. Notons $\pi : G \to H$ la projection le long des orbites du champ de vecteurs ξ correspondant à l'action à droite du facteur $\mathbf{R}$. L'opération π^*, image inverse par π, identifie $\mathcal{B}^{*,p}(G, \xi)$ à un sous-complexe de formes différentielles sur H, qu'on note $\mathcal{B}^{*,p}$. La nature de cet espace ne saute pas aux yeux. Il s'avère qu'il est souvent nul. Lorsqu'il ne l'est pas, c'est un espace fonctionnel constitué de formes dont les coefficients ont des dérivées fractionnaires dans L^p.

4.4 Théorème principal

Théorème 1 *Soit M une variété riemannienne complète, ξ un champ de vecteurs unitaire sur M. Soit $p \geq 1$. On suppose qu'il existe des opérateurs bornés S et T sur les formes différentielles L^p tels que*

1. *$Sd = dS$ et $1 - S = dT + Td$;*
2. *dS est borné sur L^p ;*
3. *$(iT - Ti)d$ est borné sur L^p.*

Si le champ ξ est $(k-1, p)$-Anosov, alors $S : H^k(\mathcal{B}^{*,p}(M, \xi)) \to H^{k,p}(M)$ est surjectif. Si ξ est $(k-2, p)-$ et $(k-1, p)$-Anosov, alors $S : H^k(\mathcal{B}^{*,p}(M, \xi)) \to H^{k,p}(M)$ est un isomorphisme. Si ξ est (j, p)-Anosov pour tout $j = 0, \cdots, n-1$, alors l'opérateur S réalise une équivalence d'homotopie entre les complexes $\mathcal{B}^{*,p}(M, \xi)$ et $\Omega^{*,p}(M)$.

Preuve. Supposons dans un premier temps que p n'est critique pour aucun degré (i.e., que ξ est (j, p)-Anosov pour tout $j = 0, \cdots, n-1$). Par construction, si $\omega \in \Omega^{k,p}(M)$, alors $P\omega \in L^p + dL^p$. Comme $iP = idP = 0$, $P\omega \in \mathcal{B}^{*,p}$, donc P est un morphisme de complexes $\Omega^{*,p}(M) \to \mathcal{B}^{*,p}(M, \xi)$.

Comme $dS = Sd$ est borné sur L^p, S et dS envoient L^p et dL^p dans L^p. Par conséquent, S est un morphisme de complexes $\mathcal{B}^{*,p}(M, \xi) \to \Omega^{*,p}(M)$.

On a $SP = 1 - d(T + SB) - (T + SB)d$. Comme $dT = 1 - S - Td$, T est borné de $\Omega^{*,p}(M)$ dans lui-même. Quant à SB, il envoie L^p dans $\Omega^{*,p}(M)$, donc a fortiori $\Omega^{*,p}(M)$ dans lui-même.

On pose $PS = 1 - d(B + PT) - (B + PT)d$. On remarque que $B + PT$ envoie $\ker i \cap \ker id$ dans lui-même. De plus

$$\begin{aligned} B + PT &= B + (1 - dB - Bd)T \\ &= B + T - dBiT - Bi(1 - S - Td) \\ &= T + BS - dB[i, T] + B[i, T]d - dBTi + BTid. \end{aligned}$$

Sur $\ker i \cap \ker id$, $B+PT$ coïncide avec l'opérateur $T+BS-dB[i,T]+B[i,T]d$ qui est borné sur L^p+dL^p, donc $B+PT$ est borné de $\mathcal{B}^{*,p}(M,\xi)$ dans lui-même.

Supposons seulement que p est non critique en degrés $k-2$ et $k-1$. Alors P est défini sur les $k-1$-formes ainsi que sur les k-formes fermées. L'identité $dP=Pd$ est satisfaite sur $\Omega^{k-1,p}(M)$, donc P passe au quotient $H^{k,p}(M)\to H^k(\mathcal{B}^{*,p}(M,\xi))$. Les identités $PS=1-d(PT)$ et $SP=1-d(T+SB)$ sont vraies sur $L^p\Omega^k(M)\cap\ker d$. Cela suffit à prouver que $S:H^k(\mathcal{B}^{*,p}(M,\xi))\to H^{k,p}(M)$ est un isomorphisme d'inverse P.

Enfin, si p est non critique seulement en degré $k-1$, P n'est défini que sur les k-formes. Toutefois, il préserve les k-formes fermées. L'identité $SP=1-d(T+SB)$ montre que S : $H^k(\mathcal{B}^{*,p}(M,\xi))\to H^{k,p}(M)$ est surjectif. ■

Remarque. Sur toute variété riemannienne à géométrie bornée, il existe (voir la proposition 20) des opérateurs S et T qui satisfont aux hypothèses du théorème 1 pour tout $p>1$.

Remarque. On trouvera en 15.3 une situation (produit semi-direct) où pour un exposant p non critique en degré $k-1$ mais critique en degré $k-2$, l'espace $H^k(\mathcal{B}^{*,p}(M,\xi))$ est séparé alors que $H^{k,p}(M)$ ne l'est pas, interdisant une injection $H^{k,p}(M)\to H^k(\mathcal{B}^{*,p}(M,\xi))$.

5 Régularisation

On vérifie que les hypothèses techniques du théorème 1 sont toujours satisfaites par les variétés riemanniennes à géométrie bornée, pour $p>1$. Les résultats principaux de cette section sont les corollaires 21 et 24.

5.1 L'espace $L^p_{-1}\Omega^k(M)$

La norme de l'espace L^p+dL^p est difficile à évaluer en général. On va construire une norme équivalente plus commode, dans le cas particulier des variétés riemanniennes à géométrie bornée.

Définition 13 *Fixons un entier $\ell\geq 1$. Soit M une variété riemannienne. On dit que M est à géométrie bornée s'il existe un $\epsilon>0$ tel que toutes les boules de rayon ϵ soient uniformément proches, au sens C^ℓ, de la boule unité de $\mathbf{R}^n$.*

Remarque. Dans la littérature, on demande souvent seulement une borne inférieure sur le rayon d'injectivité et des bornes sur la courbure sectionnelle. Quitte à déformer la métrique en une métrique équivalente plus régulière (ce qui ne change pas la cohomologie L^p), on peut supposer que les dérivées covariantes jusqu'à l'ordre ℓ de la courbure sont uniformément bornées (voir [BMR]). La proximité C^ℓ ne coûte donc pas plus cher.

Définition 14 Soit M une variété riemannienne compacte (resp. compacte à bord). On note ∇ la dérivée covariante. Soient p et p' des réels positifs tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$. Soit ω une k-forme différentielle sur M. Sa *norme $L^p_{-\ell}$* est la borne supérieure des intégrales $\displaystyle\int_M \omega\wedge\phi$ sur les $n-k$-formes ϕ sur M, de classe C^ℓ (resp. nulles au voisinage du bord) et telles que

$$\parallel \phi \parallel_{L^{p'}_\ell(M)} := (\parallel \phi \parallel^{p'}_{L^{p'}(M)} + \parallel \nabla\phi \parallel^{p'}_{L^{p'}(M)} + \cdots + \parallel \nabla^\ell\phi \parallel^{p'}_{L^{p'}(M)})^{1/p'} \leq 1.$$

Remarque. Le transport par un difféomorphisme de classe C^ℓ est un isomorphisme entre espaces $L^p_{-\ell}$.

Définition 15 Soit M une variété riemannienne à géométrie bornée. Soit ω une k-forme sur M. On *note*

$$\parallel \omega \parallel_{L^p_{-\ell}\Omega^k(M)} = (\int_M \parallel \omega_{|B(x,\epsilon)} \parallel^p_{L^p_{-\ell}(B(x,\epsilon))} dx)^{1/p}.$$

Remarque. Changer le rayon des boules conduit à une norme équivalente. Si M est compacte, elle est automatiquement à géométrie bornée. Les définitions 14 et 15 donnent dans ce cas des normes équivalentes.

Remarque. Clairement, $L^p_{-\ell} \subset L^p_{-\ell-1}$ et la différentielle extérieure est bornée de $L^p_{-\ell}$ dans $L^p_{-\ell-1}$.

Lemme 16 *Si M est compacte (éventuellement avec bord), l'espace $L^p_{-\ell}(M)$ est un $C^\ell(M)$-module.*

Preuve. Soit u une fonction de classe C^ℓ sur M, ω une k-forme sur B et ϕ une $n-k$-forme lisse à support compact dans M, telle que $\| \phi \|_{L^p_\ell(M)} \leq 1$. Alors $\nabla u\phi = (\nabla u)\phi + u\nabla\phi$ entraîne

$$\| u\phi \|_{L^{p'}_\ell} \leq \| u \|_{C^\ell} \| \phi \|_{L^{p'}_\ell} \leq \| u \|_{C^\ell(M)}.$$

Il vient

$$\int_M u\omega \wedge \phi = \int_M \omega \wedge u\phi \leq \| u \|_{C^\ell(M)} \| \omega \|_{L^p_{-\ell}(M)}$$

donc

$$\| u\omega \|_{L^p_{-\ell}(M)} \leq \| u \|_{C^\ell(M)} \| \omega \|_{L^p_{-\ell}(M)}. \blacksquare$$

Remarque. Plus généralement, si ϕ est une forme différentielle de classe C^ℓ sur M, le produit extérieur par ϕ est un opérateur borné sur $L^p_{-\ell}$.

Proposition 17 *Soit G un groupe de Lie muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche. Une forme différentielle sur G est dans $L^p_{-\ell}$ si et seulement si ses composantes dans un repère de formes invariantes à gauche sont des fonctions dans $L^p_{-\ell}$.*

Preuve. Par invariance à gauche, il suffit de le vérifier pour la boule unité B de G. Soit $\theta_1, \cdots, \theta_n$ une base de 1-formes invariantes à gauche. Soit $\{i_1, \cdots, i_n\}$ une permutation de $\{1, \cdots, n\}$, soit u une fonction de classe C^ℓ à support compact dans B. Il existe une constante indépendante de u telle que

$$\text{const.} \| u \|_{L^{p'}_\ell(B)} \leq \| u\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_k} \|_{L^{p'}_\ell(B)} \leq \text{const.} \| u \|_{L^{p'}_\ell(B)}.$$

Par dualité, on en tire, pour toute fonction v de $L^p_{-\ell}(B)$

$$\text{const.} \| v \|_{L^p_{-\ell}(B)} \leq \| v\theta_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_n} \|_{L^p_{-\ell}(B)} \leq \text{const.} \| v \|_{L^p_{-\ell}(B)}. \blacksquare$$

Remarque. En particulier, dans la boule unité de $\mathbf{R}^n$, une forme différentielle est dans L^p_ℓ si et seulement si ses composantes, des fonctions, le sont.

5.2 Régularisation

Dans cette section, on construit les opérateurs de régularisation S et T nécessaires pour appliquer le théorème 1.

Soit M une variété riemannienne compacte sans bord. Notons $\mathcal{H}$ l'espace des formes harmonique sur M. Le laplacien Δ admet un inverse borné sur l'orthogonal L^2 de $\mathcal{H}$. On note $\Gamma = \Delta^{-1} \circ \Pi$ la composition avec le projecteur orthogonal sur $\mathcal{H}^\perp$. Comme Δ commute avec d et d^*, il en est de même de Γ.

Lemme 18 *Soit M une variété riemannienne compacte sans bord. Soit $p > 1$. Les opérateurs $T_M = d^*\Gamma$ et $S_M = 1 - dT_M - T_M d$ sont bornés de $L^p_{-\ell}\Omega^*(M)$ dans $L^p_{-\ell+1}\Omega^*(M)$.*

Preuve. Comme Γ commute avec d, $S_M = 1 - dT_M - Td_M = 1 - \Delta\Gamma = 1 - \Pi$ est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{H}$. Il est donc aussi régularisant qu'on veut.

Montrons que Γ est borné de $L^{p'}$ dans $L_2^{p'}$. L'estimée $L^{p'}$ pour le laplacien, [ADN], s'énonce comme suit. Pour $\phi \in L_2^{p'}$,

$$\| \phi \|_{L_2^{p'}} \leq \text{const.}(\| \phi \|_{L^{p'}} + \| \phi \|_{L^{p'}}).$$

Montrons d'abord que l'image par Δ de $\mathcal{H}^{\perp} \cap L_2^{p'}$ est fermée dans $L^{p'}$. Soit $\omega \in L^{p'}$, soit $\phi_j \in {}^{\perp} \cap L_2^{p'}$ une suite telle que $\Delta(\phi_j)$ converge dans $L^{p'}$ vers ω. Alors ϕ_j est bornée dans $L^{p'}$. Sinon, $\psi_j = \phi_j / \| \phi_j \|_{L^{p'}}$ est borné dans $L_2^{p'}$ donc, par compacité du plongement de Sobolev, on peut supposer que ψ_j converge fortement dans $L^{p'}$ vers un ψ de norme 1, et converge faiblement dans $\mathcal{H}^{\perp} \cap L_2^{p}$. Or $\Delta\psi_j$ tend vers 0, donc $\psi \in \mathcal{H}$. Il vient $\psi = 0$, contradiction. On conclut que ϕ_j est bornée dans $L^{p'}$. On peut donc supposer que ϕ_j converge faiblement dans $\mathcal{H}^{\perp} \cap L_2^{p'}$ vers ϕ, et $\omega = \Delta\phi$ est dans l'image du laplacien. On conclut que $\Delta(\mathcal{H}^{\perp} \cap L_2^{p'})$ est fermé dans $L^{p'}$.

Le laplacien étant symétrique, son image est exactement $\mathcal{H}^{\perp} \cap L^{p'}$. L'opérateur Δ est une bijection continue entre les espaces de Banach $\mathcal{H}^{\perp} \cap L_2^{p'}$ et $\mathcal{H}^{\perp} \cap L^{p'}$. C'est donc un isomorphisme. On conclut que Γ est borné de $L^{p'}$ dans $L_2^{p'}$.

Le même argument montre que Γ est borné de $L_{\ell}^{p'}$ dans $L_{\ell+2}^{p'}$. En effet, l'estimée elliptique est vraie sur $L_{\ell}^{p'}$. En particulier, l'adjoint L^2 de T_M, l'opérateur $T^* = d\Gamma$ est borné de $L_{\ell}^{p'}$ dans $L_{\ell+1}^{p'}$.

Par dualité, on conclut que T_M est borné de $L_{-\ell}^{p}$ dans $L_{-\ell+1}^{p}$. ∎

Corollaire 19 *Soit M une variété riemannienne à bord compacte. Soit $p > 1$. Il existe des opérateurs S_M et T_M tels que $1 = S_M + dT_M + Td_M$ et pour toutes fonctions lisses χ et χ' à support compact dans l'intérieur de M, $\chi' \circ S_M \circ \chi$, $d\chi' \wedge T_M \circ \chi$ et $T_M \circ d\chi \wedge \cdot$ sont bornés de $L_{-\ell}^{p}\Omega^*(M)$ dans $L_{-\ell+1}^{p}\Omega^*(M)$.*

Preuve. On peut toujours compléter M en une variété compacte sans bord. On utilise ensuite le fait que $L_{-\ell}^{p}$ est un C^{ℓ}-module (lemme 16 et la remarque qui le suit). ∎

Proposition 20 *Soit M une variété riemannienne à géométrie bornée. Soit $p > 1$, $\ell \geq 1$. Il existe des opérateurs bornés S et T de $L_{-\ell}^{p}\Omega^*(M)$ dans $L_{\ell+1}^{p}\Omega^*(M)$, tels que $1 = S + dT + Td$.*

Preuve. En transportant au moyen de difféomorphismes contrôlés en norme C^{ℓ} les opérateurs S_B et T_B de la boule unité B de $\mathbf{R}^n$, on obtient pour chaque $z \in M$ des opérateurs S_z et T_z sur la boule $B(z,\epsilon)$ de M tels que $\chi'_z \circ S_z \circ \chi_z$, $d\chi'_z \wedge T_z \circ \chi_z$ et $T_z \circ d\chi_z \wedge \cdot$ soient bornés de $L_{-\ell}^{p}\Omega^*(B(z,\epsilon))$ dans $L_{-\ell+1}^{p}\Omega^*(B(z,\epsilon))$ en fonction seulement des normes C^{ℓ} de χ'_z et χ_z. On choisit les fonctions χ'_z et χ_z de sorte que pour tout $x \in M$, $\int \chi'_z \chi_z(x)\, dz = 1$.

On pose, pour $\omega \in L_{-\ell}^{p}(M)$,

$$T\omega = \int_M \chi'_z T_z(\chi_z \omega_{|B(z,\epsilon)})\, dz.$$

Pour chaque $z \in M$, $\chi_z \omega_{|B(z,\epsilon)} \in L_{-\ell}^{p}(B(z,\epsilon))$ et

$$\| \chi'_z T_z(\chi_z \omega_{|B(z,\epsilon)}) \|_{L_{-\ell+1}^{p}(B(z,\epsilon))} \leq \text{const.} \| \omega_{|B(z,\epsilon)} \|_{L_{-\ell}^{p}(B(z,\epsilon))}$$

donc, par définition de la norme $L_{-\ell}^{p}$,

$$\| T\omega \|_{L_{-\ell+1}^{p}} \leq \text{const.} \| \omega \|_{L_{-\ell}^{p}}.$$

On calcule

$$\begin{aligned} d(\chi'_z T_z(\chi_z \omega)) + \chi'_z T_z(\chi_z d\omega) &= d\chi'_z \wedge T_z(\chi_z \omega) + \chi'_z (T_z d + dT_z)(\chi_z \omega) - \chi'_z T_z(d\chi_z \wedge \omega) \\ &= \chi'_z (1 - S_z)(\chi_z \omega) + d\chi'_z \wedge T_z(\chi_z \omega) - \chi'_z T_z(d\chi_z \wedge \omega) \\ &= \chi'_z \chi_z \omega - \tilde{S}_z(\omega) \end{aligned}$$

où

$$\tilde{S}_z(\omega) = \chi'_z S_z(\chi_z\omega) + \chi'_z T_z(d\chi_z \wedge \omega) - d\chi'_z \wedge T_z(\chi_z\omega)$$

donc $\tilde{S}_z$ est borné (uniformément en z) de $L^p_{-\ell}(B(z,\epsilon))$ dans $L^p_{-\ell+1}(B(z,\epsilon))$. On pose

$$S = \int_M \tilde{S}_z\, dz.$$

Alors $1 = S + dT + Td$, et S et T sont bornés de $L^p_{-\ell}\Omega^*(M)$ dans $L^p_{-\ell+1}\Omega^*(M)$. ∎

Corollaire 21 *Sur une variété riemannienne à géométrie bornée, les hypothèses 1., 2. et 3. du théorème 1 sont satisfaites pour tout $p > 1$.*

Preuve. Soient S et T les opérateurs fournis par la proposition 20. La relation $S = 1 - dT - Td$ entraîne que $dS = Sd$. Par définition, $L^p \subset L^p_{-1}$ donc S et T sont bornés sur L^p. L'opérateur d est borné de L^p dans L^p_{-1} donc iTd et Sd sont bornés sur L^p. Enfin, comme L^p_{-1} est un C^1-module, i est borné de L^p_{-1} dans lui-même, et Tid est borné sur L^p. ∎

5.3 Comparaison des normes $L^p + dL^p$ et L^p_{-1}

Définition 22 On *note* $\Omega^{*;p}_{-1}(M)$ l'espace des formes différentielles qui sont dans L^p_{-1} ainsi que leur différentielle extérieure, muni de la norme

$$\| \omega \|_{\Omega^{*;p}_{-1}(M)} = (\| \omega \|^p_{L^p_{-1}(M)} + \| d\omega \|^p_{L^p_{-1}(M)})^{1/p}.$$

Proposition 23 *Soit M une variété riemannienne de dimension n à géométrie bornée. Alors les normes de $L^p + dL^p$ et de $\Omega^{*;p}_{-1}(M)$ sont équivalentes.*

Preuve. Par construction, $L^p + dL^p \subset L^p_{-1}$ et $L^p + dL^p$ est stable par d donc $L^p + dL^p \subset \Omega^{*;p}_{-1}$. Inversement, soit ω une forme dans $L^p_{-1}(M)$ telle que $d\omega \in L^p_{-1}(M)$. Utilisons les opérateurs de régularisation de la proposition 20. Alors $\omega = (S + Td)\omega + dT\omega$ où $(S + Td)\omega \in L^p$ et $T\omega \in L^p$, donc $\omega \in L^p + dL^p$. ∎

Corollaire 24 *Soit G un groupe de Lie muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche. Une forme différentielle ω sur G est dans $L^p + dL^p$ si et seulement si les composantes de ω et de $d\omega$ dans un repère de formes invariantes à gauche sont des fonctions dans $L^p_{-1}(G)$.*

Preuve. Combiner les propositions 17 et 23. ∎

Remarque. En degré maximum, les normes $L^p + dL^p$ et L^p_{-1} sont non seulement équivalentes, mais elles coïncident.

Proposition 25 *Soit M une variété riemannienne compacte (éventuellement avec bord) de dimension n. Si ω est une n-forme sur M,*

$$\| \omega \|_{L^p_{-1}(M)} = \| \omega \|_{(L^p+dL^p)(M)}.$$

Preuve. Soit ω une n-forme différentielle sur M. L'inégalité

$$\| \omega \|_{L^p_{-1}(M)} \leq \| \omega \|_{(L^p+dL^p)(M)}$$

résulte de la définition.

Notons $E \subset L^{p'}_1(B)$ l'adhérence du sous-espace des fonctions lisses à support compact. Par définition, $\| \omega \|_{L^p_{-1}(B)}$ est la borne supérieure sur la boule unité de E de la forme linéaire $u \mapsto \int u\omega$. Par uniforme convexité de la norme $L^{p'}$, cette borne supérieure est atteint en une unique fonction

u de norme 1. Celle-ci satisfait l'équation différentielle suivante. Il existe un multiplicateur de Lagrange $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout fonction lisse v nulle au bord de M,

$$\int_M p' u^{p'-1} v\omega_0 + p'|du|^{p-2} * du \wedge dv - \lambda v\omega = 0$$

où ω_0 est l'élément de volume riemannien. En faisant $v = u$, on trouve en particulier

$$\lambda \int_M u\omega = p' \| u \|^{p'}_{L^{p'}_1(M)} = p'$$

donc $\lambda \neq 0$. Une intégration par parties donne

$$\int_M v(p' u^{p'-1} \omega_0 + d(p'|du|^{p-2} * du) - \lambda\omega) = 0,$$

i.e. $p' u^{p'-1}\omega_0 + d(p'|du|^{p-2} * du) - \lambda\omega \equiv 0$.

Posons $\beta = p'/\lambda u^{p'-1}\omega_0$ et $\gamma = p'/\lambda |du|^{p-2} * du$. Alors $\beta \in L^p$, $\gamma \in L^p$, $\omega = \beta + d\gamma$ et

$$\| \beta \|^p_{L^p(B)} + \| \gamma \|^p_{L^p(M)} = (p'/\lambda)^p \| u \|^{p'}_{L^{p'}_1(M)} = (p'/\lambda)^p = (\int_M u\omega)^p.$$

On conclut que $\| \omega \|_{L^p_{-1}(M)} = \| \omega \|_{(L^p+dL^p)(M)}$. ■

Corollaire 26 *Soit B la boule unité d'un groupe de Lie M. Soit $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ une base de champs de vecteurs invariants à gauche. Soit u une fonction sur B. Sa norme L^p_{-1} est (équivalente à) la borne inférieure des expressions*

$$\sum_{j=1}^n \| v_j \|_{L^p(B)}$$

sur les n-uplets de fonctions $(v_1, \ldots, v_n)$ telles que $v = \sum \xi_j v_j$.

6 Calcul de la norme $L^p + dL^p$ sur les 1-formes fermées

La norme $L^p + dL^p$ de la différentielle d'une fonction a une expression simple (lemme 28). On en tire une expression assez explicite pour la norme de l'espace $\mathcal{B}^{1,p}$ d'un produit semi-direct (corollaire 30).

Lemme 27 *Soit u une fonction sur la boule unité B de $\mathbf{R}^n$. Alors*

$$\| du \|_{(L^p+dL^p)(B)} \sim \inf\{\| u - a \|_{L^p(B)} \ ; \ a \in \mathbf{R}\}.$$

Preuve. D'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante telle que pour toute fonction $v \in L^p_1(B)$, il existe une constante m_v (dépendant de v) telle que $\| v - m_v \|_{L^p(B)} \leq \text{const.} \| dv \|_{L^p(B)}$.

Soient β et γ des formes différentielles sur B telles que $\beta + d\gamma = du$. Alors γ est une fonction, β une 1-forme fermée L^p donc il existe une fonction $v \in L^p_1(B)$ telle que $\beta = dv$. Alors il existe une constante m_v telle que

$$\begin{aligned} \| \beta \|^p_{L^p(B)} + \| \gamma \|^p_{L^p(B)} &\geq \text{const.} \| v - m_v \|^p_{L^p(B)} + \| \gamma \|^p_{L^p(B)} \\ &\geq \text{const.} \| v - m_v + \gamma \|^p_{L^p(B)} \\ &= \text{const.} \| u - a \|^p_{L^p(B)} \end{aligned}$$

où a est le réel tel que $v - m_v + \gamma = u - a$. Il existe car par construction $d(v - m_v + \gamma) = du$.

Inversement, soit $a \in \mathbf{R}$. Alors posant $\beta = 0$ et $\gamma = u - a$, on a $\beta + d\gamma = du$ et $\| \beta \|^p_{L^p(B)} + \| \gamma \|^p_{L^p(B)} = \| u - a \|^p_{L^p(B)}$. qed

Lemme 28 *Soit u une fonction sur la boule unité B de $\mathbf{R}^n$. Alors à des constantes près,*

$$\| du \|_{L^p+dL^p(B)} \sim (\int_{B\times B} |u(x)-u(y)|^p \, dx\, dy)^{1/p}.$$

Preuve. D'après le lemme 27, il existe une fonction v sur B telle que $du = dv$ et

$$\| du \|_{L^p+dL^p(B)} \sim \| v \|_{L^p(B)}.$$

Soit w la fonction obtenue en retranchant à v sa valeur moyenne sur B. Comme $|\int_B v| \leq \| v \|_{L^p(B)}$, on a $\| w \|_{L^p(B)} \leq 2\| v \|_{L^p(B)}$. Comme $dw = du$, $\| w \|_{L^p(B)} \geq \| u \|_{L^p+dL^p(B)}$. Autrement dit, il existe une fonction w de moyenne nulle sur B telle que $dw = du$ et

$$\| du \|_{L^p+dL^p(B)} \sim \| w \|_{L^p(B)}.$$

Clairement

$$\begin{aligned}
(\int_{B\times B} |u(x)-u(y)|^p \, dx\, dy)^{1/p} &= (\int_{B\times B} |w(x)-w(y)|^p \, dx\, dy)^{1/p}\\
&= \| w(x)-w(y) \|_{L^p(B\times B)}\\
&\leq \| w(x) \|_{L^p(B\times B)} + \| w(y) \|_{L^p(B\times B)}\\
&\leq \text{const.}\| w \|_{L^p(B)}.
\end{aligned}$$

Inversement, comme $\int_B w(y)\, dy = 0$,

$$\begin{aligned}
\int_B w(x)^p dx &= \int_B (\int_B (w(x)-w(y))\, dy)^p dx\\
&\leq \int_{B\times B} |w(x)-w(y)|^p dx\, dy\\
&= \int_{B\times B} |u(x)-u(y)|^p \, dx\, dy
\end{aligned}$$

par Hölder. On a donc bien

$$\| du \|_{L^p+dL^p(B)} \sim (\int_{B\times B} |u(x)-u(y)|^p \, dx\, dy)^{1/p}. \blacksquare$$

Corollaire 29 *Soit M une variété riemannienne à géométrie bornée. Soit u une fonction sur M telle que $du \in L^p_{-1}$. Alors*

$$\| du \|_{L^p+dL^p} \sim \| du \|_{L^p_{-1}} \sim (\int_{M\times M} |u(x)-u(y)|^p \psi(x,y) \, dx\, dy)^{1/p}$$

où $\psi(x,y) = \mathrm{vol} B(x,\epsilon)\cap B(y,\epsilon)$.

Preuve. La proposition 23 donne pour les formes fermées l'équivalence des normes $L^p + dL^p$ et L^p_{-1} dans chaque boule de rayon ϵ. En intégrant par rapport aux centres, on obtient

$$\| du \|_{L^p_{-1}} \sim (\int_{M\times M} |u(x)-u(y)|^p \psi(x,y) \, dx\, dy)^{1/p}.$$

La proposition 23 donne enfin l'équivalence des normes globales. $\blacksquare$

Corollaire 30 *Soit $G = \mathbf{R} \times_\alpha H$ un produit semi-direct. Soit u une fonction sur H telle que $du \in \mathcal{B}^{1,p}(M,\xi)$ où ξ est le champ invariant à gauche $\frac{\partial}{\partial t}$. Alors*

$$\| du \|_{\mathcal{B}^{1,p}} \sim (\int_{H\times H} |u(h)-u(h')|^p \kappa(h^{-1}h')\,dh\,dh')^{1/p}$$

où κ est une fonction positive sur H telle que $\kappa \circ e^{t\alpha} = e^{-2ht}\kappa$.

Preuve. Si $x = (t,h)$ et $y = (t',h') \in G$, on réécrit l'intégrale du corollaire 29

$$\int_{G\times G} |u(x)-u(y)|^p \psi(x,y)\,dx\,dy = \int_{H\times H} |u(h)-u(h')|^p \kappa(h,h')\,dh\,dh'$$

où

$$\kappa(h,h') = \int_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}} \psi((h,t),(h',t'))e^{\mathrm{tr}(\alpha)(t+t')}\,dt\,dt'.$$

L'invariance de ψ par les translations à gauche de G se traduit d'une part par l'invariance de κ (ce qui permet d'écrire $\kappa(h,h') = \kappa(h^{-1}h')$) et d'autre part, par l'homogénéïté annoncée sous le groupe $e^{t\alpha}$. ■

7 Restrictions sur les formes basiques

A l'exception du degré 1 (voir en sections 6 et 11), ou du cas de l'espace hyperbolique réel (voir en 8.2), on ne sait pas calculer complètement les espaces $\mathcal{B}^{k,p}(M)$. Néanmoins, on va montrer que dans certains cas, certaines composantes d'une forme de $\mathcal{B}^{k,p}(M)$ sont automatiquement nulles.

7.1 Deux mécanismes

Exemple. Soit $G = \mathbf{R} \times_\alpha \mathbf{R}^2$ le produit semi-direct défini par la matrice $\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Notons $\pi : G \to H$ la projection. Soit $\beta = a\,dx + b\,dy$ une 1-forme différentielle non nulle sur H. Alors $\phi = \pi^*\beta$ n'est jamais dans L^2. En effet, notons $\beta_+ = a\,dx$ et $\beta_- = b\,dy$. Il vient

$$\| \phi \|^2_{L^2(G)} \sim \int_{\mathbf{R}} (\| \beta_+ \|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)} e^{3t} + \| \beta_- \|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)} e^{-3t})\,dt$$

donc

$$\phi \in L^2(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^2) \Rightarrow \beta_+ = 0, \quad \phi \in L^2(\mathbf{R}_- \times \mathbf{R}^2) \Rightarrow \beta_- = 0.$$

La condition $\pi^*\beta \in (L^2 + dL^2)(\mathbf{R}_\pm \times \mathbf{R}^2)$ impose aussi une restriction, plus faible, sur les composantes de β. On écrit $\pi^*\beta = \omega + d\psi$ où ω et ψ sont dans $L^2(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^2)$. On décompose encore $\omega = a_t + dt \wedge b_t$ et $\psi = e_t$, où les a_t sont des 1-formes et les b_t et e_t des fonctions sur $\mathbf{R}^2$. Alors $\| a_{+,t} \| + \| e_t \|$ est dans $L^2(\mathbf{R}_+, e^{3t}dt)$. Par conséquent il existe une suite t_j tendant vers $-\infty$ telle que a_{-,t_j} et e_{t_j} tendent vers 0. D'autre part, pour tout t,

$$\beta = a_t + de_t = a_{+,t} + a_{-,t} + de_t$$

donc $\beta = \lim a_{-,t_j}$ dans $L^2_{-1}(\mathbf{R}^2)$, donc $\beta_+ = 0$.

Supposons maintenant que $\pi^*\beta \in (L^2 + dL^2)(\mathbf{R}_- \times \mathbf{R}^2)$. On trouve que $\| a_{-,t} \|$ est dans $L^2(\mathbf{R}_-, e^{-3t}dt)$ donc tend vers 0 (quitte à prendre une sous-suite t_j). Il vient $\beta = \lim a_{+,t_j} + de_{t_j}$ dans $L^2_{-1}(\mathbf{R}^2)$. On conclut seulement que β_- est dans l'adhérence L^2_{-1} de l'image de $d_- = \frac{\partial}{\partial x}$, ce qui ne dit rien.

Montrons comment un second mecanisme permet de déduire de cette annulation partielle l'annulation de la cohomologie L^2. On sait qu'une 1-forme β sur $\mathbf{R}^2$ telle que $\pi^*\beta \in \mathcal{B}^{1,2}(G,\xi)$ est nécessairement de la forme $b\,dy$. Si de plus $d\beta = 0$, alors la fonction b ne dépend pas de x, i.e. β est invariante par translation le long de l'axe des x. Or la norme $L^2 + dL^2$ de $\pi^*\beta$ est une intégrale sur $\mathbf{R}^2$ d'une quantité qui est elle aussi invariante par translation le long de l'axe des x. On conclut que cette norme est nulle. Comme $\mathcal{B}^{1,2}(G,\xi) = 0$ et ξ est $(0,2)$-Anosov, le théorème 1 donne que $H^{1,2}(G) = 0$.

7.2 Cas général : exposants non critiques

Définition 31 *Soit E un fibré sur une variété M. On* note $\Gamma(E)$ *l'espace vectoriel topologique des sections de E à coefficients distributions. Lorsque $M = G$ est un groupe de Lie et E un fibré invariant à gauche sur G, on confondra parfois dans la notation le fibré E et sa fibre au-dessus de l'élément neutre.*

Proposition 32 *Soit M une variété riemannienne complète. Soit ξ un champ de vecteurs unitaire $(k-1,p)$-Anosov et (k,p)-Anosov sur M. On suppose qu'il existe une 1-forme fermée dt invariante par ξ et telle que $dt(\xi) = 1$. Pour $j = k-1$, k, on note $\Lambda_-^j \oplus \Lambda_-^j$ la décomposition (j,p)-Anosov de $\ker \iota_\xi$. Soit ω une k-forme différentielle sur M annulée par ι_ξ et invariante par le flot de ξ, à coefficients dans $L^p_{-1}(M)$. Alors*

$$\omega \in \overline{\Gamma(\Lambda^k_{+(p)}) + d\Gamma(\Lambda^{k-1}_{+(p)})} \cap \overline{\Gamma(\Lambda^k_{-(p)}) + d\Gamma(\Lambda^{k-1}_{-(p)})},$$

où l'adhérence est prise au sens des distributions. En particulier, avec les notations de 12,

$$\mathcal{B}^{k,p}(M,\xi) \subset \overline{\Gamma(\Lambda^k_{+(p)}) + d\Gamma(\Lambda^{k-1}_{+(p)})} \cap \overline{\Gamma(\Lambda^k_{-(p)}) + d\Gamma(\Lambda^{k-1}_{-(p)})}.$$

Preuve. Soit $\omega = \beta + d\gamma \in \mathcal{B}^{k,p}(M,\xi)$ où β et γ sont dans L^p. Notons ϕ_t le flot de ξ. Ecrivons $\beta = a + dt \wedge b$ et $\gamma = e + dt \wedge f$ où a, b, e et f sont annulées par ι_ξ. Alors $\omega = a + d_\nu e$ où d_ν ne garde que la composante annulée par ι_ξ de la différentielle extérieure. Comme ξ est $(k-1,p)$-Anosov et (k,p)-Anosov, les $k-1$-formes et k-formes se décomposent en $a = a_+ + a_-$ et $e = e_+ + e_-$, de sorte que, lorsque t tend vers $+\infty$, $\phi_t^* a_+$ et $\phi_t^* e_+$ tendent vers 0 en norme L^p. Par conséquent

$$\omega = \lim_{t \to +\infty} \phi_t^* a_- + d_\nu \phi_t^* e_- .$$

en topologie L^p_{-1}. Ceci entraîne la convergence des restrictions à presque toute feuille du feuilletage défini par dt. Localement, on peut projeter sur une telle feuille F parallèlement aux orbites de ξ, et tirer en arrière les formes $\phi_t^* a_-$ et $\phi_t^* e_-$. On obtient des formes a_t et e_t définies localement, invariantes par ξ, annulées par ι_ξ, à valeurs dans Λ_-, et telles que $a_t + de_t$ converge vers ω lorsque t tend vers $+\infty$. De même, on construit localement des formes a'_t et e'_t invariantes par ξ, annulées par ι_ξ, à valeurs dans Λ_+, et telles que $a'_t + de'_t$ converge vers ω lorsque t tend vers $-\infty$. ∎

Remarque. On trouvera en 36 une réciproque partielle de la proposition 32.

7.3 Cas des groupes de Lie

Pour les champs de vecteurs invariants à gauche sur les groupes de Lie, on peut affaiblir l'hypothèse (k,p)-Anosov, i.e. il n'est pas nécessaire de supposer l'exposant p non critique.

Proposition 33 *Soit G un groupe de Lie muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche et soit $\xi \in \mathcal{G}$. Soit*

$$\ker \iota_\xi = \Lambda^k_+ \oplus \Lambda^k_0 \oplus \Lambda^k_-$$

la décomposition de $\ker \iota_\xi \subset \Lambda^k \mathcal{G}^*$ en sous-espaces caractéristiques correspondant à des valeurs propres de ad_ξ de partie réelle strictement supérieure (resp. égale, resp. strictement inférieure) à $\mathrm{tr}\,(ad_\xi)/p$. On note β_+ la composantes d'une forme différentielle β sur Λ^k_+, et $d_+\beta = (d\beta)_+$. Alors pour toute forme $\omega \in \mathcal{B}^{k,p}(G,\xi)$,

$$\omega_+ \in \overline{d_+(\Gamma(\Lambda^{k-1}_-) + \Gamma(\Lambda^{k-1}_0))}, \quad \omega_- \in \overline{d_-(\Gamma(\Lambda^{k-1}_+) + \Gamma(\Lambda^{k-1}_0))}$$

où l'adhérence est dans la topologie $L^p_{-1,loc}$.

Supposons de plus que le groupe à 1 paramètre $\phi : \mathbf{R} \to G$ engendré par ξ est injectif et d'image fermée et que ad_ξ est semi simple sur Λ^{k-1}_0. Alors ω s'annule sur tout vecteur propre de ad_ξ dans $\Lambda^k_0 \otimes \mathbf{C}$. Supposons enfin que $\Lambda^{k-1}_- = \Lambda^{k-1}_0 = 0$. Alors $\omega_0 = 0$.

Preuve. On reprend l'argument de la proposition 32. On écrit $\omega = a + d_\nu e$ où a et e sont annulées par ι_ξ. On décompose $a = a_+ + a_0 + a_-$ et $e = e_+ + e_0 + e_-$, de sorte que $\phi_{\pm t}^* a_\pm$ (resp. $\phi_{\pm t}^* e_\pm$ tende vers 0 dans L^p_{loc} lorsque t tend vers $+\infty$. Alors

$$\omega = \lim_{t\to+\infty} \phi_{\pm t}^*(a_0 + a_\mp) + d\phi_{\pm t}^*(e_0 + e_\mp),$$

ce qui prouve l'énoncé le plus général.

Sous les hypothèses supplémentaires, on montre qu'il existe une suite t_j tendant vers $+\infty$ telle que $\phi_{\pm t_j}^* e_0$ tende vers 0 dans L^p_{loc}.

Supposons d'abord que ad_ξ est semi simple sur Λ_0^{k-1}. Alors sur Λ_0^k, $ad_\xi - \mathrm{tr}\,(ad_\xi)/p\,id$ est semi-simple à valeurs propres imaginaires pures. Il existe donc une métrique euclidienne sur Λ_0^{k-1} pour laquelle $ad_\xi - \mathrm{tr}\,(ad_\xi)/p\,id$ est antisymétrique. En translatant Λ_0^{k-1} à gauche sur G, on trouve un sous-fibré du fibré des k-formes, muni d'une métrique euclidienne multipliée exactement par le facteur $J(\phi_t)^{1/p}$ par le flot ϕ_t. Par conséquent, il existe des constantes telles que pour tout ouvert U de G et tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\mathrm{const.}\| e_0 \|_{L^p(\phi_t(U))} \leq \| \phi_t^* e_0 \|_{L^p(U)} \leq \mathrm{const.}\| e_0 \|_{L^p(\phi_t(U))}.$$

Soit $\eta \in \Lambda^k \mathcal{G} \otimes \mathbf{C}$ un $k-1$-vecteur, vecteur propre de la dérivation ad_ξ relatif à une valeur propre μ de partie réelle égale à $\mathrm{tr}\,(ad_\xi)/p$. Pour la même raison, la fonction $t \mapsto e^{-t\Re e(\mu)}|(\phi_t)_* a(\eta)|$ est bornée inférieurement sur $\mathbf{R}$.

Par hypothèse, le groupe à un paramètre ϕ_t est injectif et fermé dans G. Il existe donc un voisinage U de l'origine dans G dont les translatés à droite par ϕ_t, $t \in \mathbf{Z}$, sont deux à deux disjoints. Il vient

$$\sum_{t\in\mathbf{Z}} \| (\phi_t^* a)(\eta) \|^p_{L^p(U)} + \| \phi_t^* e_0 \|^p_{L^p(U)} \leq \| a \|_{L^p} + \| e \|_{L^p} < +\infty$$

donc il existe une suite t_j tendant vers $+\infty$ telle que $(\phi_{\pm t_j}^* a)(\eta)$ et $\phi_{\pm t_j}^* e_0$ tendent vers 0 dans $L^p(U)$. Ceci prouve que $\omega(\eta) = 0$, et donc le deuxième énoncé.

Supposons maintenant que $\Lambda_-^{k-1} = \Lambda_0^{k-1} = 0$. Dans ce cas, $\phi_t^* e$ tend vers 0 exponentiellement dans L^p lorsque t tend vers $+\infty$.

Soit $\eta \in \Lambda^k \mathcal{G} \otimes \mathbf{C}$ un $k-1$-vecteur, vecteur propre de la dérivation ad_ξ relatif à une valeur propre μ de partie réelle égale à $\mathrm{tr}\,(ad_\xi)/p$. On vient de voir qu'il existe une suite t_j telle que $(\phi_{t_j}^* a)(\eta)$ tende vers 0. En particulier

$$\omega(\eta) = \lim_j \phi_{t_j}^*(a + de)(\eta) = 0.$$

Ceci s'écrit aussi $0 \equiv \omega(\eta) \equiv a(\eta) + de(\eta)$ donc $\phi_t^* a(\eta) = -d(\phi_t^* e)(\eta)$ tend vers 0 exponentiellement dans L^p_{-1} lorsque t tend vers $+\infty$.

Soit $\eta' \in \ker\,(ad_\xi - \mu\, I)^2$ et $\eta = (ad_\xi - \mu\, I)(\eta')$. Alors η est un vecteur propre et

$$\exp(t\, ad_\xi)(\eta') = e^{t\mu}(t\eta + \eta').$$

On étudie la fonction $u_t = \phi_t^* a(\eta') - t\phi_t^* a(\eta)$ sur G. On calcule $u_t = e^{t\mu} a(\eta') \circ \phi_t$ où η' est vu comme un champ de k-vecteurs invariant à gauche sur G. Pour tout ouvert U,

$$\| u_t \|_{L^p(U)} = \| u_0 \|_{L^p(\phi_t(U))}.$$

Par conséquent, il existe une suite t_j tendant vers $+\infty$ telle u_{t_j} tende vers 0 dans L^p. Comme $\phi_t^* a(\eta)$ tend vers 0 exponentiellement dans L^p_{-1}, la suite $t_j \phi_{t_j}^* a(\eta)$ tend vers 0 dans L^p_{-1}. On conclut que $\phi_{t_j}^* a(\eta')$ tend vers 0 dans L^p_{-1}, et donc que $\omega(\eta') = 0$. De nouveau, cela entraîne que $a(\eta')$ est une composante de de donc converge vers 0 exponentiellement dans L^p_{-1}.

De proche en proche, on montre ainsi que ω s'annule sur tout l'espace caractéristique associé à μ. Ceci montre que $\omega_0 = 0$. ∎

Corollaire 34 *Soit G un groupe de Lie muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche. Soit $\xi \in \mathcal{G}$ tel que $\mathrm{tr}\,(ad_\xi) > 0$. Soit ω une 1-forme fermée dans $L^p_{-1}(G)$, nulle sur ξ et invariante par le flot de ξ. Alors au sens des distributions ω s'annule sur les espaces caractéristiques de ad_ξ dans $\mathcal{G}$ correspondant à des valeurs propres de partie réelle inférieure ou égale à $\mathrm{tr}\,(ad_\xi)/p$.*

Preuve. Comme $\mathrm{tr}\,(ad_\xi) > 0$, le groupe à 1 paramètre engendré par ξ est automatiquement injectif et fermé. De plus, en degré $k-1=0$, $\Lambda^0_- = \Lambda^0_0 = 0$. Par conséquent, la proposition 33 s'applique. ■

8 Exemples d'espaces $\mathcal{B}^{k,p}$ non nuls

Dans cette section, on construit des éléments non triviaux de l'espace $\mathcal{B}^{*,p}(G,\xi)$, lorsque G est un produit semi-direct. Dans le cas particulier de l'espace hyperbolique réel, on relie $\mathcal{B}^{*,p}(G,\xi)$ aux espaces de Besov. Les résultats principaux sont le corollaire 36, sorte de réciproque de la proposition 32, et la proposition 37.

8.1 Construction générale

On étudie des produits semi-directs $G = \mathbf{R} \times_\alpha H$ où α est une dérivation de l'algèbre de Lie $\mathcal{H}$. On note $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ le champ de vecteurs invariant à gauche sur G, tel que $\alpha = ad_\xi$ restreinte à $\mathcal{H}$, $\pi : G \to H$ la projection le long des orbites de ξ et t la fonction sur G définie par $g\exp(t(g)\xi) \in H$.

Fixons un réel $p > 1$. On note Λ^*_+ (resp. Λ^*_0, resp. Λ^*_-) la somme des espaces caractéristiques de α dans l'algèbre extérieure $\Lambda^*\mathcal{H}^*$ relatifs aux valeurs propres de partie réelle supérieure (resp. égale, resp. inférieure) à $\mathrm{tr}\,(\alpha)/p$. Une forme différentielle e sur H se décompose en $e = e_+ + e_0 + e_-$ et la différentielle extérieure se décompose en $d = d_+ + d_0 + d_-$.

Sur un tel produit semi-direct, on peut étendre la définition de l'opérateur B à toutes les valeurs de p. On ignore simplement la composante $(i\omega)_0$. Alors B est borné sur L^p. On pose encore $P = 1 - dB - Bd$. Alors P envoie toujours L^p dans $L^p + dL^p$, mais $iP \neq 0$.

On fixe une fois pour toute une fonction lisse χ sur $\mathbf{R}$ telle que $\chi = 0$ au voisinage de $+\infty$ et $\chi = 1$ au voisinage de $+\infty$.

Lemme 35 *Soit $k = 1, \ldots, n-1 = \dim H$. Soit $p > 1$. Soient $e \in \Omega^{k-1,p}(H)$ et $a \in \Omega^{k,p}(H)$ des formes différentielles telles que $d_+a_- = d_0a_- = d_-a_+ = d_0a_+ = 0$. Alors la forme*

$$\omega(s,a,e) = \phi_s^*(\chi(t)\pi^*a_- + (1-\chi(t))\pi^*a_+ + d\chi(t)\wedge\pi^*e)$$

est dans $\Omega^{k,p}(G)$, et

$$P\omega = \pi^*(d_-e_+ - d_+e_- + d_0e_+ - de_0) + d\chi\wedge\pi^*e_0 + \chi\pi^*(de_0 - d_0e).$$

Il existe des constantes positives C, μ et η telles que si $s > 0$, alors

$$\|\,\omega(s,a,e\,\|_{L^p} \leq C\,e^{-\eta s}\|\,a_- + e_-\,\|_{L^p} + C\,e^{\mu s}\|\,a_+ + e_+ + e_0\,\|_{L^p},$$

$$\|\,d\omega(s,a,e)\,\|_{L^p} \leq C\,e^{-\eta s}\|\,d_-a_- + (a_- - d_-e)\,\|_{L^p} + C\,e^{\mu s}\|\,d_+a_+ + (-a_+ - d_+e - d_0e)\,\|_{L^p}.$$

Si $e' \in \Omega^{n-k-1,p'}(H)$ et $a' \in \Omega^{n-k,p'}(H)$ satisfont $d_+a'_- = d_0a'_- = d_-a'_+ = d_0a'_+ = 0$, alors

$$\begin{aligned}\int_G \omega(s,a,e)\wedge\omega(s',a',e') &= \int_H (-1)^k a_+\wedge e' + e\wedge a'_- \quad si \quad s' >> s\,;\\ &= \int_H (-1)^k a_-\wedge e' + e\wedge a'_+ \quad si \quad s' << s.\end{aligned}$$

Preuve. Comme $\| \phi_t^* a_- \|_{L^p}$ tend vers 0 exponentiellement quand t tend vers $+\infty$, la forme $\chi(t)\pi^* a_-$ est dans L^p. De même, $(1-\chi(t))\pi^* a_+ \in L^p$. Comme $d\chi$ est à support compact, $d\chi \wedge e$ est dans L^p sans condition sur e.

On calcule $d\omega = \chi\pi^* da_- + (1-\chi)\pi^* da_+ + d\chi \wedge \pi^*(a_- - a_+ - de)$ qui est dans L^p car $da_- \in \Lambda_-^{k+1}$ et $da_+ \in \Lambda_+^{k+1}$.

On calcule

$$B\omega = \chi(t)\pi^* e_- - (1-\chi(t))\pi^* e_+, \quad Bd\omega = \chi(t)\pi^*(a_- - d_- e) - (1-\chi(t))\pi^*(-a_+ - d_+ e)$$

et enfin

$$\begin{aligned} P\omega &= d\chi \wedge \pi^* e_0 + \chi\pi^*(d_- e - de_-) - (1-\chi)\pi^*(d_+ e - de_+) \\ &= \pi^*(d_- e_+ - d_+ e_- + d_0 e_+ - de_0) + d\chi \wedge \pi^* e_0 + \chi\pi^*(de_0 - d_0 e). \end{aligned}$$

Transporter par le flot ϕ_s ne fait que changer χ en $\chi_s : t \mapsto \chi(t+s)$ et change pas l'image par P. En revanche, cela fait décroître exponentiellement les normes L^p des composantes de ω et $d\omega$ dans Λ_-^* et croître au plus exponentiellement les autres composantes.

On calcule

$$\begin{aligned} \int_G \omega(s,a,e) \wedge \omega(s',a',e') &= \int_{\mathbf{R}} \chi_s \, d\chi_{s'} \int_H (-1)^k a_- \wedge e' + \int_{\mathbf{R}} (1-\chi_s) \, d\chi_{s'} \int_H (-1)^k a_+ \wedge e' \\ &+ \int_{\mathbf{R}} \chi_{s'} \, d\chi_s \int_H e \wedge a'_- + \int_{\mathbf{R}} (1-\chi_{s'}) \, d\chi_s \int_H e \wedge a'_+ . \end{aligned}$$

Lorsque $s' >> s$, la fonction χ_s vaut 1 sur le support de $\chi_{s'}$, donc $\int_R \chi_s \, d\chi_{s'} = 1$ et $\int_R (1 - \chi_s) \, d\chi_{s'} = 0$. Au contraire, lorsque $s' << s$, $\chi_s \chi'_{s'} \equiv 0$ donc l'intégrale est nulle. C'est ainsi que suivant les valeurs relatives de s et s', on peut faire apparaître $a_\pm \wedge e'$ ou $e \wedge a'_\pm$ dans l'intégrale. ■

Corollaire 36 *Soit $p > 1$. Soit $e \in \Omega^{k-1,p}(H)$ une forme différentielle telle que $e_0 = 0$, et $d_0 e_+ = d_0 e_- = 0$. Alors $\pi^*(d_+ e_- - d_- e_+) \in \mathcal{B}^{k,p}(G,\xi)$.*

8.2 L'espace hyperbolique réel

Il est isométrique au produit semi-direct $G = \mathbf{R} \times_\alpha \mathbf{R}^{n-1}$ où α est l'identité. Pour chaque $p > 1$ fixé, l'espace $\mathcal{B}^{k,p}$ est nul sauf pour au plus une valeur de k. En effet,

$$\frac{n-1}{p} \leq k-1 \Rightarrow \Lambda_-^{k-1} = \Lambda_-^k = 0, \quad \frac{n-1}{p} \geq k \Rightarrow \Lambda_+^{k-1} = \Lambda_+^k = 0.$$

Par conséquent, si $p \leq n-1/k$ ou $p > n-1/k-1$, $H^{k,p}(G) = 0$.

L'exposant $p = n-1/k-1$ est critique en degré $k-1$, et le théorème 1 ne donne rien. On verra en 98 que $R^{k,p}(M) = 0$ et $T^{k,p}(M) \neq 0$ dans ce cas.

Si $\frac{n-1}{k} < p < \frac{n-1}{k-1}$, $H^{k,p}(G) = \mathcal{B}^{k,p}$ est non nul. En effet, Λ_+^{k-1} et Λ_-^k sont nuls, donc pour toute $k-1$-forme e sur $H = \mathbf{R}^{n-1}$, $e_+ = 0$ et $d_- e = 0$ donc $d_+ e_- - d_- e_+ = de$. Du corollaire 36, il résulte que $\mathcal{B}^{k,p}$ contient toutes les différentielles de formes L^p. De la proposition 32, il résulte que les différentielles de formes L^p sont denses au sens des distributions dans $\mathcal{B}^{k,p}$.

Proposition 37 *Supposons que $\frac{n-1}{k} < p < \frac{n-1}{k-1}$. Une k-forme sur $\mathbf{R}^{n-1}$ est dans $\mathcal{B}^{k,p}$ si et seulement si, une fois transportée sur la sphère S^{n-1} par projection stéréographique, elle est exacte et ses coefficients sont dans l'espace de Besov $B_{p,p}^{-k+(n-1/p)}(S^{n-1})$.*

Corollaire 38 *Pour chaque $k = 1, \ldots, n-1$, et p tel que $\frac{n-1}{k} < p < \frac{n-1}{k-1}$, il existe sur l'espace des k-formes fermées à composantes dans $B_{p,p}^{-k+(n-1/p)}(S^{n-1})$ une norme équivalente qui est invariante par le groupe $PO(n,1)$.*

Rappelons une des caractérisations des espaces de Besov sur $\mathbf{R}^{n-1}$, voir [T] page 58.

Soit κ une fonction lisse sur $\mathbf{R}^{n-1}$, à support compact. Si u est une fonction sur $\mathbf{R}^{n-1}$, et si $\tau \in [0,1]$, on *note*

$$\kappa(\tau, u)(x) = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} u(y)\kappa(\tau(x-y))\,dy.$$

Soit s un réel et $p \geq 1$, $q \geq 1$, $a > 0$. Soit κ_0 une fonction lisse sur $\mathbf{R}^{n-1}$, à support compact, d'intégrale non nulle. Il existe une famille $\mathcal{S}$ de codimension finie de noyaux κ telle que la norme de l'espace de Besov $B^s_{p,q}$ soit équivalente à

$$u \mapsto \|\ \kappa_0(1,u)\ \|_{L^p} + (\int_0^a \tau^{-sq} \|\ \kappa(\tau,u)\ \|^q_{L^p} \frac{d\tau}{\tau})^{1/q}.$$

pour $\kappa \in \mathcal{S}$.

Si U est un ouvert borné de $\mathbf{R}^{n-1}$, à bord lisse, l'espace $B^s_{p,q}(U)$ est formé des restrictions à U des fonctions de $B^s_{p,q}(\mathbf{R}^{n-1})$. Les espaces de Besov ainsi définis sont invariants par difféomorphismes, donc on peut parler de fonction $B^s_{p,q}$ au voisinage d'un point dans une variété. Si M est une variété compacte, une fonction est dans $B^s_{p,q}(M)$ si elle est $B^s_{p,q}$ au voisinage de tout point.

Dans les paragraphes suivants, on donne d'abord une définition plus souple des espaces $\mathcal{B}^{*,p}$, comme ***valeurs au bord*** de formes fermées L^p. Puis on montre que localement (au voisinage de chaque point du bord à l'infini) les espaces $\mathcal{B}^{*,p}$ coïncident avec des espaces de Besov. La preuve de la proposition 37 s'achève au paragraphe 8.6 par un passage du local au global.

8.3 Valeur au bord

Dans ce paragraphe, on va donner une caractérisation plus souple des espaces $\mathcal{B}^{*,p}$. Il s'agit de se débarrasser de l'opérateur P, qui dépend d'un choix de coordonnées.

On utilise les deux modèles de l'espace hyperbolique, le demi-espace supérieur $\mathbf{R}^n_+ = \{x_n > 0\}$ et la boule $D = \{x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$. Ils se correspondent via le difféomorphisme

$$\Phi : \mathbf{R}^n_+ \to D, \quad z \mapsto 2\frac{z-e_n}{|z-e_n|} - e_n,$$

où e_n est le vecteur de coordonnées $(0,0,\ldots,1)$. Ce difféomorphisme se prolonge au bord en une projection stéréographique de $\mathbf{R}^{n-1} = \partial\overline{\mathbf{R}^n_+}$ sur $S^{n-1} \setminus \{e_n\} = \partial\overline{D} \setminus \{e_n\}$. Le groupe $G = \mathbf{R} \times_{identite} \mathbf{R}^{n-1}$ agit sur le demi-espace supérieur par

$$g = (t,x),\ z \mapsto (e^t z_1 + x_1, \ldots, e^t z_{n-1} + x_{n-1}, e^t z_n).$$

en respectant la métrique hyperbolique $(z_n)^{-2}(dz_1^2 + \cdots + dz_n^2)$, donc sur la boule, en fixant le point e_n et en respectant la métrique $(1-(z_1^2+\cdots+z_n^2))^{-2}(dz_1^2+\cdots+dz_n^2)$

Remarque. Fixons $p \in]\frac{n-1}{k}, \frac{n-1}{k-1}[$. Si ω' est une $n-k$-forme lisse sur la boule fermée $\overline{D}$, alors ω' est automatiquement $L^{p'}$ relativement à la métrique hyperbolique. Par conséquent, si ψ est une $n-1-k$-forme lisse sur la boule fermée $\overline{D}$, et si ω est une k-forme fermée L^p sur l'espace hyperbolique, l'intégrale $\int_D d\psi \wedge \omega$ a un sens mais elle n'est pas nulle en général.

Définition 39 Version globale. *Soit ω une forme différentielle fermée sur la boule D, L^p pour la métrique hyperbolique, et e une forme différentielle sur le bord $\partial D = S^{n-1}$. On dit que e* est une valeur au bord pour ω *si pour toute forme lisse ψ sur la boule fermée $\overline{D}$,*

$$\int_D d\psi \wedge \omega = \int_{\partial D} \psi \wedge e.$$

Version locale. *Si $\overline{V}$ est un ouvert de la boule fermée $\overline{D}$, ω une forme fermée L^p sur $V = \overline{V} \cap D$ et e une forme sur $U = \overline{V} \cap \partial D$, on demande que*

$$\int_D d\psi \wedge \omega = \int_{\partial D} \psi \wedge e.$$

seulement pour les formes ψ à support compact dans $\overline{V}$.

Remarque. Si ω admet une valeur au bord, celle-ci est unique.

Si ω admet une valeur au bord e' globalement sur la sphère, alors celle-ci est exacte. En effet, c'est automatique si $k < n-1$. Si $k = n-1$, on choisit la fonction constante $\psi = 1$ comme fonction test, et il vient $\int_{S^{n-1}} e' = 0$.

La prise de valeur au bord est invariante par difféomorphismes. Par transport par Φ, on peut parler de valeur au bord dans le demi-espace $\mathbf{R}^n_+$.

Lemme 40 *Soit M une variété riemannienne complète. L'intégration des formes lisses à support compact*

$$\omega, \omega' \mapsto \int_M \omega \wedge \omega'$$

se prolonge par continuité à $(L^p + dL^p) \otimes \Omega^{*,p'}$ de même que la formule de Stokes

$$\int_M d\omega \wedge \omega' + (-1)^k \omega \wedge d\omega' = 0.$$

Preuve. En effet, les formes lisses à support compact sont denses dans $\Omega^{*,p'}$ ainsi que dans $L^p + dL^p$. ∎

Lemme 41 *Soit ω une forme différentielle fermée et L^p sur l'espace hyperbolique vu comme le demi-espace supérieur. Soit e la forme différentielle sur $\mathbf{R}^{n-1}$ telle que $P\omega = \pi^* e$. Alors e est une valeur au bord pour ω au sens du demi-espace.*

Preuve. Soit ψ une $n-k-1$-forme lisse à support compact dans le demi-espace fermé $\overline{\mathbf{R}^n_+}$. Comme $d\omega = 0$, $\omega = P\omega + dB\omega$. Comme $B\omega \in L^p$, $B\omega$ et $dB\omega$ sont dans $L^p + dL^p$. D'autre part, $d\psi \in L^{p'}$, donc le lemme 40 s'applique et $\int d\psi \wedge dB\omega = 0$. Soit χ une fonction qui ne dépend que de z_n, vaut 0 au voisinage de $\{z_n = 0\}$ et 1 hors d'un petit voisinage de $\{z_n = 0\}$. Alors la forme $\chi\psi$ est à support compact. Comme $P\omega \in \Lambda^p + dL^p$ et $dP\omega = 0$, le lemme 40 s'applique et $\int d(\chi\psi) \wedge P\omega = 0$. On conclut que

$$\int d\chi \wedge \psi \wedge P\omega + \int \chi d\psi \wedge P\omega = 0$$

Le second terme converge vers $\int d\psi \wedge P\omega = \int d\psi \wedge \omega$ lorsque le support de $1-\chi$ grandit. Comme $P\omega = \pi^* e$ et ψ est continue jusqu'au bord, le second terme converge vers $\int_{\mathbf{R}} d\chi \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \psi \wedge e$. ∎

Lemme 42 *Soit K une fonction lisse et à support compact sur le groupe G telle que $\int_G K(r)\, dr = 1$. L'opérateur de convolution des formes différentielles avec le noyau K est encore noté*

$$K : \omega \mapsto \int_G R_g^* \omega\, K(g)\, dg.$$

Cet opérateur commute avec la valeur au bord, i.e. e est la valeur au bord de $K(\pi^* e)$. En particulier, si $e \in \mathcal{B}^{*,p}$, $PK(\pi^* e) = \pi^* e$.

Preuve. Par dualité, il suffit de vérifier que l'opérateur adjoint K^* (qui est associé au noyau $g \mapsto K(g^{-1})\, d(g^{-1})/dg$) préserve la restriction au bord, au sens ordinaire, des formes ψ lisses et à support compact dans le demi-espace fermé. Or du point de vue euclidien, il s'agit de faire des moyennes avec un noyau d'intégrale 1 et de support dont le diamètre tend vers 0 lorsqu'on se rapproche du bord. Ces moyennes convergent vers l'identité. ■

8.4 Version locale des espaces $\mathcal{B}^{*,p}$

Définition 43 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^{n-1}$. On* note *$\mathcal{B}^{k,p}(U)$ l'espace des k-formes différentielles fermées e sur U telles qu'il existe un voisinage U' de $\overline{U}$, un réel a et une k-forme différentielle fermée ω sur l'ouvert $]a,+\infty[\times U'$ du groupe de Lie $G = \mathbf{R}\times_{identite}\mathbf{R}^{n-1}$, L^p pour une métrique invariante à gauche sur G, telle que $P\omega = \pi^* e$ sur $]a,+\infty[\times U$.*

On va comparer $\mathcal{B}^{k,p}(U)$, non pas à un espace de formes fermées à composantes dans $B^s_{p,p}(U)$, mais à une variante. C'est un détail technique.

Définition 44 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^{n-1}$, soit $s\in\mathbf{R}$, $p>1$. On* note *$Z^{k,s}_{p,p}(U)$ l'espace des k-formes différentielles fermées e sur U telles qu'il existe un voisinage U' de $\overline{U}$ et une k-forme différentielle fermée $e'\in B^{-k+(n-1/p)}_{p,p}(U')$ qui prolonge e.*

Remarque. Il est vraisemblable, mais pas facile à montrer, que $Z^{k,s}_{p,p}(U)$ coïncide avec l'espace des formes fermées à composantes dans $B^s_{p,p}(U)$. Nous n'aurons pas besoin de rentrer dans cette subtilité, puisque l'objectif est de travailler avec des formes fermées définies globalement sur la sphère.

Lemme 45 *Soit U un ouvert borné de $\mathbf{R}^{n-1}$. Une k-forme sur U est dans $\mathcal{B}^{k,p}(U)$ si et seulement si elle est dans $Z^{k,-k+(n-1/p)}_{p,p}(U)$.*

Preuve. Etant donné $\kappa\in\mathcal{S}$, on construit aisément une fonction lisse K à support compact sur le groupe $G=\mathbf{R}\times_{identite}\mathbf{R}^{n-1}$ telle que

$$\kappa(x)=\int_{\mathbf{R}} K(t,x)e^{(k-2n+2)t}\,dt.$$

On peut aisément réaliser, en plus de cette égalité, la condition $\int K(t,x)e^{(n-1)t}\,dt\,dx=1$. L'opérateur de convolution K commute avec les translations à gauche et est donc borné de L^p_{-1} dans L^p.

D'après le corollaire 24, une k-forme fermée sur $\mathbf{R}^{n-1}$ est dans $\mathcal{B}^{k,p}$ si est seulement si ses composantes sont dans l'espace fonctionnel F défini comme suit

$$u\in F \Leftrightarrow e^{kt}\pi^* u\in L^p_{-1}(G).$$

En effet, la forme $e^{-kt}\pi^*\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_k$ est fermée et invariante à gauche sur le groupe G. La même caractérisation s'applique à la version locale $\mathcal{B}^{k,p}(U)$, car la définition s'affranchit des effets de bord.

Soit u une fonction sur $\mathbf{R}^{n-1}$. On vérifie que pour tout $(t,x)\in G$,

$$K(e^{kt}\pi^* u)(t,x)=e^{kt}\kappa(e^{-t},u)(x).$$

Par définition,

$$\begin{aligned} K(e^{kt}\pi^* u)(t,x) &= \int_G e^{k(t+t')}\pi^* u(R_{(t',x')}(t,x))K(t',x')e^{-(n-1)t'}\,dt'\,dx' \\ &= e^{kt}\int_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}} u(x'e^t+x)K(t',x')e^{(k-n+1)t'}\,dt'\,dx' \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{kt}\int_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}} u(y)K(t',e^{-t}(y-x))e^{(k-2n+2)t'}\,dt'\,dy\\
&= e^{kt}\int_{\mathbf{R}^{n-1}} u(y)\kappa(e^{-t}(y-x))\,dy\\
&= e^{kt}\kappa(e^{-t},u)(x)
\end{aligned}
$$

Avec le changement de variable $\tau=e^{-t}$, il vient

$$\| K(e^{kt}\pi^* u)\|_{L^p(G)} = (\int_0^{+\infty}\tau^{-kp+n-1}\|\kappa(\tau,u)\|^p_{L^p(\mathbf{R}^{n-1})}\frac{d\tau}{\tau})^{1/p},$$

et plus généralement, étant donné $a\in\mathbf{R}$ et un ouvert $U\subset\mathbf{R}^{n-1}$,

$$\| K(e^{kt}\pi^* u)\|_{L^p(]a,+\infty[\times U)} \leq (\int_0^{e^{-a}}\tau^{-kp+n-1}\|\kappa(\tau,u)\|^p_{L^p(U^a)}\frac{d\tau}{\tau})^{1/p},$$

où $U^a=\{x+e^{-a}\lambda x' \,|\, x,\,x'\in U\}$ et λ dépend du support du noyau K.

Soit $e\in\mathcal{B}^{k,p}(U)$. Alors il existe un réel a, un voisinage U' de $\overline{U}$, une forme fermée e' sur U' prolongeant e et une forme fermée $\omega\in L^p(]a,+\infty[\times U')$ telle que $P\omega=\pi^*e'$. Comme l'opérateur P est borné de L^p dans L^p_{-1} et K est borné de L^p_{-1} dans L^p, $KP(\omega)=K(\pi^*e')$ est dans $L^p(]a,+\infty[\times U')$. Si u' est une composante de e', alors $K(e^{kt}\pi^*u')$ est une composante de $K(\pi^*e')$, donc dans $L^p(]a,+\infty[\times U')$. Autrement dit, $u'\in B^{-k+(n-1/p)}_{p,p}(U)$. Ceci prouve que $e\in Z^{k,-k+(n-1/p)}_{p,p}(U)$.

Inversement, soit $e\in Z^{k,-k+(n-1/p)}_{p,p}(U)$. Alors il existe un voisinage U' de $\overline{U}$ et une k-forme fermée e' sur U' dont les composantes sont dans $B^{-k+(n-1/p)}_{p,p}(U')$. On pose $\omega=K(\pi^*e')$. Comme U' est compact, cette convolution est bien définie dans un ouvert de la forme $]a,+\infty[\times U''$ et est L^p pour la métrique hyperbolique (l'une des métriques invariantes à gauche sur le groupe G). Comme K commute avec la différentielle, ω est fermée. L'identité $P\omega=\pi^*e'$ résulte du lemme 42. Elle montre que $e\in\mathcal{B}^{k,p}(U)$. ∎

8.5 L'opérateur P' adapté au modèle de la boule de Poincaré

On utilise les coordonnées polaires euclidiennes $r\in[0,1[$, $\theta\in S^{n-1}$ dans la boule D. On *note*

$$\xi'=(1-r^2)\frac{\partial}{\partial r}$$

le gradient de la distance hyperbolique à l'origine. C'est un champ de vecteurs unitaire, singulier à l'origine. Son flot ϕ'_t est défini pour tout $t\geq 0$. Il est $(k-1,p)$-dilatant pour chaque k et p tels que $n-1-(k-1)p<0$. Comme en 2.3, on peut définir l'opérateur B'^+

$$B'^+\omega=-\int_0^{+\infty}(\phi'_t)^*\iota_{\xi'}\omega\,dt$$

puis $P'=1-dB'^+$ sur les k-formes fermées. Alors B'^+ est borné sur L^p, $dP'=0$, $\iota_{\xi'}P'=0$. Si ω est fermée et L^p, la forme $P'\omega$ ne dépend pas de r, elle est de la forme

$$P'\omega=\pi'^*e'$$

où e' est une k-forme fermée sur la sphère S^{n-1} et $\pi' : D\setminus\{0\}\to S^{n-1}$ est la projection radiale. Cette construction se localise au-dessus d'un ouvert U de S^{n-1}. Par conséquent,

Lemme 46 *Soit U un ouvert de S^{n-1} et $V=\pi'^{-1}(U)$. Soit ω une forme fermée sur V qui est L^p pour la métrique hyperbolique. Si $P'\omega=0$, alors il existe une forme β sur V telle que β et $d\beta$ sont L^p pour la métrique hyperbolique, et telle que $d\beta=\omega$.*

L'argument du lemme 41 s'étend sans changement au cas de la boule.

Lemme 47 *Soit ω une forme fermée sur la boule D qui est L^p pour la métrique hyperbolique. Soit e' la forme différentielle sur S^{n-1} telle que $P'\omega = \pi'^* e'$. Alors e' est une valeur au bord pour ω au sens de la boule.*

Lemme 48 *Notons $\Phi : \mathbf{R}^{n-1} \to S^{n-1}$ la projection stéréographique. Soit ω une k-forme fermée L^p sur l'espace hyperbolique, soit e (resp. e') sa valeur au bord sur $\mathbf{R}^{n-1}$ (resp. S^{n-1}). Alors $e = \Phi^* e'$. En particulier, e est exacte.*

Preuve. En composant avec Φ les formes lisses sur la boule fermée $\overline{D}$, nulles au voisinage du point e_n, on obtient toutes les formes test du demi-espace. Par conséquent $\Phi^* e'$ est une valeur au bord de ω. Par unicité, $\Phi^* e' = e$. ∎

Corollaire 49 *Tout élément du groupe de Möbius envoie l'espace $\mathcal{B}^{k,p}$ dans lui-même.*

Preuve. Le groupe de Möbius est le groupe des isométries de l'espace hyperbolique, vu comme groupe de transformations (définies sauf en au plus un point) de $\mathbf{R}^{n-1}$.

L'espace $\mathcal{B}^{k,p}$ est par définition l'ensemble des formes e sur $\mathbf{R}^{n-1}$ telles que $\pi^* e$ est dans l'image de P. D'après les lemmes 41 et 48, c'est aussi l'espace des valeurs au bord de formes fermées L^p. Or l'opération de prise de la valeur au bord est invariante par les difféomorphismes de $\overline{D}$, et le groupe des isométries agit par difféomorphismes de la boule fermée. ∎

8.6 Preuve de la proposition 37

Soit e une k-forme sur $\mathbf{R}^{n-1}$ qui est dans $\mathcal{B}^{k,p}$. Alors la forme $e' = (\Phi^{-1})^* e$ sur S^{n-1} est la valeur au bord d'une forme fermée L^p, donc elle est exacte. De plus, d'après le lemme 45, ses composantes sont dans l'espace de Besov $B_{p,p}^{-k+(n-1/p)}(S^{n-1})$. En effet, le fait d'être dans l'espace fonctionnel $B_{p,p}^{-k+(n-1/p)}(S^{n-1})$ se vérifie localement. Or tous les points du bord de S^{n-1} se valent, au groupe de Möbius près.

Inversement, soit e' une k-forme exacte sur S^{n-1} dont les composantes sont dans l'espace de Besov de la sphère $B_{p,p}^{-k+(n-1/p)}(S^{n-1})$. On va construire une forme fermée L^p sur l'espace hyperbolique dont e' est la valeur au bord. On construit d'abord cette forme sur une couronne $C = \{1 - \epsilon < r < 1\}$. Pour cela, on utilise Mayer-Vietoris. D'après le lemme 45, il existe un recouvrement ouvert U_i de S^{n-1} tel que $e'_{|U_i}$ soit la valeur au bord d'une forme fermée ω_i définie sur $V_i = C \cap \pi'^{-1}(U_i)$ et L^p pour la métrique hyperbolique. Sur l'intersection $V_i \cap V_j$, la forme fermée $\omega_i - \omega_j$ a une valeur au bord nulle, donc, d'après le lemme 46,

$$\omega_i - \omega_j = d\beta_{ij}$$

où $\beta_{ij} = B'^+(\omega_i - \omega_j)$ est dans L^p ainsi que sa différentielle. Noter que sur $V_i \cap V_j \cap V_k$, $\beta_{ij} + \beta_{jk} + \beta_{ki} = 0$. Soit (χ_i) une partition de l'unité sur S^{n-1} subordonnée au recouvrement (U_i). On note $\chi'_i = \chi_i \circ \pi'$. Ces fonctions sont bornées et leur gradient hyperbolique est borné sur la couronne C. Sur l'ouvert V_i, on pose

$$\omega = \omega_i + d(\sum_k \chi'_k \beta_{ik}).$$

Cela définit sans ambiguïté une forme fermée sur la couronne C, L^p pour la métrique hyperbolique, dont la valeur au bord est e'.

Comme e' est exacte, ω l'est aussi, $\omega = d\gamma$ et on peut choisir γ de sorte qu'elle soit L^p au voisinage du bord intérieur de la couronne C. On utilise maintenant une fonction lisse χ'' de la distance à l'origine, à support compact et qui vaut 1 hors de la couronne C. La forme $d((1-\chi'')\gamma)$ est fermée et coïncide avec ω au voisinage du bord, donc elle est L^p et sa valeur au bord est e'. Ceci prouve que e', une fois transportée par la projection stéréographique, est dans $\mathcal{B}^{k,p}$. ∎

Remarque. La proposition 37 s'étend aux autres espaces symétriques de rang un. Dans la définition des espaces de Besov, il faut remplacer la distance euclidienne de $\mathbf{R}^{n-1}$ par une distance de *Carnot-Carathéodory* sur un groupe de Heisenberg. Dans la preuve, la seule modification notable concerne le choix des formes-test dans la définition de la valeur au bord. Il faut prendre les formes lisses sur la boule fermée dont la restriction au bord est une section de $\Lambda^*_{+(p)}$, i.e. dont certaines composantes sont nulles.

9 Conditions suffisantes d'annulation de cohomologie

9.1 Cas général

Proposition 50 *Soit M une variété riemannienne de dimension n à géométrie bornée, soit ξ un champ de vecteurs unitaire $(k-1,p)$-contractant et (k,p)-contractant sur M. Alors $H^{k,p}(M)=0$.*

Preuve. Les sous-fibrés Λ^{k-1}_+ et Λ^k_+ étant nuls, la proposition 32 donne que $\mathcal{B}^{k,p}(M,\xi)=0$. Comme p est en particulier non critique en degré $k-1$, le théorème 1 donne une surjection $0=H^k(\mathcal{B}^{*,p}(M,\xi))\to H^{k,p}(M)$. ■

Corollaire 51 *Soit M une variété riemannienne de dimension n à géométrie bornée, soit ξ un champ de vecteurs unitaire tel que $div(\xi)$ soit minoré par une constante strictement positive. Alors $H^{n,p}(M)=0$.*

Preuve. En effet, si $div(\xi)\geq\eta>0$, alors tout exposant $p>1$ est non critique en degrés n et $n-1$. ■

Remarque. L'hypothèse de géométrie bornée est superflue.

Proposition 52 *Soit G un groupe de Lie résoluble connexe. Soient A et H des sous-groupes fermés tels que A est nilpotent, H est distingué et $G=AH$. Soit*

$$\Lambda^\ell\mathcal{H}=\sum_{\lambda\in\Sigma(\ell)}\mathcal{H}_{\ell,\lambda}$$

la décomposition de la puissance extérieure $\Lambda^\ell\mathcal{H}\otimes\mathbf{C}$ en espaces caractéristiques sous l'action de $\mathcal{A}$. On note $\Re\Sigma(\ell)$ l'ensemble des parties réelles des éléments de $\Sigma(\ell)$. On note $\tau\in\mathcal{A}^*$ la forme linéaire $\xi\mapsto\operatorname{tr}(ad_\xi)$. On note $r=\dim G-\dim H$. On considère deux convexes de $\mathcal{A}^*$, l'enveloppe convexe C_1 de $\Re\Sigma(k-r)\cup\cdots\cup\Re\Sigma(k-1)$ et l'enveloppe convexe C_2 de $\Re\Sigma(k-r)\cup\cdots\cup\Re\Sigma(k)$.

Soit $p>1$. Si τ/p n'est contenu ni dans C_1, ni dans l'intérieur de C_2, alors $H^{k,p}(G)=0$.

Preuve. Si τ/p n'est pas contenu dans l'intérieur de l'enveloppe convexe de $\Re\Sigma(k-r)\cup\cdots\cup\Re\Sigma(k)$, alors il existe $\xi\in\mathcal{A}$ tel que pour tout $\lambda\in\Sigma(k-r)\cup\cdots\cup\Sigma(k)$, $\tau(\xi)-p\Re e\lambda(\xi)\geq 0$. Si de plus τ/p n'est pas contenu dans l'intérieur de l'enveloppe convexe de $\Re\Sigma(k-r)\cup\cdots\cup\Re\Sigma(k-1)$, on peut choisir ξ de sorte que pour tout $\lambda\in\Sigma(k-r)\cup\cdots\cup\Sigma(k-1)$, $\tau(\xi)-p\Re e\lambda(\xi)>0$. Nécessairement, $\xi\notin\mathcal{H}$. Alors le champ de vecteurs invariant à gauche ξ sur G est $(k-1,p)$-dilatant, i.e. $\Lambda^{k-1}_-=\Lambda^{k-1}_0=0$. En effet, comme ad_ξ est nilpotente sur A, toute valeur propre de ad_ξ sur $\Lambda^k(\mathcal{G}/\mathbf{R}\xi)^*$ est de la forme $\lambda(\xi)$ où λ est une valeur propre de $\mathcal{A}$ sur $\Lambda^\ell\mathcal{H}^*$ avec $k-\dim G+\dim H+1\leq\ell\leq k$. De plus, ξ est faiblement (k,p)-dilatant au sens où $\Lambda^k_-=0$. Comme $\operatorname{tr}(ad_\xi)>0$, le groupe à 1 paramètre engendré par ξ est automatiquement injectif et fermé. D'après la proposition 33, $\mathcal{B}^{k,p}(G,\xi)=0$. Avec le théorème 1, cela donne $H^{k,p}(G)=0$. ■

Remarque. Soit $m=\dim H$ et $m_{k,\lambda}=\dim\mathcal{H}_{k,\lambda}$. Alors

$$\sum_{\lambda\in\Sigma(k)}m_{k,\lambda}=\dim\Lambda^k\mathcal{H}=\binom{m}{k}\quad\text{et}\quad\sum_{\lambda\in\Sigma(k)}m_{k,\lambda}\lambda=\binom{m-1}{k-1}\tau$$

donc $\frac{k}{m}\tau$ est dans l'enveloppe convexe de $\Sigma(k)$. Par conséquent, la proposition 52 ne s'applique jamais lorsque $\tau=0$, i.e. lorsque G est unimodulaire.

Exemple. Soit G la partie AN de la décomposition d'Iwasawa de $Sl(3,\mathbf{R})$. Alors il existe une base de $\mathcal{A}=\mathbf{R}^2$ et dans laquelle les racines s'écrivent $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$. Alors $\Sigma_0=\{(0,0)\}$, $\Sigma_1=\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$, $\Sigma_2=\{(1,1),(2,1),(1,2)\}$ et $\Sigma_3=\{\tau=(2,2)\}$. En degré 2, on constate que $\tau/p\in Conv(\Sigma_0\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2)$ si et seulement si $p\geq 4/3$. Par conséquent $H^{2,p}(G)=0$ pour $p<4/3$. En degré 3, $\tau/p\in Conv(\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3)$ si et seulement si $p\leq 4$. Par conséquent $H^{3,p}(G)=0$ pour $p>4$.

Corollaire 53 *Soit $G=\mathbf{R}\times_\alpha H$ un produit semi-direct où α est une dérivation de l'algèbre de Lie $\mathcal{H}$. Notons $\lambda_1\leq\cdots\leq\lambda_{n-1}$ les parties réelles des valeurs propres de α. Pour $k=1,\ldots,n-1$, on note $w_k=\lambda_1+\cdots+\lambda_k$ et $W_k=\lambda_{n-k}+\cdots+\lambda_{n-1}$.*

- *Si $w_{n-1}/p<w_{k-1}$ et $w_{n-1}/p\leq w_k\}$, alors $H^{k,p}(G)=0$.*
- *Si $w_{n-1}/p>W_{k-1}$ et $w_{n-1}/p\geq W_k\}$, alors $H^{k,p}(G)=0$.*

Preuve. Les parties réelles des valeurs propres de $\Lambda^k\alpha$ sont les sommes de k nombres parmi les λ_i. Elles sont toutes comprises entre w_k et W_k. Par conséquent, l'enveloppe convexe C_1 de $\Re\Sigma(k-1)$ est l'intervalle $[w_{k-1},W_{k-1}]$ et l'enveloppe convexe C_2 de $\Re\Sigma(k-1)\cup\Re\Sigma(k)$ est l'intervalle $[\min\{w_{k-1},w_k\},\max\{W_{k-1},W_k\}]$. ■

9.2 Cas particulier des groupes métabéliens

En utilisant le second mécanisme illustré en 7.1, on va améliorer les résultats précédents.

Proposition 54 *Soit $G=\mathbf{R}\times_\alpha H$ un produit semi-direct. Soit $\lambda_{c,min}$ (resp. $\lambda_{c,max}$) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de la restriction de α au centre de $\mathcal{H}$.*

- *Si $w_{n-1}/p>W_{k-1}$ et $w_{n-1}/p\geq\lambda_{c,min}+W_{k-1}$, alors $H^{k,p}(G)=0$.*
- *Si $w_{n-1}/p<w_{k-1}$ et $w_{n-1}/p\leq\lambda_{c,max}+w_{k-1}$, alors $H^{k,p}(G)=0$.*

Preuve. La seconde hypothèse se déduit de la première en changeant α en $-\alpha$. Supposons donc que $w_{n-1}/p>W_{k-1}$ et que $w_{n-1}/p\geq\lambda_{c,min}+W_{k-1}$. Notons $\xi=\frac{\partial}{\partial t}$ de sorte que $ad_\xi=\alpha$ sur $\mathcal{H}$. Les valeurs propres de $\Lambda^{k-1}\alpha$ sont de partie réelle inférieure ou égale à $W_{k-1}<\mathrm{tr}\,(\alpha)/p$. Par conséquent, le champ invariant à gauche ξ est $(k-1,p)$-contractant.

Soit $Z(H)$ le centre de H et $E\subset Z(\mathcal{H})$, la somme des sous-espaces caractéristiques de α relatifs à des valeurs propres de partie réelle $\lambda_{c,min}$. Le sous-espace $E^*\otimes\Lambda^{k-1}\subset\Lambda^k$ est invariant. Les valeurs propres de $\Lambda^k\alpha$ sur ce sous-espace sont de parties réelles inférieures ou égales à $\lambda_{c,min}+W_{k-1}\leq\mathrm{tr}\,(\alpha)/p$. Par conséquent, $E^*\otimes\Lambda^{k-1}\subset\Lambda^k_-\oplus\Lambda^k_0$.

D'après la proposition 33, toute forme β telle que $\pi^*\beta\in\mathcal{B}^{k,p}(G,\xi)$ est une section de Λ^k_+. Par conséquent, pour tout vecteur $\eta\in E$, $\iota_\eta\beta\equiv 0$. Si de plus $d\beta=0$, alors β est invariante par translation dans la direction η. Sachant que la norme L^p+dL^p de $\pi^*\beta$ est une intégrale sur H, ceci n'est possible que si $\beta=0$. On conclut que $\mathcal{B}^{k,p}(G,\xi)\cap\ker d=0$, puis, avec le théorème 1, que $H^{k,p}(G)=0$. ■

Corollaire 55 *On considère le produit semi-direct $G=\mathbf{R}\times_\alpha\mathbf{R}^{n-1}$ où α une matrice carrée $n-1\times n-1$. On note $\lambda_1\leq\cdots\leq\lambda_{n-1}$ les parties réelles des valeurs propres de α. Pour $k=1,\ldots,n-1$, on note $W_k=\lambda_{n-k}+\cdots+\lambda_{n-1}$. Si $w_{n-1}/p>W_{k-1}$ et $w_{n-1}/p\geq\lambda_1+W_{k-1}$, alors $H^{k,p}(G)=0$. De même, si $w_{n-1}/p<w_{k-1}$ et $w_{n-1}/p\leq\lambda_{n-1}+w_{k-1}$, alors $H^{k,p}(G)=0$.*

Remarque. On verra en 91 que si $\lambda_1>0$, l'intervalle $[w_{k-1},\lambda_1+W_{k-1}]$ du corollaire 55 est optimal.

10 Restrictions sur la torsion

Les résultats principaux de cette section sont les propositions 56 et 63. Les comparer à [KS].

10.1 Cas général

Proposition 56 *Soit M une variété riemannienne à géométrie bornée. Soit ξ un champ de vecteurs unitaire $(k-2,p)$-Anosov et $(k-1,p)$-contractant (resp $(k-1,p)$-dilatant) sur M. Alors $T^{k,p}(M)=0$.*

Preuve. D'après la proposition 32, $\mathcal{B}^{k-1,p}(G,\xi)=0$, car le sous-fibré Λ_+^{k-1} (resp. Λ_-^{k-1}) est nul. Par conséquent, la cohomologie en degré k du complexe $\mathcal{B}^{*,p}(G,\xi)$ est séparée. Comme on suppose p non critique aussi en degré $k-2$, le thèorème 1 donne un isomorphisme $T^{k,p}(M)=T^k(\mathcal{B}^{*,p}(M,\xi))=0$. ∎

Proposition 57 *Soit $G=\mathbf{R}\times_\alpha H$ un produit semi-direct. On note $\lambda_1\leq\cdots\leq\lambda_{n-1}$ les parties réelles des valeurs propres de α. Pour $k=1,\ldots,n-1$, on note $w_k=\lambda_1+\cdots+\lambda_k$ et $W_k=\lambda_{n-k}+\cdots+\lambda_{n-1}$. On suppose que $p>1$ est non critique en degré $k-2$. Si $w_{n-1}/p>W_{k-1}$ ou bien si $w_{n-1}/p<w_{k-1}$, alors $T^{k,p}(G)=0$.*

Remarque. On verra en 93 que si H est abélien, l'intervalle $[w_{k-1},W_{k-1}]$ est optimal.

10.2 Preuve du théorème B

Soit M une variété riemannienne complète de dimension n, simplement connexe, dont la courbure sectionnelle K satisfait $-1\leq K\leq\delta<0$. Alors M est automatiquement à géométrie bornée. Soit $p>1$. Soit ξ un champ de vecteur de Busemann sur M. Supposons que

$$p<\mathbf{q}(n,\delta,k),\quad \text{i.e. que}\quad k<\frac{(n-1)\sqrt{-\delta}}{p-1+\sqrt{-\delta}}.$$

D'après la proposition 8, le champ ξ est (j,p)-contractant pour tout degré $j\leq k$. De la proposition 50, il résulte que $H^{k,p}(M)=0$.

Enfin, si

$$p\leq\mathbf{q}(n,\delta,k-1),\quad \text{i.e. si}\quad k<\frac{p-1+n\sqrt{-\delta}}{p-1+\sqrt{-\delta}},$$

le champ ξ est (j,p)-contractant pour tout degré $j\leq k$. En particulier, il est $(k-2,p)$-Anosov. De la proposition 56, il résulte que $T^{k,p}(M)=0$. ∎

10.3 Cas où le groupe H n'est pas abélien

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux produits semi-directs $G=\mathbf{R}\times_\alpha H$.

On va voir que la non commutativité du groupe H force parfois la torsion $T^{*,p}(G)$ à être non nulle sur un intervalle plus grand.

On identifiera (abusivement) $\mathcal{B}^{*,p}(G,\frac{\partial}{\partial t})$ à un espace de formes différentielles sur H, *noté* simplement $\mathcal{B}^{k,p}$. Si on identifie l'algèbre extérieure $\Lambda^*\mathcal{H}^*$ aux formes différentielles invariantes à gauche sur H, alors la différentielle extérieure devient un opérateur algébrique *noté* $\delta:\Lambda^{k-1}\mathcal{H}^*\to\Lambda^k\mathcal{H}^*$.

Lemme 58 *Soit J un sous-espace vectoriel de $\Lambda^{k-1}\mathcal{H}^*$. Posons*

$$K=J\cap\delta^{-1}(\mathcal{H}^*\otimes J)=\ker\{\overline{\delta}:J\to\Lambda^k\mathcal{H}^*/\mathcal{H}^*\otimes J\}.$$

Alors

$$\mathcal{B}^{k,p}\cap\overline{\Gamma(J)}\subset\mathcal{B}^{k,p}\cap\overline{\Gamma(K)}+d\mathcal{B}^{k-1,p}.$$

Preuve. Soit $e\in\mathcal{B}^{k,p}$ tel que $e=\lim da_j$ au sens des distributions, où $a_j\in\Gamma(J)$. Soit K^s un supplémentaire de K dans J. On écrit $a_j=b_j+c_j$ où $b_j\in\Gamma(K)$ et $c_j\in\Gamma(K^s)$. Alors modulo $\Gamma(\mathcal{H}^*\otimes J)$,

$$da_j=dc_j=\overline{\delta}c_j.$$

Or l'opérateur algébrique $\overline{\delta}$ est injectif sur K^s, donc il admet un inverse à gauche $\overline{\delta}^{-1} : \Lambda^k\mathcal{H}^*/\mathcal{H}^* \otimes J \to K^s$. D'après le corollaire 24, $\overline{\delta}^{-1}$ est borné sur $\mathcal{B}^{k,p}$. Comme

$$c_j = \overline{\delta}^{-1}(da_j \bmod \mathcal{H}^* \otimes J) \in \mathcal{B}^{k,p}$$

et da_j converge dans $\mathcal{B}^{k,p}$, c_j converge dans $\mathcal{B}^{k-1,p}$ vers

$$c = \overline{\delta}^{-1}(e \bmod \mathcal{H}^* \otimes J)$$

et $e - dc = \lim db_j \in \overline{\Gamma(K)}$. ∎

Corollaire 59 *On garde les notations du lemme 58. Lorsque, partant du sous-espace $\Lambda^{k-1}_{\pm}$ de $\Lambda^{k-1}\mathcal{H}^*$, on itère la construction J donne $K = J \cap \delta^{-1}(\mathcal{H}^* \otimes J)$ on trouve une suite de noyaux qui se stabilise en $K_{\pm}$. Alors*

$$\overline{d\mathcal{B}^{k-1,p}} \subset \mathcal{B}^{k,p} \cap \overline{\Gamma(K_{\pm})} + d\mathcal{B}^{k-1,p}.$$

En particulier, si p est non critique en degrés $k-2$ et $k-1$, et si $K_+ = 0$ ou $K_- = 0$, alors $T^{k,p}(G) = 0$.

Preuve. D'après la proposition 32,

$$\mathcal{B}^{k-1,p} \subset \overline{\Gamma(\Lambda^{k-1}_{+}) + d\Gamma(\Lambda^{k-2}_{+})}$$

donc

$$\overline{d\mathcal{B}^{k-1,p}} \subset \overline{d\Gamma(\Lambda^{k-1}_{+})}.$$

et on applique le lemme 58 autant de fois que nécessaire. Si $K_+ = 0$, alors $d\mathcal{B}^{k-1,p}$ est fermé. Si de plus p est non critique en degrés $k-2$ et $k-1$, le théorème 1 s'applique et $T^{k,p}(G) = T^k(\mathcal{B}^{*,p}, d) = 0$. ∎

Corollaire 60 *Soit $G = \mathbf{R} \times_\alpha H$ un produit semi-direct. On suppose que p est non critique en degrés $k-2$ et $k-1$ pour le champ $\frac{\partial}{\partial t}$. On note $I_{\pm}$ l'idéal engendré par les sections de $\Lambda^{k-1}_{\pm(p)}$. Si tout idéal différentiel contenu dans I_+ ou I_- intersecte trivialement $\Lambda^{k-1}_{\pm(p)}$, alors $T^{k,p}(G) = 0$.*

Preuve.
Il ne s'agit que d'une reformulation du corollaire 59. L'idéal engendré par les sections de K_+ est invariant par la différentielle extérieure. C'est le plus grand idéal différentiel contenu dans I_+. ∎

En degré 2, le sous-espace $K_{\pm}$ a une interprétation simple.

Lemme 61 *Etant donné un sous-espace $J \subset \mathcal{H}^*$, on note $J^0 \subset \mathcal{H}$ son annulateur. Alors $K = J \cap \delta^{-1}(\mathcal{H}^* \otimes J)$ satisfait*

$$K^0 = J^0 + [J^0, J^0].$$

En particulier, K^0_+ est la sous-algèbre de Lie engendrée par $\mathcal{H}_- = (\Lambda_+)^0$.

Corollaire 62 *Soit $G = \mathbf{R} \times_\alpha H$ un produit semi-direct. Supposons que $\mathrm{tr}\,(\alpha) \neq 0$. Notons $\mathcal{H}_+$ (resp. $\mathcal{H}_-$) la somme des sous-espaces caractéristiques de α sur $\mathcal{H}$ relatifs à des valeurs propres de partie réelle supérieure (resp. inférieure) à $\mathrm{tr}\,(\alpha)/p$. Supposons que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ et que l'un des sous-espaces $\mathcal{H}_{\pm}$ engendre l'algèbre de Lie $\mathcal{H}$. Alors $T^{2,p}(G) = 0$.*

Proposition 63 *Soit G un groupe de Lie résoluble connexe. Soient A et N des sous-groupes nilpotents tels que N est distingué et $G = AN$. Soit $\mathcal{N} = \sum_{\lambda \in \Sigma} \mathcal{N}_\lambda$ la décomposition de l'algèbre de Lie complexifiée $\mathcal{N} \otimes \mathbf{C}$ en espaces caractéristiques sous l'action de $\mathcal{A}$. On note $\tau \in \mathcal{A}^*$ la forme linéaire $\xi \mapsto \mathrm{tr}\,(ad_\xi)$. Soit $p > 1$ un exposant non critique pour l'action de A sur G. S'il existe un sous-ensemble $\Sigma' \subset \Sigma$ tel que l'enveloppe convexe de $\Sigma' \cup \{0\}$ ne contient pas τ/p et tel que les $\mathcal{N}_\lambda$ pour $\lambda \in \Sigma'$ engendrent $\mathcal{N}$, alors $T^{2,p}(G) = 0$.*

Preuve. Notons $H \subset G$ le noyau de l'homomorphisme modulaire $G \to \mathbf{R}$. Son algèbre de Lie $\mathcal{H}$ est le noyau de la forme linéaire τ. Si l'enveloppe convexe de $\Sigma' \cup \{0\}$ ne contient pas τ/p, alors il existe un vecteur $\xi \in \mathcal{A}$ tel que pour toute forme linéaire $\lambda \in \Sigma'$, $\lambda(\xi) < \tau(\xi)/p$, et tel que $0 < \tau(\xi)/p$. Utilisons ce vecteur pour écrire G comme produit semi-direct $G = \mathbf{R} \times_\alpha H$, autrement dit $\alpha = ad_\xi$ restreinte à $\ker \tau$. Quitte à perturber ξ, on peut supposer que les exposants critiques de ξ sont ceux de l'action de A sur G, et en particulier que p est non critique pour le champ ξ.

L'algèbre de Lie $\mathcal{H}$ se décompose en espaces caractéristiques de l'endomorphisme α,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \bigoplus_{\{\lambda \in \Sigma,\ \lambda(\xi) \neq 0\}} \mathcal{N}_\lambda .$$

Alors

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H}_0^* \oplus \bigoplus_{\{\lambda \in \Sigma,\ \lambda(\xi) \neq 0\}} \mathcal{N}_\lambda^* .$$

Comme $\mathrm{tr}\, \alpha = \tau(\xi)$,

$$\Lambda^1_+ = \bigoplus_{\{\lambda \in \Sigma,\ \lambda(\xi) > \tau(\xi)/p\}} \mathcal{N}_\lambda^* .$$

Notons $\mathcal{H}_-$ l'annulateur dans $\mathcal{H}$ de Λ^1_+. Comme

$$\mathcal{H}_- = \mathcal{H}_0 \oplus \bigoplus_{\{\lambda \in \Sigma,\ \lambda(\xi) < \tau(\xi)/p\}} \mathcal{N}_\lambda$$

contient tous les $\mathcal{N}_\lambda$ pour $\lambda \in \Sigma'$, l'algèbre de Lie qu'il engendre contient $\mathcal{N}$. Comme $\mathcal{H}_0$ contient $\mathcal{A} \cap \ker \tau$, $\mathcal{H}_-$ engendre $\mathcal{H}$. Le corollaire 61 entraîne que $T^{2,p}(G) = 0$. ∎

Remarque. La proposition 63 s'étend évidemment aux degrés ≥ 3, mais l'énoncé devient compliqué.

Exemple. *Soit M l'espace symétrique $SL(3, \mathbf{R})/SO(3)$. Alors $T^{2,p}(M) = 0$ pour $p < 4$.*

En effet, M est isométrique au groupe G des matrices triangulaires supérieures de déterminant 1. On peut prendre pour A les matrices diagonales et pour N les matrices unipotentes. Alors il existe deux formes linéaires indépendantes λ et μ sur $\mathcal{A}$ telles que $\Sigma = \{\lambda, \mu, \lambda + \mu\}$ et

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_\lambda \oplus \mathcal{N}_\mu \oplus \mathcal{N}_{\lambda+\mu}$$

est l'algèbre de Lie de Heisenberg, engendrée par $\mathcal{N}_\lambda \oplus \mathcal{N}_\mu$. La forme linéaire τ vaut $2(\lambda + \mu)$. On pose $\Sigma' = \{\lambda, \mu\}$. Alors l'enveloppe convexe de $\Sigma' \cup \{0\}$ est un triangle qui contient τ/p si et seulement si $p \geq 4$. Si $p \neq 2$, p est non critique. Si de plus $p < 4$, la proposition 63 s'applique et $T^{2,p}(M) = 0$.

Comme $p = 2$ est un exposant critique, nos méthodes ne s'appliquent pas. Néanmoins, il résulte de la formule de Y. Matsushima, [M] que la cohomologie L^2 en degré r d'un espace symétrique de rang r est séparée. On conclut que $T^{2,p}(M) = 0$ aussi pour $p = 2$. ∎

Remarque. Il est probable que pour l'espace symétrique de $Sl(n, \mathbf{R})$, la cohomologie L^p en degré 2 est nulle pour tout $p > 1$.

Proposition 64 *Soit M un espace symétrique de rang 1. Soit $k = 2, \ldots, \frac{\dim M}{2}$. Notons $\mathbf{p}_1^{k-1} < \mathbf{p}_2^{k-2} \cdots$ les exposants critiques en degré $k-1$. Si $p < \mathbf{p}_2^{k-1}$, alors $T^{k,p}(M) = 0$ sauf peut-être pour $p = \mathbf{p}_1^{k-1}$.*

Preuve. Si M est à courbure constante, M est isométrique au produit semi-direct $G = \mathbf{R} \times_\alpha \mathbf{R}^{n-1}$ où α est l'identité. Il y a au plus un exposant critique en degré $k-1$, c'est $\mathbf{p}_1^{k-1} = n - 1/k - 1$. La proposition 57 donne que $T^{k,p}(M) = 0$ pour $p \neq \mathbf{p}_1^{k-1}$.

Tout espace symétrique de rang 1 à courbure non constante est isométrique à un produit semi-direct $G = \mathbf{R} \times_\alpha H$ où α admet les valeurs propres 2 (de multiplicité $\ell = 1$, 3 ou 7) et 1 (de multiplicité m paire). De plus l'espace propre $\mathcal{H}_2$ est central, la différentielle δ est nulle sur $\mathcal{H}_1^*$ et si $e \in \mathcal{H}_2^*$ est non nulle, $\delta(e) \in \Lambda^2\mathcal{H}_1^*$ est non dégénérée. L'algèbre extérieure se décompose en

$$\Lambda^k\mathcal{H}^* = \bigoplus_{i\leq m,\, j\leq \ell,\, i+j=k} \Lambda^{i,j} \quad \text{où} \quad \Lambda^{i,j} = \Lambda^i\mathcal{H}_1^* \otimes \Lambda^j\mathcal{H}_2^*$$

et α vaut $i+2j$ sur $\Lambda^{i,j}$.

Les exposants critiques en degré k sont les nombres de la forme $m+2\ell/k+j$ où j décrit les entiers compris entre $\max\{0, k-m\}$ et $\min\{k,\ell\}$. Pour $k\geq 2$, on vérifie que $\mathbf{p}_2^{k-1} \leq \mathbf{p}_1^{k-2}$. Par conséquent, si $p \leq \mathbf{p}_2^{k-1}$, alors p est non critique en degré $k-2$. Si de plus $p \neq \mathbf{p}_1^{k-1}$, alors p est non critique en degré $k-1$.

Notons $q_m = \min\{k-1,\ell\}$. Pour $k-1-m \leq q \leq q_m$, notons

$$J_q = \bigoplus_{j=q}^{q_m} \Lambda^{k-1-j,j}.$$

Pour chaque exposant p non critique en degré $k-1$, $\Lambda_{+(p)}^{k-1}$ est l'un des sous-espaces J_q. Or $\mathcal{H}^* \otimes J_q = \mathcal{H}_1^* \otimes J_q$ contient $\delta(J_{q-1})$ mais est en somme directe avec $\Lambda^{k+1-q,q-1}$ qui contient $\delta(\Lambda^{k-1-q,q})$. Par conséquent

$$J_q' =: J_q \cap \delta^{-1}(\mathcal{H}^* \otimes J_q) = J_{q+1} \oplus \ker d \cap \Lambda^{k-1-q,q}.$$

Comme $\delta\circ\delta = 0$, $\delta(J_q') \subset \mathcal{H}^* \otimes J_q'$. Par conséquent, l'itération s'arrête à la deuxième étape. Si $p < \mathbf{p}_1^{k-1}$, alors $\Lambda_{+(p)}^{k-1} = 0$, et le corollaire 59 donne immédiatement que $T^{k,p}(M) = 0$.

Supposons p compris entre $\mathbf{p}_1^{k-1}$ et $\mathbf{p}_2^{k-1}$. Alors $\Lambda_{+(p)}^{k-1} = \Lambda^{k-1-q_m,q_m}$. Lorsque $k \leq \ell+1$, $q_m = k-1$ donc $\Lambda_+^{k-1} = \Lambda^{0,k-1}$. Lorsque $k > \ell+1$, $q_m = \ell$ donc $\Lambda_+^{k-1} = \Lambda^{k-1-\ell,\ell}$.

Montrons que dans les deux cas, et si de plus $k \leq \frac{\dim M}{2}$, δ est injectif sur Λ_+^{k-1}.

Soit $v_1, \ldots, v_\ell$ une base du sous-espace V_2 de l'algèbre de Lie $\mathcal{H}$. Alors les 2-formes $\delta v_1, \ldots, \delta v_\ell$ sont linéairement indépendantes dans $\Lambda^2 V_1^*$. Soit k un entier compris entre 2 et $\ell+1$. Si I est un sous-ensemble à $k-1$ éléments de $\{1,\ldots,\ell\}$, notons

$$v_I = \bigwedge_{i\in I} v_i.$$

Alors

$$\delta v_I = \sum_{i\in I} \pm \delta v_i \otimes v_{I\setminus\{i\}}$$

et lorsque I décrit les sous-ensembles à $k-1$ éléments de $\{1,\ldots,\ell\}$ et i décrit les éléments de I, les éléments $\delta v_i \otimes v_{I\setminus\{i\}}$ sont linéairement indépendants dans $\Lambda^2 V_1^* \otimes \Lambda^{k-2} V_2^*$. Par conséquent δ est injective sur $\Lambda_{0,k-1}$.

Supposons maintenant que $k > \ell+1$. Pour $i = 1, \ldots, \ell$, notons L_i le produit extérieur par δv_i. Alors sur $\Lambda^{k-1-\ell,\ell} \sim \Lambda^{k-1-\ell} V_1^*$,

$$\delta = \bigoplus_{1\leq i\leq \ell} L_i$$

donc $\ker\delta = \cap \ker L_i$.

Comme les formes δv_i sont non dégénérées, les applications L_i sont injectives sur $\Lambda^q V_1^*$ dès que $q \leq \frac{m}{2}+1$. Comme $\ell \geq 1$,

$$\frac{m}{2}+1 \leq \frac{m+\ell+1}{2} = \frac{\dim M}{2}.$$

Par conséquent, si $k \leq \frac{\dim M}{2}$, δ est injective sur $\Lambda^{k-1-\ell,\ell}$.

Du corollaire 59, il résulte que si $k \leq \frac{\dim M}{2}$, alors $T^{k,p}(M) = 0$. ∎

Remarque. La borne $\frac{\dim M}{2}$ de la proposition 64 n'est pas optimale. On peut la remplacer par le nombre k_M, plus grand entier k tel qu'aucune $k-1-\ell$-forme sur le sous-espace V_1 ne soit annulée par produit extérieur avec toute forme de δV_2.

Corollaire 65 *Soit M un espace hyperbolique complexe. Si p est non critique en degré $k-1$ (i.e. sauf pour au plus 2 valeurs de p), alors $T^{k,p}(M)=0$.*

Preuve.
Soit $n=\dim M$. Si $2\leq k\leq n-1$, il y a deux exposants critiques en degré $k-1$, $\mathbf{p}_1^{k-1}=n/k$ et $\mathbf{p}_2^{k-1}=n/k-1$. Si $k\leq n/2$, la proposition 64 donne que $T^{k,p}(M)=0$ pour $p<\mathbf{p}_1^{k-1}$ et pour $p\in]\mathbf{p}_1^{k-1},\mathbf{p}_2^{k-1}[$. Comme $\mathbf{p}_2^{k-1}$ est plus grand que les exposants critiques en degré k, la proposition 52 donne que $H^{k,p}(M)=0$ pour $p>\mathbf{p}_2^{k-1}$. Par conséquent, $T^{k,p}(M)=0$ pour p non critique. La dualité de Poincaré (proposition 81) permet d'étendre la conclusion aux valeurs de k supérieures à $n/2$. ∎

Remarque. Il y a de la torsion à au moins l'un des deux exposants critiques. On verra en 98 que si $2\leq k\leq n/2$, $T^{k,p}(M)\neq 0$ pour $p=\mathbf{p}_2^{k-1}$. Par dualité de Poincaré, si $k\geq \frac{n}{2}+1$, $T^{k,p}(M)\neq 0$ pour $p=\mathbf{p}_1^{k-1}$. Vraisemblablement, la torsion est nulle à l'autre exposant critique. Voir en 15.4 pour le cas où $n=4$.

11 Cohomologie L^p en degré 1

11.1 Torsion et inégalité isopérimétrique

Proposition 66 *Soit M une variété riemannienne de dimension n. Soit $p\geq 1$ et $k=1,\cdots,n$. La torsion $T^{k,p}(M)$ est nulle si et seulement si l'inégalité de Sobolev suivante est vraie. Pour toute $k-1$-forme $\omega\in\Omega^{k,p}(M)$, il existe une $k-1$-forme $\phi\in\Omega^{k-1,p}(M)$ telle que*

$$d\omega=d\phi\quad et\quad \|\,\phi\,\|_{L^p}\leq const.\|\,d\phi\,\|_{L^p}.$$

Preuve. Supposons l'inégalité de Sobolev vraie en degré $k-1$. Elle s'étend par densité aux formes de $\Omega^{k-1,p}(M)$. Soit ω_j une suite de $k-1$-formes L^p sur M telle que $d\omega_j$ converge vers α dans L^p. D'après l'inégalité de Sobolev, il existe une suite ϕ_j, bornée dans L^p, telle que $d\phi_j=d\omega_j$. Extrayons une sous-suite qui converge faiblement vers ϕ_∞. Alors $\phi_\infty\in L^p$ et $d\phi_\infty=\alpha$. En particulier $\phi_\infty\in\Omega^{k-1,p}(M)$. On conclut que $d\Omega^{k-1,p}(M)$ est fermé dans $\Omega^{k,p}(M)$, donc que $T^{k,p}(M)=0$.

Inversement, supposons que $T^{k,p}(M)=0$, i.e. que $d\Omega^{k-1,p}(M)$ est fermé dans $\Omega^{k,p}(M)$. L'opérateur d induit $\overline{d}:\Omega^{k-1,p}(M)/\ker d\to d\Omega^{k-1,p}(M)$. C'est une bijection continue entre espaces de Banach, donc un isomorphisme. Notons $\overline{d}^{-1}$ son inverse. Etant donnée une $k-1$-forme $\omega\in\Omega^{k-1,p}(M)$, soit $\phi\in\Omega^{k-1,p}(M)$ un représentant de la classe $\overline{d}^{-1}d\omega\in\Omega^{k-1,p}(M)/\ker d$ de norme presque minimum. Elle satisfait

$$d\omega=d\phi\quad \text{et}\quad \|\,\phi\,\|_{L^p}\leq \text{const.}\|\,d\phi\,\|_{L^p}.$$

Remarque. Pour retrouver l'inégalité de Sobolev classique, on doit ne considérer que les 1-formes *exactes*

Définition 67 *Soit M une variété riemannienne. On appelle* cohomologie L^p exacte*, et on note $EH^{*,p}(M)$ le noyau de l'application tautologique $H^{k,p}(M)\to H^k(M,\mathbf{R})$.*

Remarque 68 *Sur une variété riemannienne complète de volume infini, la nullité de $ET^{1,p}$ équivaut à l'inégalité de Sobolev sous sa forme plus classique : pour toute fonction u lisse et à support compact sur M,*

$$\|\,u\,\|_{L^p}\leq const.\|\,du\,\|_{L^p}.$$

En effet, on ne s'intéresse qu'aux 1-formes exactes $\omega=du$. Si $\omega=d\phi$, alors $u-\phi$ est constante et L^p, donc nulle. D'autre part, comme M est complète, les fonctions lisses et à support compact sur M sont dense dans $L^p(M)$.

Définition 69 *Une variété riemannienne M est dite* ouverte à l'infini *si elle satisfait une inégalité isopérimétrique linéaire, i.e. si pour toute sous-variété compacte Δ de codimension 0, à bord lisse,*

$$\mathrm{Vol}\,\Delta \leq const.\mathrm{Vol}\,\partial\Delta.$$

Si M n'est pas ouverte à l'infini, elle est fermée à l'infini.

Proposition 70 *Soit M une variété riemannienne à géométrie bornée. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *M est ouverte à l'infini ;*
2. *pour tout $p \geq 1$, $ET^{1,p}(M) = 0$;*
3. *il existe $p \geq 1$ tel que $ET^{1,p}(M) = 0$.*

Preuve. Lorsque $p = 2$, ces équivalences sont essentiellement dues à R. Brooks, [Br].

Il est classique (voir [Ma]) que l'inégalité isopérimétrique $\mathrm{Vol}\,\Delta \leq \mathrm{const.Vol}\,\partial\Delta$ est équivalente à l'inégalité de Sobolev L^1 (avec la même constante) : pour toute fonction u lisse à support compact sur M, $\| \phi \|_{L^1} \leq \mathrm{const.}\| du \|_{L^1}$.

L'inégalité de Sobolev L^1, appliquée à la fonction u^p, combinée à l'inégalité de Hölder, entraîne l'inégalité de Sobolev L^p pour $p \geq 1$. Ceci prouve que (1) $\Rightarrow$ (2).

Il reste à montrer que, sous l'hypothèse de géométrie bornée, l'inégalité de Sobolev L^p pour un $p > 1$ entraîne l'inégalité de Sobolev L^1. Par invariance par quasiisométrie, on peut remplacer M par un graphe X de valence bornée par V et dont les arêtes ont toutes même longueur. Les fonctions sur M deviennent des fonctions sur l'ensemble X^0 des sommets de X et la norme L^p de la différentielle devient $(\sum |u(a) - u(b)|^p)^{1/p}$ où la somme est étendue aux couples de sommets reliés par une arête.

Supposons d'abord que u ne prend que les valeurs 0 et 1. Alors $\| u \|_{L^p} = \| u \|_{L^1}^{1/p}$ et $\| du \|_{L^1} = \| du \|_{L^1}^{1/p}$ donc l'inégalité de Sobolev L^p entraîne l'inégalité de Sobolev L^1 dans ce cas.

Enfin, on écrit une fonction quelconque comme intégrale de fonctions à valeurs dans $\{0, 1\}$. Soit u une fonction sur X^0. Quitte à remplacer u par sa valeur absolue (ce qui ne change pas la norme L^1 et diminue la norme L^1 de la différentielle), on peut supposer que u est positive ou nulle. On écrit alors $u = \displaystyle\int_0^{+\infty} u_t\,dt$ où $u_t(x) = 1$ si $u(x) \geq t$ et $u_t(x) = 0$ sinon. Alors

$$\| u \|_{L^1} = \int_0^{+\infty} \| u_t \|_{L^1}\,dt$$

et

$$\| du \|_{L^1} = \int_0^{+\infty} \| du_t \|_{L^1}\,dt,$$

donc l'inégalité de Sobolev L^p entraîne l'inégalité de Sobolev L^1 en général. ∎

Proposition 71 (H. Hoke, [Ho]). *Soit G un groupe de Lie muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche. Alors G est fermé à l'infini si et seulement si G est moyennable (i.e. extension d'un groupe resoluble par un groupe compact) et unimodulaire.*

Corollaire 72 *Soit G un groupe de Lie. Si G est moyennable unimodulaire, alors pour tout $p > 1$, $R^{1,p}(G) = 0$ et $T^{1,p}(G) \neq 0$. Inversement, s'il existe $p > 1$ tel que $T^{1,p}(G) \neq 0$, alors G est moyennable unimodulaire.*

11.2 Quasiisométries entre espaces homogènes

Une application $f : X \to X'$ entre espaces métriques est une *quasiisométrie* s'il existe des constantes L et D telles que tout point de X' est à distance au plus D de l'image de f, et pour tous x, $y \in X$, $-D + \frac{1}{L} d^X(x,y) \leq d^{X'}(f(x), f(y)) \leq L\, d^X(x,y) + D$.

Lemme 73 *Soit G un groupe de Lie connexe, soit $H \subset G$ un sous-groupe fermé et connexe.*

- *Si H est compact, alors $M = G/H$ admet des métriques riemanniennes G-invariantes, et G est quasiisométrique à M.*
- *Si l'espace homogène G/H est compact, alors G est quasiisométrique à H.*

Preuve. Supposons H compact. Choisissons un supplémentaire ad_H-invariant U de l'algèbre de Lie $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}$ et une structure euclidienne ad_H-invariante g_U sur U. Cela détermine une métrique riemannienne G-invariante sur M. Soit $g_{\mathcal{H}}$ une structure euclidienne sur $\mathcal{H}$. La métrique euclidienne $g_{\mathcal{K}} \oplus g_U$ sur $\mathcal{G}$ détermine une métrique riemannienne invariante à gauche sur G, invariante par l'action à droite de H. Pour cette métrique, l'application $f : G \mapsto G/H$ est une submersion riemannienne, i.e. isométrique orthogonalement aux fibres. Par conséquent, f diminue les distances. Inversement, étant donné un point $g \in G$, toute courbe dans $M = G/K$ d'origine $f(g)$ a un unique relèvement en une courbe d'origine g dans G partout orthogonale aux fibres, et le relèvement prélève la longueur. Par conséquent, la distance entre deux fibres $f^{-1}(x)$ et $f^{-1}(x')$ est égale à $d^M(x,x')$. Enfin, par invariance à gauche, toutes les fibres sont isométriques de même diamètre D. Par conséquent, pour tous g, $g' \in G$, $d^M(f(g), f(g')) \geq d^G(g,g') - D$. Ceci montre que f est une quasiisométrie, et M est quasiisométrique à G.

Supposons G/H compact. Montrons par l'absurde qu'il existe une constante D telle que $d^G(g,H) \leq D$ pour tout $g \in G$. Sinon, il existe une suite g_j telle que $d^G(g_j,H)$ tend vers $+\infty$. L'espace des classes à gauche $H \setminus G$ est lui aussi compact. Il existe donc une suite $h_j \in H$ telle que la suite $h_j^{-1} g_j$ converge dans G. Les distances $d^G(h_j, g_j) = d^G(h_j^{-1} g_j, 1)$ sont bornées, et $d^G(g_j, H) = d^G(h_j, g_j)$ l'est aussi, contradiction.

Soient h, $h' \in H$. Alors $\delta = d^G(h,h') \leq d^H(h,h')$. Il reste à montrer l'inégalité inverse. Soit $\gamma : [0,\delta] \to G$ une géodésique minimisante de h à h'. Pour $i = 0, \ldots, N = [\delta/D]$, posons $g_i = \gamma(iD)$, de sorte que $d^G(g_i, g_{i+1}) \leq D$ et $ND \leq \delta \leq (N+1)D$. Choisissons $h_i \in H$ tel que $d^G(h_i, g_i) \leq D$. Comme H est fermé dans G, l'intersection de H et de la boule de rayon $3D$ de G est compacte, donc contenue dans une boule de rayon D' pour la métrique de H. Pour tout i, $d^G(h_i^{-1} h_{i+1}, 1) \leq 3D$, donc $d^H(h_i^{-1} h_{i+1}, 1) \leq D'$. Par conséquent,

$$d^H(h,h') \leq \sum d^H(h_i^{-1} h_{i+1}, 1) \leq (N+1)D' \leq \frac{D'}{D} d^G(h,h') + D. \blacksquare$$

Lemme 74 *Soit G un groupe de Lie connexe. Alors G est quasiisométrique à un groupe de Lie G' connexe dont le centre est connexe.*

Preuve.

Soit $Z(G) = \Gamma \times A$ le centre de G, où Γ est discret et A connexe. Quitte à prendre un quotient fini, on peut supposer que Γ est isomorphe à $\mathbf{Z}^k$. Soit $C' = \mathbf{R}^k$ et $G' = (G \times C)/\Gamma$ où Γ agit diagonalement par translation. Alors G' est un C-fibré principal de base G/Γ, donc G' est connexe.

L'homomorphisme $inc : G \to G'$, $g \mapsto (g,1) \bmod \Gamma$ est injectif. Montrons que c'est une quasiisométrie. Le modèle est $G = \mathbf{R}$, $\Gamma = \mathbf{Z}$. Alors $G' = (\mathbf{R} \times \mathbf{R})/\Gamma$ est un cylindre, quasiisométrique à $\mathbf{R}$. Dans le produit direct $G \times C$,

$$d^{G \times C}((g,x),1) \sim d^G(g,1) + d^C(x,1)$$

donc dans G',

$$\begin{array}{rcl} d^{G'}((g,1),1) & \sim & inf_{\gamma\in\Gamma} d^G(\gamma g,1)+d^C(\gamma,1) \\ & \geq & inf_{\gamma\in\Gamma} d^G(\gamma g,1)+d^G(\gamma,1) \\ & \geq & inf_{\gamma\in\Gamma} d^G(\gamma g,\gamma) \\ & = & d^G(g,1) \end{array}$$

car $d^G(\gamma,1)\leq \mathrm{const}.d^C(\gamma,1)$. On conclut que $inc: G\to G'$ est une quasiisométrie.

Enfin, on vérifie immédiatement que le centre $Z(G')=(Z(G)\times C)/\Gamma = A\times C$ est connexe. ∎

Lemme 75 *Tout espace homogène riemannien est quasiisométrique à un groupe de Lie résoluble connexe dont tout sous-groupe distingué nilpotent connexe est simplement connexe.*

Preuve. Soit $M=G/H$ un espace homogène riemannien. Alors H est compact et le lemme 73 donne que M est quasiisométrique à G.

Soit $G=RS$ la décomposition de Levi du groupe G, où R est le radical de G et S est semi-simple ([B] chap. 3 page 244). Il existe un sous-groupe abélien libre Γ d'indice fini dans le centre de S qui agit trivialement sur R. Il est donc contenu dans le centre de G. Comme au lemme 74, choisissons un espace vectoriel C tel que $\Gamma\subset C$ soit cocompact et posons $G'=(G\times C)/\Gamma$. D'apès le lemme 74, G est quasiisométrique à G'. La projection sur le premier facteur passe au quotient en $\pi: G'\to\overline{G} =: G/\Gamma$. Le noyau de π est isomorphe à C donc connexe. Soit $\overline{S}=S/\Gamma$ et $\overline{R}=R/\Gamma\cap R$. Ces sous-groupes de $\overline{G}$ engendrent $\overline{G}$. Soit $\overline{S}=NAK$ la décomposition d'Iwasawa de $\overline{S}$. Comme le centre de $\overline{S}$ est fini, le groupe K est compact. Alors $G''=\pi^{-1}(RNA)$ est résoluble et connexe, $G'/G''=\overline{G}/\overline{R}NA=\overline{S}/NA$ est compact, donc G et G' sont quasiisométriques à G''.

Il reste à se ramener d'un groupe de Lie résoluble connexe G à un groupe de Lie résoluble connexe $\overline{G}$ dont tout sous-groupe distingué nilpotent connexe est simplement connexe. Soit N un sous-groupe distingué nilpotent connexe de G. Soit $\tilde{N}$ son revêtement universel et Γ le noyau de l'homomorphisme $\tilde{N}\to N$. Alors Γ est discret et central dans $\tilde{N}$. Le centre Z de $\tilde{N}$ est connexe, donc l'exponentielle est un isomorphisme de groupe de son algèbre de Lie $\mathcal{Z}$ sur Z. Soit $\mathcal{C}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{Z}$ engendré par $\exp^{-1}(\Gamma)$, et $C=\exp(\mathbf{C})$. Alors $T=C/\Gamma$ est un sous-groupe compact de N. Soit Φ un automorphisme du groupe N. Alors Φ se relève en un automorphisme $\tilde{\Phi}$ de $\tilde{N}$ qui préserve Γ et commute à l'exponentielle. Par conséquent $\tilde{\Phi}$ préserve $\mathbf{C}$ et C, donc Φ préserve T. Ceci montre que T est distingué dans G et qu'on peut former le groupe quotient $\overline{G}=G/T$. Comme T est compact, G et $\overline{G}$ sont quasiisométriques. Si $\overline{G}$ contient à son tour un sous-groupe distingué nilpotent connexe non simplement connexe, on peut recommencer l'opération. A chaque fois, la dimension du groupe diminue strictement, donc au bout d'un nombre fini d'étapes, on obtient un groupe de Lie résoluble connexe dont tout sous-groupe distingué nilpotent connexe est simplement connexe. ∎

11.3 Invariance sous quasiisométrie

On rappelle que $EH^{*,p}(M)$ désigne la cohomologie L^p exacte, voir en 67.

Théorème 2 . (voir [P3]). *Soient M et M' deux variétés riemanniennes connexes possédant des groupes cocompacts d'isométries. On suppose que pour tout $j=1,\ldots,k-1$, $H^j(M,\mathbf{R})=H^j(M',\mathbf{R})=0$. Alors $EH^{k,p}(M)=EH^{k,p}(M')$.*

La distinction entre cohomologie L^p et cohomologie L^p exacte n'a pas lieu d'être pour les espaces homogènes.

Proposition 76 *Soit M un espace homogène riemannien connexe et non compact. Alors toute forme fermée L^p sur M est exacte.*

Preuve. Soit M un espace homogène riemannien connexe et non compact. La composante neutre G du groupe d'isométries de M est transitive sur M. Soit ω une forme L^p fermée non exacte sur M. Alors il existe une boule B de M telle que la restriction de ω à B ne soit pas exacte. Lorsque g varie dans G, les formes $g^*\omega$ sont deux à deux cohomologues. Par conséquent la classe de cohomologie $c \in H^k(B, \mathbf{R})$ de la restriction de $g^*\omega$ à B est indépendante de $g \in G$. Comme l'image $d\Omega^{k-1,p}(B)$ est fermée dans $\Omega^{k,p}(B)$ il existe une constante $\epsilon > 0$ telle que tout forme fermée représentant la classe c soit de norme L^p supérieure à ϵ. Par conséquent $\| \omega \|_{L^p(gB)} = \| g^*\omega \|_{L^p(B)} \geq \epsilon$. C'est incompatible avec l'hypothèse $\omega \in L^p(M)$. ∎

Par conséquent, $H^{1,p}$ est un invariant de quasiisométrie pour les espaces homogènes connexes non compacts, et $H^{2,p}$ est un invariant de quasiisométrie pour les espaces homogènes simplement connexes non compacts.

11.4 Cohomologie L^p en degré 1 des groupes de Lie résolubles

Proposition 77 *Soit G un groupe de Lie résoluble non unimodulaire, dont tout sous-groupe distingué nilpotent connexe est simplement connexe. On suppose que G n'admet pas de métrique invariante à gauche à courbure sectionnelle strictement négative. Alors pour tout $p > 1$, $H^{1,p}(G) = 0$.*

Preuve. D'après [B], chap. 7, pages 19-20, il existe des sous-groupes nilpotents connexes A et $N \subset G$ tels que $G = AN$, N est distingué et $[A, A] \subset N$. Notons $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}$ leurs algèbres de Lie. Si $\xi \in \mathcal{N}$, ad_{xi} est nilpotente sur $\mathcal{N}$ et son image est contenue dans $\mathcal{N}$. Par conséquent, la forme linéaire $\tau : \xi \mapsto \mathrm{tr}\, ad_\xi$ sur $\mathcal{G}$ est nulle sur $\mathcal{N}$.

Comme G n'est pas unimodulaire, τ n'est pas identiquement nulle sur $\mathcal{G}$, donc elle est non nulle sur $\mathcal{A}$. Choisissons $\xi_0 \in \mathcal{A}$ tel que $\tau(\xi_0) > 0$. Fixons $p > 1$. Alors le champ de vecteurs invariant à gauche ξ_0 est $(0,p)$-Anosov, donc, d'après le théorème 1, l'espace $H^{1,p}(G)$ s'identifie au sous-espace $\mathcal{B}^{1,p}(G, \xi_0)$ de $L^p + dL^p(G)$ formé des différentielles de fonctions invariantes par le groupe à un paramètre de translations à droite engendré par ξ_0.

L'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ se décompose en sous-espaces caractéristiques pour l'action de l'agèbre de Lie nilpotente $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{G} \otimes \mathbf{C} = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma} \mathcal{G}_\lambda$$

où les λ sont des formes linéaires à valeurs complexes sur $\mathcal{A}$ telles que pour $\xi \in \mathcal{A}$, $ad_\xi - \lambda(\xi)I$ restreinte à $\mathcal{G}_\lambda \otimes \mathbf{C}$ soit nilpotente (voir [B], chap. 1, exercice 12 page 127). Par construction, la forme linéaire nulle est dans Σ et $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}_0$.

Soit u une fonction de $L^p_{loc}(G)$ telle que $du \in \mathcal{B}^{1,p}_{\xi_0}(G)$. Montrons que si $\dim \mathcal{A}/[\mathcal{A}, \mathcal{A}] \geq 2$, alors u est constante.

Soit $\lambda \in \Sigma$ telle que $\Re e(\lambda(\xi_0)) \leq 0$. D'après le corollaire 34, pour tout champ de vecteurs invariant à gauche $\eta \in \mathcal{G}_\lambda$, $du(\eta)$ s'annule au sens des distributions. Par conséquent, u est invariante à droite par le sous-groupe engendré par η. Cela s'applique notamment à $\lambda = 0$, donc u est invariante à droite par A. En fait, $du \in \mathcal{B}^{1,p}(G, \xi)$ pour tout $\xi \in \mathcal{A}$.

Supposons maintenant que $\lambda \in \Sigma$ n'est pas proportionnel à τ. Alors il existe $\xi_1 \in \mathcal{A}$ tel que $\tau(\xi_1) > 0$ mais $\lambda(\xi_1) \leq 0$. Comme u est invariante par le groupe à un paramètre de translations à droite engendré par ξ_1 et $du \in L^p_{-1}(G)$, le corollaire 34 s'applique, et du s'annule sur $\mathcal{G}_\lambda$.

Notons Σ_0 le sous-ensemble de Σ formé des racines proportionnelles à τ, et notons Σ_1 son complémentaire. Notons $\mathcal{H}_i = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma_i} \mathcal{N} \cap \mathcal{G}_\lambda$. Comme $[\mathcal{G}_\lambda, \mathcal{G}_{\lambda'}] \subset \mathcal{G}_{\lambda+\lambda'}$, $\mathcal{H}_0$ est une sous-algèbre de Lie, $[\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1] \subset \mathcal{H}_1$. Comme $\mathcal{H}_1$ n'est pas une algèbre de Lie, on note $\mathcal{H}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathcal{N}$ engendrée par $\mathcal{H}_1$. Alors $\mathcal{H}$ est un idéal de $\mathcal{N}$.

Comme $\dim \mathcal{A}/[\mathcal{A}, \mathcal{A}] \geq 2$, on peut choisir un vecteur non nul $\xi \in \ker \tau$ qui n'est pas dans $\mathcal{N}$. Comme ad_ξ est nilpotente sur $\mathcal{H}_0$, le sous-espace $\mathcal{L} = \mathbf{R}\xi \oplus \mathcal{H}_0$ de $\mathcal{G}$ est une sous-algèbre de Lie nilpotente. Son centre $\mathcal{Z}$ est donc non trivial. Montrons que $\mathcal{Z} \cap \mathcal{N} \neq 0$. Sinon, $\mathcal{L}$ serait une algèbre isomorphe à $\mathcal{H}_0 \oplus \mathbf{R}$ dont le centre est de dimension au moins 2, donc coupe l'hyperplan

$\mathcal{H}_0$, contradiction. On peut donc choisir un vecteur non nul $\zeta \in \mathcal{N}$ qui commute avec ξ et avec $\mathcal{H}_0$.

Comme ζ commute à ξ et du est ξ-invariante et annulée par ξ, la proposition 33 s'applique et $du(\zeta) = 0$. Notons $\overline{u}$ la restriction à N de la fonction u. Elle est dans $L^p_{-1,loc}$. Montrons que $d\overline{u}$ s'annule sur le champ de vecteurs invariant *à droite* $\zeta' = j_*\zeta$ où $j(n) = n^{-1}$. En un point $n = \exp(\eta)$ de N, $\zeta'(n)$ coïncide avec le champ invariant à gauche $-\exp(ad_\eta)(\zeta)$. Or si $\eta = \eta_0 + \eta_1$ où $\eta_0 \in \mathcal{H}_0$ et $\eta_1 \in \mathcal{H}_1$, alors $ad_{\eta_0}(\zeta) = 0$ et $ad_{\eta_1}(\zeta) = -ad_\zeta(\eta_1) \in \mathcal{H}$ donc $ad_\eta(\zeta) \in \mathcal{H}$ et comme $\mathcal{H}$ est un idéal, $ad^k_\eta(\zeta) \in \mathcal{H}$ pour tout $k \geq 1$. Par conséquent, $\exp(ad_\eta)(\zeta) - \zeta \in \mathcal{H}$, et donc $d\overline{u}$ s'annule sur ζ'.

On conclut que $\overline{u}$ est invariante par un groupe à un paramètre Z de translations *à gauche*. Or d'après la proposition 30, la norme $L^p + dL^p$ de du s'écrit

$$\begin{aligned} \| \, du \, \|^p_{L^p+dL^p(G)} &= \int_{N\times N} |\overline{u}(n) - \overline{u}(n')|^p \kappa(n^{-1}n')\, dn\, dn' \\ &= \int_N I(n)^p \, dn \end{aligned}$$

où la fonction I sur N est la norme de la fonction $\overline{u}$ translatée à gauche, $I(n) = J(\overline{u} \circ L_n)$ où la norme J est donnée par

$$J(v) = (\int_N |v(\nu) - v(1)|^p \kappa(\nu)\, d\nu)^{1/p}.$$

pour une certaine fonction positive κ sur N. Comme N est nilpotent simplement connexe, le sous-groupe à un paramètre engendré par ζ est injectif et fermé (voir [B], chap. 3 page 236). La fonction I qui est Z-invariante et L^p est presque partout nulle. On conclut que pour presque tout $n \in N$, $J(\overline{u} \circ L_n) = 0$, donc $\overline{u}$ est constante, et u est constante.

On a donc montré que $H^{1,p}(G) = 0$ dès que $\dim \mathcal{A}/[\mathcal{A}, \mathcal{A}] \geq 2$.

Désormais, on suppose que $\dim \mathcal{A} = 1$. Les formes linéaires $\lambda \in \Sigma$ ne sont rien de plus que les nombres $\lambda(\xi_0)$. On suppose que $\tau = \tau(\xi_0) > 0$. Soit u une fonction sur G, telle que $du \in \mathcal{B}^{1,p}(M, \xi)$. Montrons que si les parties réelles des nombres $\lambda \in \Sigma$ ne sont pas toutes strictement positives, alors u est constante. Il suffit de montrer que sa restriction $\overline{u}$ à N est constante. D'après le corollaire 34, du s'annule sur tous les espaces $\mathcal{G}_\lambda$ avec $\Re e\lambda \leq 0$. Soit $\mathcal{H}$ la somme des espaces $\mathcal{G}_\lambda$ avec $\Re e\lambda > 0$. C'est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{N}$, donc son centre est non trivial. Comme précedemment, on montre que $d\overline{u}$ s'annule sur le champ de vecteurs invariant à droite $\zeta' = j_*(\zeta)$. Alors $\overline{u}$ est invariante par le groupe de translations à gauche $\exp(t\zeta')$, et on en déduit que $\overline{u}$ est constante.

On a donc montré que $H^{1,p}(G) = 0$ aussi lorsque $\dim \mathcal{A} = 1$ et les parties réelles des valeurs propres de $ad_{\mathcal{A}}$ ne sont pas toutes de même signe. Il reste le cas où G est le produit semi-direct d'un groupe de Lie nilpotent N par $\mathbf{R}$ agissant par une dérivation dont les valeurs propres ont une partie réelle strictement positive. Un tel groupe admet une métrique riemannienne invariante à courbure sectionnelle strictement négative, [He]. ■

Proposition 78 *Soit N un groupe de Lie nilpotent de dimension $n-1$, α une dérivation de $\mathcal{N}$ dont les valeurs propres ont des parties réelles $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1}$ strictement positives. Soit $G = \mathbf{R} \times_\alpha N$. Posons*

$$\mathbf{p}(G) = \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1}}{\lambda_1}.$$

Alors $H^{1,p}(G) = 0$ si $p \leq \mathbf{p}(G)$ et $R^{1,p}(G) \neq 0$ si $p > \mathbf{p}(G)$.

Preuve. Le résultat apparaît dans [P1] dans le cas particulier où α est semi-simple.

Le champ de vecteurs invariant à gauche $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ satisfait $\mathrm{tr}\,(ad_\xi) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1} > 0$. Le théorème 1 s'applique et $H^{1,p}(G) = \mathcal{B}^{1,p}(G, \xi)$ est séparé.

Soit u une fonction sur G telle que $du \in \mathcal{B}^{1,p}(G, \xi)$. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ une valeur propre de α de partie réelle λ_1 et $\eta \in \mathcal{N}$ un vecteur propre correspondant. Si $p \leq \mathbf{p}(M)$, le corollaire 34 donne que $du(\eta) = 0$. On en déduit que $du \in \mathcal{B}^{1,p}(G, \eta)$, puis que $d\overline{u} \in \mathcal{B}^{1,p}(N, \eta)$. Soit ζ un vecteur non nul du centre de $\mathcal{N}$. Alors ζ est un vecteur propre de ad_η pour la valeur propre 0. Comme Λ_0^0 est de dimension 1, ad_η est semi simple sur Λ_0^0, et la proposition 33 s'applique. On trouve que $du(\zeta) = 0$. Comme ζ est central, cela entraîne que $\overline{u}$ est invariante par le groupe à 1 paramètre de translations à gauche engendré par ζ. Comme dans la preuve de la proposition 77, on conclut que $\overline{u}$ est constante, autrement dit, $H^{1,p}(G) = 0$.

Inversement, si $p > \mathbf{p}(G)$, pour toute fonction lisse $\overline{u}$ à support compact sur N, $\pi^* d\overline{u}$ est dans $\mathcal{B}^{1,p}(G,\xi)$. En effet, soit χ une fonction lisse sur $\mathbf{R}$ qui vaut 0 au voisinage de $-\infty$ et 1 au voisinage de $+\infty$. Le flot ϕ_t de ξ donne un difféomorphisme

$$\mathbf{R} \times N \to G, \quad (t,n) \mapsto \phi_t(0,n).$$

Posons $u(t,n) = \chi(t)\overline{u}(n)$. Comme $p > \mathbf{p}(G)$, $\Lambda_0^1 = \Lambda_+^1 = 0$ donc $du \in L^p$, $idu = \chi'(t)\pi^*\overline{u}$, $Bdu = (1-\chi(t))\pi^*\overline{u}$, $dBdu = \chi'(t)\pi^*\overline{u}\,dt + (1-\chi(t))\pi^* d\overline{u}$ et $Pdu = \pi^* d\overline{u} \in \mathcal{B}^{1,p}(G,\xi)$. En particulier, $R^{1,p}(G) \neq 0$. ∎

11.5 Preuve du théorème A

Soit M un espace homogène riemannien connexe non compact. Soit G son groupe d'isométries. Comme M et G sont quasiisométriques, $T^{1,p}(M) = T^{1,p}(G)$. D'après le corollaire 72, s'il existe $p > 1$ tel que $T^{1,p}(M) \neq 0$, alors G est une extension compacte d'un groupe de Lie résoluble unimodulaire. Inversement, si G est une extension compacte d'un groupe de Lie résoluble unimodulaire, alors pour tout $p > 1$, $T^{1,p}(M) \not 0$. L'annulation de $R^{1,p}(M)$ résulte du théorème 3.

Désormais, nous pouvons supposer que $T^{1,p}(M) = 0$. D'après le lemme 75, M est quasiisométrique à un groupe de Lie résoluble G qui satisfait aux hypothèses de la proposition 77. De nouveau, $T^{1,p}(G) = T^{1,p}(M) = 0$ donc G n'est pas unimodulaire. S'il existe $p > 1$ tel que $H^{1,p}(M) \neq 0$, alors $R^{1,p}(G) \neq 0$. D'après la proposition 77, G admet une métrique invariante à courbure sectionnelle négative, et le détail est donné par la proposition 78. ∎

Corollaire 79 *Soit M un espace homogène riemannien simplement connexe. Soit $p > 1$. Si $R^{1,p}(M) \neq 0$, alors $H^{2,p}(M) = 0$.*

Preuve. D'après le théorème A et la proposition 78, si $R^{1,p}(M) \neq 0$, alors M est quasiisométrique à un produit semi-direct $G = \mathbf{R} \times_\alpha N$ où les parties réelles $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1}$ des valeurs propres de α sont strictement positives et satisfont $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1} - p\lambda_1 > 0$. Dans ce cas, le corollaire 53 donne que $H^{2,p}(G) = 0$. Comme M et G sont simplement connexes, par invariance sous quasiisométrie (théorème 2), $H^{2,p}(M) = 0$. ∎

Remarque. L'hypothèse que M simplement connexe est nécessaire. En effet, le groupe $M = SL(2,\mathbf{R})$, quasiisométrique au plan hyperbolique, satisfait $R^{1,p}(M) \neq 0$ pour tout $p > 1$. En revanche, par dualité de Poincaré (proposition 81), $R^{2,p}(M) \neq 0$ pour tout $p > 1$.

11.6 Preuve du corollaire 1

Soit M un espace homogène riemannien connexe non compact. L'espace des 1-formes harmoniques L^2 sur M est isomorphe à $R^{1,2}(M)$. D'après le théorème A, si $R^{1,2}(M) \neq 0$, M est quasiisométrique à un espace homogène M' à courbure sectionnelle strictement négative, et tel que $\mathbf{p}(M') < 2$. L'expression donnée par la proposition 78 montre que cela n'est possible que si $\dim M' = 2$. ∎

12 Dualité de Poincaré

Le lemme suivant est essentiellement dû à V. Goldshtein et M. Troyanov, [GT].

Lemme 80 *Soit M une variété riemannienne orientée complète de dimension n. Etant donné $p > 1$, on note p' l'exposant conjugué, i.e. tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Soit ω une k-forme différentielle fermée et L^p sur M. Alors*

- *ω est non nulle en cohomologie L^p réduite si et seulement si il existe une $n-k$-forme fermée $\psi \in L^{p'}$ telle que $\int_M \omega\wedge\psi \neq 0$.*
- *ω est non nulle en cohomologie L^p si et seulement si il existe une suite ψ_j de $n-k$-formes différentielles $L^{p'}$ telles que $\int_M \omega\wedge\psi_j \geq 1$ et $\| d\psi_j \|_{L^{p'}}$ tend vers 0.*

Preuve.
Comme M est complète, pour toute $n-1$-forme L^1 dont la différentielle est L^1, on a

$$\int_M d\omega = 0.$$

Par conséquent, si $\omega \in \Omega^{k,p}(M)$ et $\psi \in \Omega^{n-1-k,p'}(M)$,

$$\int_M \omega\wedge d\psi = (-1)^{k+1}\int_M d\omega\wedge\psi.$$

Si $\omega \in \Omega^{k,p}(M)$ est nulle en cohomologie L^p réduite, alors il existe une suite $\beta_j \in \Omega^{k-1,p}(M)$ telle que $d\beta_j$ converge vers ω dans L^p. Si $\psi \in \Omega^{n-1-k,p'}(M)$, il vient

$$\int_M \omega\wedge\psi = \lim_j \int_M d\beta_j\wedge\psi = \lim_j \int_M \beta_j\wedge d\psi.$$

Par conséquent, pour toute forme fermée $\psi \in \Omega^{n-k,p'}(M)$, $\int_M \omega\wedge\psi = 0$.

Inversement, si $\omega \in \Omega^{k,p}(M)$ n'est pas nulle en cohomologie réduite, alors, d'après Hahn-Banach, il existe une forme linéaire continue L sur $L^p\Omega^k(M)$ qui s'annule sur l'adhérence de l'image $d\Omega^{k-1,p}(M)$ mais pas sur ω. Par dualité de L^p et $L^{p'}$, il existe une forme $\psi \in L^{p'}\Omega^{n-k}(M)$ telle que pour tout $\gamma \in L^p\Omega^k(M)$, $L(\gamma) = \int_M \gamma\wedge\psi$. Si β est lisse et à support compact, on a $0 = L(d\beta) = \int_M d\beta\wedge\psi$, i.e. $d\psi = 0$ au sens des distributions. On conclut que $\psi \in \Omega^{n-1-k,p'}(M)$ est fermée et satisfait $\int_M \omega\wedge\psi \neq 0$.

Si $\omega \in \Omega^{k,p}(M)$ est nulle en cohomologie L^p, i.e. $\omega = d\beta$ où $\beta \in \Omega^{k-1,p}(M)$, alors pour tout $\psi \in \Omega^{n-1-k,p'}(M)$,

$$\int_M \omega\wedge\psi = \int_M \beta\wedge d\psi \leq \| \beta \|_{L^p} \| d\psi \|_{L^{p'}}$$

donc si $\| d\psi_j \|_{L^{p'}}$ tend vers 0, il en est de même de $\displaystyle\int_M \omega\wedge\psi_j$.

Inversement, soit $\omega \in \Omega^{k,p}(M)$ une forme fermée. Si ω n'est pas nulle en cohomologie réduite, il existe une $n-k$-forme fermée $\psi \in L^{p'}$ telle que $\int_M \omega\wedge\psi \neq 0$. La suite stationnaire $\psi_j = \psi$ pour tout j convient. Supposons désormais que ω est nulle en cohomologie réduite. On définit une forme linéaire L sur $d\Omega^{n-k,p'}(M)$ comme suit. Etant donné $\gamma \in d\Omega^{n-k,p'}(M)$, on choisit $\psi \in \Omega^{n-k,p'}(M)$ tel que $d\psi = \gamma$ et on pose $L(\gamma) = \int_M \omega\wedge\psi$. Comme l'intégrale de ω contre une forme fermée est toujours nulle, le résultat ne dépend pas du choix de ψ. Supposons qu'il n'existe pas de suite $\psi_j \in \Omega^{n-1-k,p'}(M)$ telle que $\int_M \omega\wedge\psi_j \geq 1$ et $\| \psi_j \|_{L^{p'}}$ tend vers 0. Alors la forme linéaire L est continue pour la norme $L^{p'}$. Par Hahn-Banach, L se prolonge en une forme linéaire continue sur $L^{p'}\Omega^{n-k+1}(M)$. Par dualité entre L^p et $L^{p'}$, il existe une $k-1$-forme $\beta \in L^p$ telle que pour tout $\gamma \in L^{p'}\Omega^{n-k+1}(M)$, $L(\gamma) = (-1)^k\int_M \beta\wedge\gamma$. Si ψ est lisse à support compact,

$$\int_M \beta\wedge d\psi = (-1)^k\int_M \omega\wedge\psi$$

donc $d\beta = \omega$ au sens des distributions. Par conséquent, $\beta \in \Omega^{k-1,p}(M)$ et ω est nulle en cohomologie L^p. ■

Corollaire 81 *Soit M une variété riemannienne complète de dimension n. Soit $p > 1$ et $p' = p/p-1$. Alors*

$$R^{k,p}(M) \Leftrightarrow R^{n-k,p'}(M) = 0, \quad T^{k,p}(M) = 0 \Leftrightarrow T^{n-k+1,p'}(M) = 0.$$

Preuve. L'énoncé sur la cohomologie réduite résulte immédiatement du lemme 80.

Supposons que $T^{n-k+1,p'}(M)=0$. D'après le lemme 66, il existe une constante C telle que pour tout $\psi\in\Omega^{n-k,p'}(M)$, il existe $\gamma\in\Omega^{n-k,p'}(M)$ telle que $d\gamma=d\psi$ et $\|\gamma\|_{L^{p'}}\leq C\|d\psi\|_{L^{p'}}$. Soit $\omega\in\Omega^{k,p}(M)$ une forme fermée, nulle en cohomologie réduite. Alors

$$\int_M \omega\wedge\psi=\int_M\omega\wedge\gamma$$

est contrôlée par $\|d\psi\|_{L^{p'}}$. Par conséquent, il n'existe pas de suite ψ_j de $n-k$-formes différentielles $L^{p'}$ telles que $\int_M\omega\wedge\psi_j\geq 1$ et $\|d\psi_j\|_{L^{p'}}$ tende vers 0. On conclut que ω est nulle en cohomologie $L^{p'}$. ∎

Remarque. Plus généralement, $R^{k,p}(M)$ est isomorphe au dual de $R^{n-k,p'}(M)$. On aimerait dire que $T^{k,p}(M)=Ext(T^{n-k+1,p'}(M),\mathbf{R})$ dans une catégorie adéquate.

13 Espaces homogènes fermés à l'infini

13.1 Annulation de la cohomologie réduite

Théorème 3 *Soit M un espace homogène riemannien non compact, fermé à l'infini. Alors la cohomologie L^p réduite de M est nulle en tous degrés.*

Preuve. Ce résultat est dû à J. Cheeger et M. Gromov [CG] dans le cas particulier où $p=2$ et à M. Gromov [G2] dans le cas général. Il suffit de vérifier que M satisfait aux hypothèses de l'argument heuristique qui se trouve dans la prépublication préliminaire à [G2] (mais pas dans l'article publié).

1. pour tout $R>0$, il existe une suite de sous-variétés D_j de M telles que le nombre v_j de boules de rayon R deux à deux disjointes qu'on peut mettre dans D_j et le nombre a_j de boules de rayon 1 suffisantes pour recouvrir ∂D_j satisfassent $\lim a_j/v_j=0$.

Lorsque M est un groupe de Lie résoluble unimodulaire, on sait que M admet des ensembles de Folner qui sont des parallélépipèdes en coordonnées polyexponentielles. Ils satisfont à l'hypothèse (1).

Si M est homogène riemannien non compact, alors d'après la proposition 71, M est quasi-isométrique à un groupe de Lie résoluble unimodulaire. Comme l'hypothèse (1) est invariante par quasiisométrie, elle est satisfaite par M. ∎

13.2 Torsion des produits directs

Soient M_1 et M_2 deux variétés riemanniennes complètes. Si la torsion $T^{*,p}(M_1)$ est identiquement nulle, alors $H^{*,p}(M_1\times M_2)=H^{*,p}(M_1)\otimes H^{*,p}(M_2)$. En présence de torsion, c'est moins simple. Supposons que $T^{k_1,p}(M_1)\neq 0$ et $T^{k_2,p}(M)\neq 0$. D'après le lemme 80, il existe des formes fermées L^p e_i sur M_i et des formes $L_{p'}$ $e'_{i,j}$ telles que

$$\int_{M_i} e_i\wedge e'_i=1\quad\text{et}\quad\|de'_{i,j}\|_{L^{p'}}\quad\text{tende vers}\quad 0.$$

La forme fermée L^p $\omega=e_1\wedge e_2$ sur $M_1\times M_2$ est elle non nulle en cohomologie ? Pour l'affirmer, il faudrait contrôler la norme de $d(e'_{1,j}\wedge e'_{2,j})$, c'est-à-dire celle de $e'_{1,j}$ et de $e'_{2,j}$. Ceci motive la définition suivante.

Définition 82 *Soit M une variété riemannienne complète de dimension n. On note $H^{k,p}_o(M)$ le sous-ensemble de $H^{k,p}(M)$ formé des classes qui contiennent une forme ω ayant la propriété suivante. Il existe une suite $\omega'_j\in\Omega^{n-k,p'}(M)$ telle que*

1. *les intégrales* $\int_M \omega\wedge\omega'_j$ *ne tendent pas vers* 0 *;*

2. *les normes* $\| \omega'_j \|_{L^{p'}}$ *tendent vers* $+\infty$ *polynomialement en* j *;*

3. *les normes* $\| d\omega'_j \|_{L^{p'}}$ *tendent vers* 0 *exponentiellement en* j.

Enfin, on note $T_o^{k,p}(M) = H_o^{k,p}(M)\cap T^{k,p}(M)$.

Proposition 83 *Soient* M_1 *et* M_2 *des variétés riemanniennes complètes. Si les sous-ensembles* $H_o^{k_1,p}(M_1)$ *et* $H_o^{k_2,p}(M_2)$ *sont non vides, alors* $H_o^{k_1+k_2,p}(M_1\times M_2)$ *est non vide. En particulier,* $H^{k_1+k_2,p}(M_1\times M_2)\neq 0$.

Si $k_1=n_1$ *ou bien si* $k_2=n_2$*, le résultat est plus précis: si* $T_o^{k_1,p}(M_1)$ *et* $T_o^{k_2,p}(M_2)$ *sont non vides, alors* $T_o^{k_1+k_2,p}(M_1\times M_2)$ *est non vide. En particulier,* $T^{k_1+k_2,p}(M_1\times M_2)\neq 0$.

Preuve. Soient $\omega_1\in\Omega^{k,p}(M_1)$ (resp. $\omega_2\in\Omega^{\ell,p}(M_2)$) des formes fermées. Supposons qu'il existe des formes $\omega'_{1,j}\in\Omega^{n_1-k_1,p'}(M_1)$ (resp. $\omega'_{2,j}\in\Omega^{n_2-k_2,p'}(M_2)$) comme dans la définition 82. Posons $\omega=\pi_1^*\omega_1\wedge\pi_2^*\omega_2$ et $\omega'_j=\pi_1^*\omega_{1,j}\wedge\pi_2^*\omega_{2,j}$. Alors ω est fermée et L^p et les formes ω'_j satisfont aux hypothèses de la définition 82, donc la classe de cohomologie de ω est dans $H_o^{k_1+k_2,p}(M_1\times M_2)$.

Supposons maintenant que $k_1=n_1$ et que ω_2 est de torsion. Soit ϕ une (n_2-k_2)-forme fermée $L^{p'}$ sur $M_1\times M_2$. La restriction de ϕ à presque tout facteur $\{*\}\times M_2$ est fermée et $L^{p'}$, donc pour presque tout $x_1\in M_1$,

$$\int_{M_2}\omega_2\wedge\phi_{|\{x_1\}\times M_2}=0.$$

Il vient

$$\int_{M_1\times M_2}\omega\wedge\phi=\int_{M_1}\omega_1\wedge\int_{M_2}\omega_2\wedge\phi=0,$$

autrement dit, ω est de torsion. ■

13.3 Torsion et spectre du laplacien

Lorsque $p=2$, il n'y a pas lieu de se préoccuper du sous-ensemble $T_o^{*,p}$.

Proposition 84 *Soit* M *une variété riemannienne. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. $T_0^{2,k}(M)\neq\emptyset$ *;*

2. $T^{2,k}(M)\neq 0$ *;*

3. 0 *est un point d'accumulation du spectre du laplacien restreint aux* k*-formes cofermées.*

Preuve. 2 entraîne 3. Si 0 est un point isolé du spectre du laplacien restreint aux k-formes cofermées, il existe une constante C telle que pour tout k-forme cofermée $\phi\in\Omega^{k,2}(M)$, orthogonale aux formes harmoniques,

$$\langle\phi,\phi\rangle\leq C\,\langle d^*d\phi,\phi\rangle.$$

Alors $\|\phi\|\leq C\|d\phi\|$ pour ϕ cofermée orthogonale aux formes harmoniques. Cela entraîne que $d(\ker d^*)$ est fermé, donc que l'image de d est fermée, i.e. que $T^{2,k}(M)=0$.

3 entraîne 1. Supposons que 0 est un point d'accumulation du spectre du laplacien restreint aux k-formes cofermées. Soit ϵ_j une suite décroissant strictement vers 0, de sorte que pour tout j le projecteur spectral

$$\Pi_j=1_{]\epsilon_{j+1},\epsilon_j[}(d^*d)$$

correspondant à l'intervalle $]\epsilon_{j+1}, \epsilon_j[$ soit non nul. On peut demander que la suite ϵ_j tende vers 0 exponentiellement. Pour chaque j, on choisit un vecteur unitaire ϕ_j dans l'image de Π_j. Alors $\| d\phi_j \| \leq \sqrt{\epsilon_j}$. On pose

$$\omega = \sum_j \frac{1}{j} * \phi_j .$$

C'est une forme fermée L^2. Posons $\omega'_j = j\phi_j$. Alors $\omega'_j \in \Omega^{2,k}(M)$ et

$$\int_M \omega \wedge \omega'_j = \pm\langle *\omega, \omega_j \rangle = \pm 1$$

ne tend pas vers 0. De plus $\| \omega_j \| = j$ et $\| d\omega_j \| \leq j\sqrt{\epsilon_j}$ tend vers 0 exponentiellement. Par conséquent, $\omega \in T_0^{2,k}(M)$. ∎

13.4 Non nullité de la torsion des groupes abéliens

En revanche, pour $p \neq 2$, je ne sais montrer que $T_o^{*,p}$ est non vide qu'en en construisant directement des éléments. Commençons par le cas de la droite réelle.

Lemme 85 *L'ensemble $T_o^{1,p}(\mathbf{R})$ est non vide. Plus précisément, il existe une 1-forme L^p $a\,dt$ et une suite u_j de fonctions lisses à support compact sur $\mathbf{R}$ telles que*

1. *$\int_{\mathbf{R}} u_j a\, dt$ ne tend pas vers 0 ;*
2. *$\| u_j \|_{L^{p'}}$ tend vers $+\infty$ polynomialement en j ;*
3. *$\| u'_j \|_{L^{p'}}$ tend vers 0 exponentiellement en j.*

   On a de plus les propriétés suivantes :
4. *$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} |sa'(s)|^p\, ds < +\infty$;*
5. *les fonctions a et $-u_j$ sont décroissantes sur $[1, +\infty[$;*
6. *les fonctions a et u_j sont paires et s'annulent au voisinage de 0 ;*
7. *$\| u_j \|_{L^\infty}$ tend vers 0 exponentiellement en j ;*
8. *pour tout $\epsilon > 0$, $\| s^{1-\epsilon}u'_j \|_{L^{p'}}$ et $\| s^{-\epsilon}u_j \|_{L^{p'}}$ tendent vers 0 exponentiellement.*

Preuve. Soit χ une fonction lisse et paire sur $\mathbf{R}$, à support dans $[-1, 1]$, qui vaut 1 au voisinage de 0. On pose

$$a(x) = (1 - \chi(x))|x|^{-\frac{1}{p}}(\log|x|)^{-1} \quad \text{si} \quad |x| \geq e, \quad a(x) = (1 - \chi(x))e^{-\frac{1}{p}} \quad \text{sinon.}$$

On définit une suite de fonctions v_j paires, décroissantes sur $[0, +\infty[$ par

$$\begin{aligned}
v_j(x) &= 2(1 - \chi(x))2e^{-\frac{j}{p'}} \quad \text{si} \quad |x| \leq e^j, \\
v_j(x) &= 2j\,|x|^{-\frac{1}{p'}}(\log|x|)^{-1} \quad \text{si} \quad e^j \leq |x| \leq e^{2j}, \\
v_j(x) &= e^{-\frac{2j}{p'}}(e^j + 1 - e^{-j}|x|) \quad \text{si} \quad e^{2j} \leq |x| \leq e^{2j}(1 + j^{-1}), \\
v_j(x) &= 0 \quad \text{sinon.}
\end{aligned}$$

Comme $p > 1$, a et sa dérivée sont L^p. De plus $sa'(s) \sim -\frac{1}{p}a(s)$ donc $\int |sa'(s)|^p\, ds < +\infty$. Par construction, v'_j est nulle sur $[0, e^j]$, constante sur $[e^j, e^{2j}(1+j^{-1})]$. Sur l'intervalle $[e^j, e^{2j}(1+j^{-1})]$, $|v'_j|$ est majorée par const.$j\, s^{-1-1/p'}(\log s)^{-1}$. On calcule

$$\int_0^{e^j} av_j = o(1), \quad \int_{e^j}^{e^{2j}} av_j = 1, \quad \int_{e^{2j}}^{e^{2j}(1+j^{-1})} av_j = O(j^{-1}),$$

$$\int_0^{e^j} |v_j|^{p'} = 2^{p'}, \quad \int_{e^j}^{e^{2j}} |v_j|^{p'} = O(j), \quad \int_{e^{2j}}^{e^{2j}(1+j^{-1})} |v_j|^{p'} = O(j^{-1}),$$

$$\int_0^{e^j} |v'_j|^{p'} = 0, \quad \int_{e^j}^{e^{2j}} |v'_j|^{p'} = O(j^{p'}e^{-p'j}), \quad \int_{e^{2j}}^{e^{2j}(1+j^{-1})} |v'_{j'}|^{p'} = O(j^{p'-1}e^{-2p'j}),$$

$$\int_1^{e^j} |s^{-\epsilon}v_j|^{p'} = O(je^{-\epsilon p'j}), \int_{e^j}^{e^{2j}} |s^{-\epsilon}v_j|^{p'} = O(j^{p'}e^{-\epsilon p'j}), \int_{e^{2j}}^{e^{2j}(1+j^{-1})} |s^{-\epsilon}v_j|^{p'} = O(j^{-1}e^{-2\epsilon p'j}),$$

$$\int_0^{e^j} |s^{1-\epsilon}v'_j|^{p'} = 0, \quad \int_{e^j}^{e^{2j}} |s^{1-\epsilon}v'_j|^{p'} = O(j^{p'}e^{-\epsilon p'j}), \quad \int_{e^{2j}}^{e^{2j}(1+j^{-1})} |s^{1-\epsilon}v'_j|^{p'} = O(j^{p'-1}e^{-2\epsilon p'j}).$$

Une approximation u_j lisse et à support compact de v_j convient. ∎

Corollaire 86 $T^{k,p}(\mathbf{R}^n) \neq 0$ *pour* $k = 1, \dots, n$.

Preuve. Montrons d'abord que $T_o^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ est non vide.

Dans $\mathbf{R}^n$, on note r la distance euclidienne à l'origine. Soit $\theta' = dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ une $(n-1)$-forme parallèle. La forme $dr \wedge \theta$ étant homogène de degré 0, elle s'écrit

$$dr \wedge \theta' = h\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

où la fonction h est lisse en dehors de l'origine et homogène de degré 0. Elle n'est pas identiquement nulle. Par homogénéïté, $|h|$ et $r|dh|$ sont bornées.

Soient a et u_j les fonctions fournies par le lemme 85. On considère les formes différentielles $\omega = a(r^n)\, dr$ et $\omega'_j = u_j(r^n)h\theta'$ sur $\mathbf{R}^n$. On vérifie que

$$\| \omega \|_{L^p} = \text{const.}(\int_0^{+\infty} |a(r^n)|^p r^{n-1}\, dr)^{1/p} = \text{const.}\| a \|_{L^p}$$

est finie, que

$$\int_{\mathbf{R}^n} \omega \wedge \omega'_j = \int_{S^{n-1}} h^2 \int_0^{+\infty} a(r^n)u_j(r^n)r^{n-1}\, dr = C \int_{\mathbf{R}} au_j$$

ne tend pas vers 0, et que

$$\| \omega'_j \|_{L^{p'}} = \text{const.}(\int_0^{+\infty} |u_j(r^n)|^{p'} r^{n-1}\, dr)^{1/p'} = \text{const.}\| u_j \|_{L^{p'}}$$

tend vers $+\infty$ polynomialement.

On calcule

$$d\omega'_j = nr^{n-1}u'_j(r^n)h\, dr \wedge \theta' + u_j(r^n)\, dh \wedge \theta',$$

et on majore

$$\begin{aligned} \| r^{n-1}u'_j(r^n)h \|_{L^{p'}} &\leq \text{const.}(\int_0^{+\infty} |r^{n-1}u'_j(r^n)|^{p'} r^{n-1}\, dr)^{1/p'} \\ &= \text{const.}\| s^{n-1/n}u'_j(s) \|_{L^{p'}} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \| u_j(r^n)\, dh \|_{L^{p'}} &\leq \text{const.}(\int_0^{+\infty} |r^{-1}u_j(r^n)|^{p'} r^{n-1}\, dr)^{1/p'} \\ &= \text{const.}\| s^{-1/n}u_j(s) \|_{L^{p'}} \end{aligned}$$

qui tendent vers 0 exponentiellement, d'après le lemme 85. On conclut que ω est dans $H_o^{1,p}(\mathbf{R}^n)$, donc dans $T_o^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ puisque la cohomologie réduite est nulle.

Pour avoir le cas général, il suffit d'appliquer suffisamment de fois la proposition 83. ∎

13.5 Cas des groupes de Lie nilpotents simplement connexes

Lemme 87 *Soit N un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche. On note d la* dimension homogène *de N, i.e. $d = \sum i\dim N^i/N^{i+1}$ où $N^i = [N, N^{i-1}]$ est la suite centrale descendante. Il existe une fonction lisse ρ sur N telle que*

- *si η et η' sont des champs de vecteurs invariants à gauche sur N, les dérivées $\eta\rho$ et $\rho|\eta'\eta\rho|$ sont bornées ;*
- *le volume de l'ensemble de niveau $\{\rho < R\}$ vaut const.R^d ;*
- *soit η un champ de vecteurs invariant à gauche ; on pose $z(R) = \int_{\{\rho<R\}} (\eta\rho)^2$; si η n'est pas dans $[\mathcal{N}, \mathcal{N}]$, alors $z'(R) \geq$ const.R^{d-1}.*

Preuve. Comme N est nilpotent simplement connexe, l'application exponentielle est un difféomorphisme $\exp : \mathcal{N} \to N$. Comme l'algèbre de Lie $\mathcal{N}$ est nilpotente, l'application naturelle $j : \mathcal{N} \to gr(\mathcal{N}) = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathcal{N}^i/\mathcal{N}^{i+1}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. On note $D = (2r)!$. Soient $x_{i,\ell}$ des coordonnées sur $\mathcal{N}^i/\mathcal{N}^{i+1}$. Soit ν la fonction définie sur $gr(\mathcal{N})$ par

$$\nu(x) = (\sum_{i,\ell} |x_{i,\ell}|^{D/i})^{1/D}.$$

Enfin, on pose $\rho = \nu \circ j \circ \exp^{-1}$. Alors ρ est lisse (sauf en 0, ce qui est sans importance).

Comme le difféomorphisme $j \circ \exp^{-1}$ préserve le volume, $vol(\{\rho < R\}) = vol(\{\nu < R\})$. Enfin l'application linéaire $\delta_R : gr(\mathcal{N}) \to gr(\mathcal{N})$ qui vaut R^i sur $\mathcal{N}^i/\mathcal{N}^{i+1}$ a pour jacobien R^d et satisfait $\nu \circ \delta_R = R\nu$, donc

$$vol(\{\nu < R\}) = R^d vol(\{\nu < 1\}) = \text{const.}R^d.$$

Un polynôme P sur N est dit δ-homogène de δ-degré q s'il existe un entier q tel que $P \circ \delta_R = R^q P$. Tout polynôme P sur N se décompose en somme de polynômes δ-homogènes, et le plus grand degré des composantes s'appelle le δ-degré de P.

La δ-graduation des polynômes s'étend en une δ-graduation de l'espace des champs de vecteurs à coefficients polynômiaux sur $gr(\mathcal{N})$. Un champ de vecteurs constant sur $gr(\mathcal{N})$, à valeurs dans $\mathcal{N}^i/\mathcal{N}^{i+1}$ est δ-homogène de degré $-i$. Si $\eta \in \mathcal{N}$ est dans $\mathcal{N}^i$ mais pas dans $\mathcal{N}^{i+1}$, le champ de vecteurs invariant à gauche sur N correspondant, une fois transporté sur $gr(\mathcal{N})$, est à coefficients polynômiaux, et son degré est exactement $-i$. Dériver suivant un champ de vecteurs invariant à gauche η abaisse le degré d'au moins une unité. C'est évident lorsque l'algèbre de Lie $\mathcal{N}$ est graduée, i.e. lorsque j est un isomorphisme. En effet, dans ce cas, les champs de vecteurs invariants à gauche sont δ-homogènes. Pour le cas général, voir par exemple [P4] page 499.

La fonction $s = \rho^D$ est un polynôme δ-homogène de degré D. Par conséquent, si η et η' sont des champs de vecteurs invariants à gauche, ηs et $\eta'\eta s$ sont des polynômes de δ-degré au plus égal à $D-1$ et $D-2$ respectivement. Il existe donc une constante C telle que

$$|\eta s| \leq C\,\rho^{D-1} \quad \text{et} \quad |\eta'\eta s| \leq C\,\rho^{D-2}$$

d'où

$$|\eta\rho| = \frac{1}{D}\rho^{1-D}|\eta s| \leq \text{const.}.$$

et

$$|\eta'\eta\rho| = \frac{1}{D}(1-\frac{1}{D})\rho^{1-2D}|\eta s|^2 + \frac{1}{D}\rho^{1-D}|\eta'\eta s| \leq \text{const.}\rho^{-1}.$$

Soit η un champ de vecteurs invariant à gauche sur N, qui n'est pas dans $\mathcal{N}^2$. Alors la fonction $(\eta s)^2$ (une fois transportée sur $gr(\mathcal{N})$) est un polynôme de δ-degré exactement $2D-2$. Par conséquent, $(\eta s)^2 \circ \delta_R$ est un polynôme en R de degré $2D-2$.

On pose

$$w(R)=\int_{\{\rho<R\}}(\eta s)^2 \quad \text{et} \quad z(R)=\int_{\{\rho<R\}}(\eta\rho)^2.$$

Alors

$$w(R)=R^d\int_{\{\rho<1\}}(\eta s)^2\circ\delta_R$$

est un polynôme en R de degré $d+2D-2$, donc sa dérivée w' est équivalente à const.R^{d+2D-3}. De l'équation $w'(R)=D^2R^{2D-2}z'(R)$, on tire que z' est équivalente à const.R^{d-1}. ∎

Proposition 88 *Soit N un groupe de Lie nilpotent simplement connexe de dimension n, muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche. On suppose qu'il existe des formes fermées invariantes à gauche θ (de degré $k-1$) et θ' (de degré $n-k$) telles que le champ de vecteur η tel que $\theta\wedge\theta'=\iota_\eta vol$ ne soit pas dans $[\mathcal{N},\mathcal{N}]$. Alors $T_o^{k,p}(N)$ est non vide.*

Preuve. On note d la dimension homogène de N et vol son élément de volume. Soit ρ la fonction fournie par le lemme 13.5. On va intégrer des fonctions sur N qui ne dépendent que de ρ. On utilisera la formule de la coaire sous la forme

$$\int_N f(\rho)g\,vol=\int_0^{+\infty}f(R)G'(R)\,dR \quad \text{où} \quad G(R)=\int_{\{\rho<R\}}g.$$

On définit une fonction lisse (sauf peut-être à l'origine) h sur N par

$$d\rho\wedge\theta\wedge\theta'=h\,vol.$$

Si η est le champ de vecteurs invariant à gauche tel que $\iota_\eta vol=\theta\wedge\theta'$, alors $h=\eta\rho$. Par hypothèse, $\eta\notin[\mathcal{N},\mathcal{N}]$. D'après le lemme 13.5, h et $\rho|dh|$ sont bornés sur N et la fonction $(\eta\rho)^2$ est asymptotiquement homogène de degré 0.

Soient a et u_j les fonctions fournies par le lemme 85.

On considère les formes différentielles $\omega=a(\rho^d)\,d\rho\wedge\theta$ et $\omega'_j=u_j(\rho^d)h\theta'$ sur N. On vérifie que

$$\|\,\omega\,\|_{L^p}=(\int_N|a(\rho^d)|^p\,vol)^{1/p}=\text{const.}(\int_0^{+\infty}|a(R^d)|^pR^{d-1}\,dR)^{1/p}=\text{const.}\|\,a\,\|_{L^p}$$

est finie, que

$$\begin{aligned}\int_N\omega\wedge\omega'_j &= \int_N a(\rho^d)u_j(\rho^d)(\eta\rho)^2\,vol\\ &= \int_0^{+\infty}a(R^d)u_j(R^d)z'(R)\,dR\\ &\geq \text{const.}\int_0^{+\infty}a(R^d)u_j(R^d)R^{d-1}\,dR\\ &= \text{const.}\int_{\mathbf{R}}au_j\end{aligned}$$

ne tend pas vers 0, et que

$$\|\,\omega'_j\,\|_{L^{p'}}=(\int_N|hu_j(\rho^d)|^{p'}\,vol)^{1/p'}\leq\text{const.}(\int_0^{+\infty}|u_j(R^d)|^{p'}R^{n-1}\,dR)^{1/p'}=\text{const.}\|\,u_j\,\|_{L^{p'}}$$

tend vers $+\infty$ polynomialement.

On calcule

$$d\omega'_j=d\rho^{d-1}u'_j(\rho^d)h\,dr\wedge\theta'+u_j(\rho^d)\,dh\wedge\theta',$$

et on majore

$$\begin{aligned}\| \rho^{d-1} u_j'(\rho^d) h \|_{L^{p'}} &\leq \text{const.}(\int_0^{+\infty} |R^{d-1} u_j'(R^d)|^{p'} R^{d-1}\, dR)^{1/p'} \\ &= \text{const.}\| s^{n-1/n} u_j'(s) \|_{L^{p'}}\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\| u_j(\rho^d)\, dh \|_{L^{p'}} &\leq \text{const.}(\int_0^{+\infty} |R^{-1} u_j(R^d)|^{p'} R^{d-1}\, dR)^{1/p'} \\ &= \text{const.}\| s^{-1/n} u_j(s) \|_{L^{p'}}\end{aligned}$$

qui tendent vers 0 exponentiellement, d'après le lemme 85. On conclut que ω est dans $H_o^{k,p}(N)$, donc dans $T_o^{k,p}(N)$ puisque la cohomologie réduite est nulle. ∎

Corollaire 89 *Soit N le groupe de Heisenberg. Alors $T^{k,p}(N) \neq 0$ pour tout $k = 0, \ldots, \dim N$.*

Preuve. Par définition, $\mathcal{N}^2$ est de dimension 1. Soit $\mathcal{N}_1$ un supplémentaire de $\mathcal{N}^2$. Alors le crochet de Lie $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}^2$ est donné par une forme symplectique ω sur $\mathcal{N}_1$. Autrement dit, la 1-forme invariante τ qui engendre $\mathcal{N}^2$ a pour différentielle $\omega \in \Lambda^2\mathcal{N}_1^* \subset \Lambda^2\mathcal{N}^*$ vue comme 2-forme invariante, et les éléments de $\Lambda^*\mathcal{N}_1^*$ donnent des formes invariantes fermées sur N.

Notons $2m = \dim \mathcal{N}_1$, de sorte que $n = \dim \mathcal{N} = 2m+1$. Pour $k \leq m+1$, la multiplication extérieure par ω est surjective $\Lambda^{2m-k+1}\mathcal{N}_1^* \to \Lambda^{2m-k+3}\mathcal{N}_1^*$ donc elle n'est pas injective. Il existe donc des $2m-k+1$-formes non nulles $\psi \in \Lambda^{2m-k+1}\mathcal{N}_1^*$ telles que $\psi \wedge \omega = 0$. La $2m-k+2$-forme invariante $\theta' = \psi \wedge \tau$ est fermée. Comme ψ est non nulle, il existe une $k-1$-forme $\theta \in \Lambda^{k-1}\mathcal{N}_1^*$ telle que $\psi \wedge \theta' \neq 0$. Alors θ est fermée et $\theta \wedge \theta' = \iota_\eta vol$ où η est non nul et dans $\mathcal{N}_1$, donc n'est pas dans $[\mathcal{N},\mathcal{N}]$. D'après la proposition 88, cela prouve que $T^{k,p}(N) \neq 0$ pour $k \leq m+1$. En changeant k en $2m+2-k$ et en échangeant les rôles de θ et ψ, on trouve que $T^{k,p}(N) \neq 0$ pour $k \geq m+2$. ∎

14 Non nullité de cohomologie

En utilisant le critère de dualité 80, on montre que la cohomologie L^p de certains produits semi-directs est non nulle. Les résultats principaux de cette section sont les corollaires 91, 93 et 96.

On étudie des produits semi-directs $G = \mathbf{R} \times_\alpha H$ où α est une dérivation de l'algèbre de Lie $\mathcal{H}$. On note $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ le champ de vecteurs invariant à gauche sur G, tel que $\alpha = ad_\xi$ restreinte à $\mathcal{H}$, $\pi : G \to H$ la projection le long des orbites de ξ et t la fonction sur G définie par $g\exp(t(g)\xi) \in H$.

Fixons un réel $p > 1$. On note $\Lambda^*_{+(p)}$ (resp. $\Lambda^*_{0(p)}$, resp. $\Lambda^*_{-(p)}$) la somme des espaces caractéristiques de α dans l'algèbre extérieure $\Lambda^*\mathcal{H}^*$ relatifs aux valeurs propres de partie réelle supérieure (resp. égale, resp. inférieure) à $\mathrm{tr}\,(\alpha)/p$. Une forme différentielle e sur H se décompose en $e = e_+ + e_0 + e_-$ et la différentielle extérieure se décompose en $d = d_{+(p)} + d_{0(p)} + d_{-(p)}$.

14.1 Non nullité de la cohomologie réduite

Proposition 90 *Supposons qu'il existe des formes $e \in \Omega^{k-1,p}(H)$ et $e' \in \Omega^{n-k-1,p'}(H)$ telles que*

- *$d_{+(p)}e = 0$, $d_{+(p')}e' = 0$, $d_{0(p)}e = 0$ et $d_{0(p')}e' = 0$;*
- *$\int_H e \wedge de' \neq 0$.*

Alors $R^{k,p}(G) \neq 0$.

Preuve. On pose $a = de$ et $a' = -de'$. Comme $d_0 e = 0$, $a_- = de$ donc $da_- = 0$ et a fortiori $d_+ a_- = 0$. Aussi $a_+ = 0$, donc $d_- a_+ = 0$ et les hypothèses du lemme 35 sont satisfaites pour a. Il en est de même pour a'. De plus, les formes différentielles $\omega(s,a,e)$ et $\omega(s',a',e')$ sur G sont fermées, et $\int_G \omega(s,a,e) \wedge \omega(s',a',e') \neq 0$ pour s' suffisamment négatif. D'après le lemme 80, la forme $\omega(s,a,e)$ est non nulle en cohomologie réduite. ■

Corollaire 91 *On considère le produit semi-direct $G = \mathbf{R} \times_\alpha \mathbf{R}^{n-1}$ où α une matrice carrée $n-1 \times n-1$. On note $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1}$ les parties réelles des valeurs propres de α. On suppose qu'elles sont strictement positives. Pour $k = 1, \ldots, n-1$, on note $w_k = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ et $W_k = \lambda_{n-k} + \cdots + \lambda_{n-1}$. Etant donné $I \subset \{1, \ldots, n-1\}$, on note $\lambda_I = \sum_{i \in I} \lambda_i$. S'il existe une partie $I \subset \{2, \ldots, n-1\}$ à $k-1$ éléments telle que $\lambda_I < w_{n-1}/p < \lambda_I + \lambda_1$, alors $R^{k,p}(G) \neq 0$. En particulier, si $W_{k-1} < w_{n-1}/p < \lambda_1 + W_{k-1}$, ou bien si $w_k - \lambda_1 < w_{n-1}/p < w_k$, alors $R^{k,p}(G) \neq 0$.*

Preuve. Soient b et b' deux fonctions lisses à support compact sur $\mathbf{R}^{n-1}$. Soit $I \subset \{2, \ldots, n-1\}$, soit I' son complémentaire dans $\{2, \ldots, n-1\}$. Choisissons une base de $\mathbf{C}^{n-1}$ dans laquelle α est triangulaire. On note dx_I le produit des dx_i pour $i \in I$ et on pose

$$e = b\, dx_I \quad \text{et} \quad e' = b'\, dx_{I'}.$$

Alors de est une combinaison linéaire d'expressions de la forme $dx_i \wedge dx_I$ où $i \notin I$. Par conséquent, si $w_{n-1} - p(\lambda_1 + \lambda_I) < 0$, alors $de \in \Lambda^k_{-(p)}$. De même, si $w_{n-1} - p\lambda_I > 0$, alors $w_{n-1} - p'(\lambda_1 + \lambda_{I'}) < 0$, donc $de' \in \Lambda^k_{-(p')}$. Enfin

$$\int_{\mathbf{R}^{n-1}} e \wedge de' = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} b \frac{\partial b'}{\partial x_1} \neq 0$$

(choisir $b = \partial b'/\partial x_1 \neq 0$). D'après la proposition 90, $R^{k,p}(G) \neq 0$.

Les choix $I = \{2, \ldots, k\}$ et $I = \{n-k+1, \ldots, n-1\}$ donnent les cas particuliers annoncés. ■

14.2 Preuve du théorème F

Degré 1. Soit $n \geq 2$. L'espace hyperbolique réel est isométrique au produit semi-direct $M = \mathbf{R} \times_{id} \mathbf{R}^{n-1}$. D'après le corollaire 91, $R^{1,p}(M) \neq 0$ pour tout $p > n-1$.

Degré $n-1$. S'en déduit par dualité de Poincaré.

Degré $k = 2, \ldots, n-2$. Supposons $n \geq 4$. Soient $x \geq k-1$ et $y \geq n-k-1$ des réels. Posons $\lambda_1 = 1$, $\lambda_i = x/k-1$ pour $2 \leq i \leq k$ et $\lambda_i = y/n-k-1$ pour $k+1 \leq i \leq n-1$. Alors

$$\frac{w_{n-1}}{w_k - \frac{1}{2}\lambda_1} = \frac{1+x+y}{x+\frac{1}{2}}$$

tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$ et vers 0 lorsque y tend vers $+\infty$. Par conséquent, pour tout $p > 1$, il existe $x \geq k-1$ et $y \geq n-k-1$ tels que

$$p = \frac{1+x+y}{x+\frac{1}{2}}.$$

Alors $p = \dfrac{w_{n-1}}{w_k - \frac{1}{2}\lambda_1}$ satisfait $w_k - \lambda_1 < w_{n-1}/p < w_k$. Si G est le produit semi-direct de $\mathbf{R}$ avec $\mathbf{R}^{n-1}$ défini par la matrice diagonale de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, alors $R^{k,p}(G) = 0$. ■

14.3 Preuve du théorème H

On considère le produit semi-direct $G = \mathbf{R} \times_\alpha \mathbf{R}^{n-1}$ où α est une matrice diagonale de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1}$. On va choisir les λ_i de sorte que pour tout $k = 3, \ldots, [n/2]$, il existe une partition $\{2, \ldots, n-1\} = I \cup J$ telle que I possède $k-1$ éléments et $\lambda_I = \lambda_J$. Alors $\lambda_I < w_{n-1}/2 < \lambda_I + \lambda_1$, et la proposition 91 garantit que $R^{k,2}(G) \neq 0$.

Si n est pair, $n = 2m$, on pose $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ et pour $\ell = 2, \ldots, m-1$, $\lambda_{2\ell} = \lambda_{2\ell+1} = 2^{\ell-2}$, de sorte que

$$\sum_{\ell=2}^{n-3} \lambda_\ell = 2^{m-2} = \lambda_{n-2} + \lambda_{n-1}.$$

Alors $I_1 = \{n-2, n-1\}$ convient, mais aussi $I_2 = \{n-4, n-3, n-1\}$ car $\lambda_{n-2} = \lambda_{n-4} + \lambda_{n-3}$, et tous les $I_j = \{n-2j, n-2j+1, n-2j+3, n-2j+5, \ldots, n-1\}$ pour $j = 2, \ldots, m-2$. Comme I_j possède $j+1$ éléments, on réalise tous les entiers $k-1$ compris entre 2 et $m-1 = n/2-1$.

Si n est impair, $n = 2m+1$, on pose $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 2$ et pour $\ell = 3, \ldots, m-1$, $\lambda_{2\ell+1} = \lambda_{2\ell+2} = 2^{\ell-1}$. Les ensembles $I_j = \{n-2j, n-2j+1, n-2j+3, n-2j+5, \ldots, n-1\}$ pour $j = 2, \ldots, m-2$ conviennent. ■

14.4 Non-nullité de la torsion

On s'inspire de la discussion des produits directs (paragraphe 13.2). Lorsqu'on passe aux produits semi-directs $G = \mathbf{R} \times_\alpha H$ et qu'on s'intéresse à un exposant p non critique, on utilise seulement le fait que la cohomologie à support compact de la droite réelle est non nulle. De plus, l'opérateur d_+ remplace en quelque sorte l'opérateur d sur l'autre facteur.

Proposition 92 *Soit $G = \mathbf{R} \times_\alpha H$ un produit semi-direct. Soit e une $k-1$-forme fermée L^p sur H. On suppose qu'il existe une suite de formes $e'_j \in \Omega^{n-k-1,p}(H)$ telle que*

1. *les intégrales $\displaystyle\int_H e \wedge d_+ e'_j$ ne tendent pas vers 0 ;*
2. *la suite $m_j = \| de'_j \|_{L^{p'}}$ tend vers $+\infty$ polynomialement ;*
3. *la suite $n_j = \| dd_{+(p')} e'_j \|_{L^{p'}}$ tend vers 0 exponentiellement.*

Alors $\omega = d\chi \wedge \pi^* e$ est non nul dans $H^{k,p}(G)$. Si de plus H est unimodulaire, alors $T^{k,p}(G) \neq 0$.

Preuve.

Posons

$$\psi_j = \chi_1 \pi^* d_+ e'_j + (1-\chi_1)\pi^* d_- e'_j + d\chi_1 \wedge e'_j$$

et

$$\omega'_j = \chi_{s_j}(1-\chi_{-s_j})\psi_j,$$

où s_j est un réel positif. Alors

$$\begin{aligned} \int_G \omega \wedge \omega'_j &= \int_G d\chi \wedge e \wedge \psi_j \\ &= \int_{\mathbf{R}} \chi_1 d\chi \int_H e \wedge d_+ e'_j - \int_{\mathbf{R}} (1-\chi_1) d\chi \int_H e \wedge d_- e'_j \\ &= \int_H e \wedge d_+ e'_j \end{aligned}$$

ne tend pas vers 0. Comme $d\psi_j = \pi^* dd_+ e'_j$,

$$\begin{aligned} \| \chi_{s_j}(1-\chi_{-s_j}) d\psi_j \|_{L^{p'}(G)} &\leq e^{\mu s_j} \| dd_+ e'_j \|_{L^{p'}(H)} \\ &\leq e^{\mu s_j} n_j. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\| d(\chi_{s_j}(1-\chi_{-s_j}))\wedge\psi_j \|_{L^{p'}(G)}^{p'} &= \| d(\chi_{s_j})\wedge\psi_j \|_{L^{p'}(G)}^{p'} + \| d(1-\chi_{-s_j})\wedge\psi_j \|_{L^{p'}(G)}^{p'}\\ &\leq \mathrm{const.}(\| (\phi_{s_j})^* d_+ e'_j \|_{L^{p'}(H)}^{p'} + \| (\phi_{-s_j})^* d_- e'_j \|_{L^{p'}(H)}^{p'})\\ &\leq \mathrm{const.} e^{-\eta p' s_j}(\| d_+ e'_j \|_{L^{p'}(H)}^{p'} + \| d_- e'_j \|_{L^{p'}(H)}^{p'})\\ &\leq \mathrm{const.} e^{-\eta p' s_j}\| de'_j \|_{L^{p'}(H)}^{p'}.\end{aligned}$$

Il vient

$$\| \omega'_j \|_{L^{p'}(G)} \leq C\,(e^{\mu s_j} n_j + e^{-\eta s_j} m_j).$$

Posons $s_j = \dfrac{1}{\mu+\eta}\log(\eta m_j/\mu n_j)$. Avec ce choix,

$$\| d\omega'_j \|_{L^{p'}} \leq C'\, m_j^{\mu/\mu+\eta} n_j^{\eta/\mu+\eta}$$

qui tend vers 0 lorsque j tend vers $+\infty$. Le lemme 80 entraîne alors que ω est non nulle dans $H^{k,p}(G)$.

Soit ω' une $n-k$-forme fermée $L^{p'}$ sur G. Ecrivons $\omega' = \beta'_t + dt\wedge\gamma'_t$. Alors β'_t est une forme fermée sur H qui est dans $L^{p'}$ pour presque tout $t\in\mathbf{R}$. Supposons H unimodulaire. D'après le théorème 3, la cohomologie réduite $R^{k-1,p}(H)$ est nulle. Par conséquent, pour toute $k-1$-forme fermée L^p e sur H, $\int_H e\wedge\beta'_t = 0$. Il vient

$$\int_G d\chi\wedge\pi^* e\wedge\omega' = \int_{\mathbf{R}}\chi'(t)\,dt\int_H e\wedge\beta'_t = 0.$$

Ceci prouve que $\omega = d\chi\wedge\pi^* e$ est dans $T^{k,p}(G)$, et donc que $T^{k,p}(G)\neq 0$. ∎

Proposition 93 *On considère un produit semi-direct $G = \mathbf{R}\times_\alpha H$ où $H = \mathbf{R}^{n-1}$ est abélien. On note $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_{n-1}$ les parties réelles des valeurs propres de α. On note $w_k = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ et $W_k = \lambda_{n-1-k} + \cdots + \lambda_{n-1}$. Si $w_{k-1} < w_{n-1}/p < W_{k-1}$ et si p est non critique en degré $k-1$, alors $T^{k,p}(G)\neq 0$.*

Preuve. Les inégalités $w_{k-1} < w_{n-1}/p < W_{k-1}$ entraînent que $w_{n-k} < w_{n-1}/p' < W_{n-k}$. Etant donné $I\subset\{1,\ldots,n-1\}$, on note $\lambda_I = \sum_{i\in I}\lambda_i$. Considérons, parmi les parties I à $n-k$ éléments de $\{1,\ldots,n-1\}$ telles que $\lambda_I > w_{n-1}/p'$, celle, notée I_0, pour laquelle λ_I est minimum. Notons i_m le plus petit indice qui n'est pas dans I_0 et i_M le plus grand élément de I_0. Comme $\lambda_{I_0} > w_{n-1}/p' > w_{n-k}$, $i_m \leq n-k$ et $\lambda_{i_m} < \lambda_{i_M}$. Posons $I_1 = (I_0\cup\{i_m\})\setminus\{i_M\}$. Alors $\lambda_{I_1} < \lambda_{I_0}$ donc par définition de I_0, $\lambda_{I_1}\leq w_{n-1}/p'$. Comme p est non critique en degré $k-1$, p' est non critique en degré $n-k$, donc $w_{n-1} - p'\lambda_I \neq 0$ pour tout ensemble I à $n-k$ éléments. Par conséquent, $\lambda_{I_1} < w_{n-1}/p'$.

Soit $\theta'\in\Lambda^{n-k-1}\mathcal{H}^*$ un vecteur propre de $\Lambda^{n-k-1}\alpha$ relatif à une valeur propre de partie réelle $\mu' = \lambda_{I_0} - \lambda_{i_M}$, et soient η et $\eta'\in H^*$ des vecteurs propres relatifs à des valeurs propres de parties réelles λ_{i_m} et λ_{i_M} respectivement. Alors $(\eta'\wedge\theta')_{+(p')} = \eta'\wedge\theta'$ mais $(\eta\wedge\theta')_{+(p')} = 0$ donc

$$(\eta+\eta')\wedge((\eta+\eta')\wedge\theta')_{+(p')} = \eta\wedge\eta'\wedge\theta'$$

est non nul. Il existe donc $\theta\in\Lambda^{k-2}\mathcal{H}^*$ tel que $\theta\wedge(\eta+\eta')\wedge((\eta+\eta')\wedge\theta')_{+(p')}\neq 0$.

Soient a et u_j les fonctions fournies par le lemme 85. Posons, pour $s>0$,

$$\tilde{v}_j(s) = s^{-1/2} u_j(s^{n-1/2}).$$

Notons w_j la fonction à support compact sur $[0,+\infty[$ dont la dérivée est $\tilde{v}_j$. Dans $H = \mathbf{R}^{n-1}$, on note r la distance euclidienne à l'origine. On définit des fonctions $f = ra(r^{n-1})$ et $g = w_j(r^2)$ sur H. Par construction, $dg_j = 2u_j(r^{n-1})\,dr$.

On considère les formes différentielles $e'_j = g_j\theta'$ sur H. On a $de'_j = w'_j(r^2)d(r^2) \wedge \theta'$ donc $d_+e'_j = w'_j(r^2)d_+r^2 \wedge \theta'$ où on a noté

$$r_+^2 = \sum_{\lambda_i+\mu'>\mathrm{tr}\,\alpha/p'} x_i^2.$$

Comme la forme $d(r_+^2)$ est fermée,

$$dd_+e'_j = w''_j(r^2)d(r^2) \wedge d(r_+^2) \wedge \theta'.$$

Comme la $n-1$-forme $d(r^2) \wedge d_+r^2 \wedge \theta \wedge \theta'$ est homogène, on peut l'écrire

$$d(r^2) \wedge d_+r^2 \wedge \theta \wedge \theta' = r^2h(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$$

où la fonction h est lisse en dehors de l'origine et homogène de degré 0. Par homogénéïté, $|h|$ et $r|dh|$ sont bornées.

Il existe un point de H où $d(r^2) = \eta + \eta'$. En ce point, la $n-1$-forme $\theta \wedge d(r^2) \wedge (d(r^2) \wedge \theta')_{+(p')}$ est non nulle, donc h n'est pas identiquement nulle. On pose

$$e = d(fh\theta).$$

Comme e'_j est à support compact,

$$\begin{aligned}
\int_H e \wedge d_+e'_j &= \int_H fh\theta \wedge dd_+e'_j \\
&= \int_H fw''_j(r^2)h\,d(r^2) \wedge d_+r^2 \wedge \theta \wedge \theta' \\
&= \int_{S^{n-2}} h^2 \int_0^{+\infty} f(r)w''_j(r^2)r^2r^{n-2}\,dr \\
&= C\int_0^{+\infty} f(r)w''_j(r^2)r^n\,dr
\end{aligned}$$

où $C > 0$. On calcule, pour $r > 0$,

$$w''_j(r) = -\frac{1}{2}r^{-3/2}u_j(r^{n-1/2}) + \frac{n-1}{2}r^{n-4/2}u'_j(r^{n-1/2}).$$

Comme u_j est décroissante sur $[1,\infty[$, les deux termes de la somme sont de même signe, donc

$$\begin{aligned}
|\int_1^{+\infty} f(r)w''_j(r^2)r^n\,dr| &\geq \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} ra(r^{n-1})r^{-3}u_j(r^{n-1})r^n\,dr \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} a(s)u_j(s)\,ds \\
&= \frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}} a(s)u_j(s)\,ds
\end{aligned}$$

qui ne tend pas vers 0. L'intégrale $\int_0^1 f(r)w''_j(r^2)r^n\,dr$ tend vers 0, donc $\int_H e \wedge d_+e'_j$ ne tend pas vers 0.

Comme $e = hf'(r)dr \wedge \theta + fdh \wedge \theta$,

$$\begin{aligned}
\| e \|_{L^p} &\leq \mathrm{const.}\| f'(r) \|_{L^p(H)} + \| r^{-1}f(r) \|_{L^p(H)} \\
&= \mathrm{const.}(\int_0^{+\infty} |f'(r)|^pr^{n-2}\,dr)^{1/p} + \int_0^{+\infty} |r^{-1}f(r)|^pr^{n-2}\,dr)^{1/p} \\
&\leq \mathrm{const.}(\int_0^{+\infty} |r^{n-1}a'(r^{n-1})|^pr^{n-2}\,dr)^{1/p} + \int_0^{+\infty} |a(r^{n-1})|^pr^{n-2}\,dr)^{1/p} \\
&= \mathrm{const.}(\int_0^{+\infty} |sa'(s)|^p\,ds)^{1/p} + \int_0^{+\infty} |a(s)|^p\,ds)^{1/p}
\end{aligned}$$

est finie.

Comme $de'_j = 2u_j(r^{n-1})dr \wedge \theta'$,

$$\begin{aligned}\| de'_j \|_{L^{p'}}^{p'} &= \text{const.} \int_0^{+\infty} |u_j(r^{n-1})|^{p'} r^{n-1}\, dr \\ &= \text{const.} \int_0^{+\infty} |u_j(s)|^{p'}\, ds\end{aligned}$$

croît polynomialement en j, d'après le lemme 85.

Comme $dd_+e'_j = w''_j(r^2)d(r^2) \wedge d_+r^2 \wedge \theta'$,

$$\begin{aligned}\| dd_+e'_j \|_{L^{p'}} &\leq \text{const.}((\int_0^{+\infty} |r^{-1}u_j(r^{n-1})|^{p'} r_{n-1}\, dr)^{1/p'} + (\int_0^{+\infty} |r^{n-2}u'_j(r^{n-1})|^{p'} r_{n-1}\, dr)^{1/p'}) \\ &= \text{const.}((\int_0^{+\infty} |s^{-1/n-1}u_j(s)|^{p'}\, ds)^{1/p'} + (\int_0^{+\infty} |s^{n-2/n-1}u'_j(s)|^{p'}\, ds)^{1/p'})\end{aligned}$$

tend vers 0 exponentiellement, d'après le lemme 85. De la proposition 92, il résulte que $T^{k,p}(G) \neq 0$. ∎

Remarque. La proposition 93 s'applique parfois même si l'exposant p est critique en degré $k-1$. Il suffit qu'il existe une partie I à $n-k-1$ éléments de $\{1, \dots, n-1\}$ et des indices distincts ℓ $m \notin I$ tels que

$$\lambda_I + \lambda_\ell < w_{n-1}/p' < \lambda_I + \lambda_m.$$

Par exemple, si $k = n-1$, on trouve que $T^{n-1,p}(G) \neq 0$ pour tout p tel que $w_{n-2} < w_{n-1}/p < W_{n-2}$.

Remarque. La proposition 93 ne s'étend pas au cas où H est non abélien, comme on le voit pour les espaces hyperboliques complexes en dimension $n-1$, corollaire 65.

14.5 Preuve du théorème E

Il suffit de combiner les propositions 57 et 93. ∎

14.6 Preuve du théorème G

Pour un espace homogène contractile, en degrés 0, 1, $n-1$ et n, la cohomologie réduite et la torsion ne peuvent pas être simultanément non nulles.

En effet, il résulte du théorème A que, pour tout espace homogène M et tout exposant $p > 1$, l'un au moins des deux espaces $R^{1,p}(M)$ et $T^{1,p}(M)$ est nul.

En combinant le théorème A, la proposition 57 et la dualité de Poincaré, on voit que pour tout espace homogène M de dimension n et tout exposant $p > 1$, l'un au moins des deux espaces $R^{n-1,p}(M)$ et $T^{n-1,p}(M)$ est nul. En effet, si $R^{n-1,p}(M) \neq 0$, alors par dualité $R^{1,p'}(M) \neq 0$. D'après le théorème A (complété par la proposition 78), M est quasiisométrique à un produit semi-direct $G = \mathbf{R} \times_\alpha \mathbf{R}$ tel que les parties réelles λ_i des valeurs propres de α soient positives et satisfassent $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1} < p'\lambda_1$, i.e. $p(\lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1}) < \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1}$. Dans les notations de la proposition 57, cela s'écrit $w_{n-1}/p > W_{n-2}$. On conclut que $T^{n-1,p}(G) \neq 0$, puis que $T^{n-1,p}(M) \neq 0$ par invariance, car M est contractile.

En combinant les propositions 91 et 93, on trouve que pour toute dimension $n \geq 4$, tout degré k tel que $2 \leq k \leq n-2$ et tout exposant $p > \dfrac{n-2}{k-1}$, il existe des exemples de groupes de Lie G de dimension n tels que $R^{k,p}(G) \neq 0$ et $T^{k,p}(G) \neq 0$ simultanément.

En effet, étant donné des réels $x \leq 1$ et $y \geq 0$, posons $\lambda_1 = x$, $\lambda_i = 1$ pour $i = 2, \dots, n-2$ et $\lambda_{n-1} = 1 + y$. Alors $w_{n-1} = n - 2 + x + y$. Comme $p > \dfrac{n-2}{k-1}$, il existe $y > 0$ tel que

$$\frac{n-2+y}{p} = k - 1.$$

Alors pour tout $x > 0$, $w_{n-1}/p = (n-2+x+y)/p = k-1+(x/p)$ est compris entre $w_k - \lambda_1 = k-1$ et $w_k = k-1+x$. Si de plus on choisit $x < y$ et $x < 1$, $W_{k-1} = k-1+y > w_k$ donc w_{n-1}/p est compris entre $w_{k-1} = k-2+x$ et W_{k-1}. Soit $G = \mathbf{R} \times_\alpha \mathbf{R}^{n-1}$ où α est la matrice diagonale de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$. Comme $w_k - \lambda_1 < w_{n-1}/p < w_k$, $R^{k,p}(G) \neq 0$. Comme $w_{k-1} < w_{n-1}/p < W_{k-1}$, $T^{k,p}(G) \neq 0$. ∎

Remarque. La borne $\dfrac{n-2}{k-1}$ n'est pas optimale.

14.7 Autres cas de non-nullité de cohomologie

Nous proposons une autre méthode pour montrer que la cohomologie L^p est non nulle. Elle permet notamment de montrer que si $G = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$ est un produit semi-direct, pour tout p non critique il existe un degré k tel que $H^{k,p}(G) \neq 0$.

Proposition 94 *Soit $e \in \Omega^{k-1,p}(H)$ une forme telle que $d_{0(p)}e = 0$ et $d_{-(p)}e = 0$. Supposons qu'il existe une suite $e'_j \in \Omega^{n-k-1,p'}(H)$ telle que*

- $d_0 e'_j = 0$;
- *la suite $m_j = \| d_{+(p')}e'_j \|_{L^{p'}}$ tend vers $+\infty$ polynomialement ;*
- *la suite $n_j = \| d_{-(p')}e'_j \|_{L^{p'}} + \| d_{0(p')}e'_j \|_{L^{p'}}$ tend vers 0 exponentiellement ;*
- *la suite $\displaystyle\int_H de \wedge e'_j$ ne tend pas vers 0.*

Alors $H^{k,p}(G) \neq 0$.

Preuve. Comme en 90, $\omega = \omega(0, de, e)$ est fermée et L^p sur G. On pose $\omega'_j = \omega(s_j, 0, e'_j)$ avec une suite s_j tendant vers $+\infty$. D'après le lemme 35, pour j assez grand,

$$\int_G \omega \wedge \omega'_j = (-1)^k \int_H de \wedge e'_j + \int_H e \wedge d_- e'_j$$

qui ne tend pas vers 0. Il reste à choisir la suite s'_j de sorte que $\| d\omega'_j \|_{L^{p'}}$ tende vers 0. Or d'après le lemme 35,

$$\| d\omega'_j \|_{L^{p'}} \leq C\, e^{-\eta s_j} m_j + C\, e^{\mu s_j} n_j.$$

Posons $s'_j = \dfrac{1}{\mu + \eta} \log(\eta m_j / \mu n_j)$. Avec ce choix,

$$\| d\omega'_j \|_{L^{p'}} \leq C'\, m_j^{\mu/\mu+\eta} n_j^{\eta/\mu+\eta}$$

qui tend vers 0 lorsque j tend vers $+\infty$. Le lemme 80 entraîne alors que $H^{k,p}(G) \neq 0$. ∎

Lemme 95 *On considère un produit semi-direct $G = \mathbf{R} \times_\alpha \mathbf{R}^{n-1}$. On note $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_{n-1}$ les parties réelles des valeurs propres de α. Si $I \subset \{1, \ldots, n-1\}$, on note $\lambda_I = \sum_{i \in I} \lambda_i$ et $I^+ = I \cup \{m\}$ où m est le plus petit élément du complémentaire de I. Supposons que I a $k-1$ éléments et qu'il contient tous les indices i tels que $\lambda_i \leq 0$. Alors $H^{k,p}(G) \neq 0$ si $\lambda_I < \mathrm{tr}\,(\alpha)/p < \lambda_{I^+}$. En particulier, si on note $w_k = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$, alors $H^{k,p}(G) \neq 0$ dès que $w_k > 0$ et $w_{k-1} < w_{n-1}/p < w_k$.*

Preuve. De nouveau, soit I' le complémentaire de $I^+ = I \cup \{m\}$. Soient dx_I et $dx_{I'}$ des formes invariantes sur $\mathbf{R}^{n-1}$, vecteurs propres de $\Lambda^* \alpha$ pour des valeurs propres de parties réelles λ_I et $\lambda_{I'}$. Comme $\mathbf{R}^{n-1}$ est abélien, ces formes sont fermées. Soit c une fonction lisse à support compact sur

$\mathbf{R}$. Soient a et u_j les fonctions sur $\mathbf{R}$ fournies par le lemme 85. On définit des fonctions b et b'_j sur $\mathbf{R}^{n-1}$ comme suit.

$$b(x_1,\ldots,x_{n-1})=c'(x_m)\prod_{i\neq m}a(x_i)\quad\text{et}\quad b'_j(x_1,\ldots,x_{n-1})=c(x_m)\prod_{i\neq m}u_j(x_i).$$

On pose $e=b\,dx_I$ et $e'_j=b'_j\,dx_{I'}$.

Si $\mathrm{tr}\,(\alpha)/p<\lambda_{I^+}$, alors $de\in\Lambda^k_+$, i.e. $d_{-(p)}e=d_{0(p)}e=0$. Si $\mathrm{tr}\,(\alpha)/p>\lambda_I$, alors $\mathrm{tr}\,(\alpha)/p'<\lambda_m+\lambda_{I'}$, donc la composante $\dfrac{\partial b'_j}{\partial x_m}\,dx_m\wedge dx_{I'}$ de de'_j est dans $\Lambda^k_{+(p')}$. Sa norme $L^{p'}$ vaut $\| c' \|\| u_j \|^{n-2}$ qui est polynomial en j. Les autres composantes de de'_j ont une norme $L^{p'}$ égale à $\| c \|\| u_j \|^{n-3}\| u'_j \|$ qui tend vers 0 exponentiellement. Enfin,

$$\int_{\mathbf{R}^{n-1}}de\wedge e'=(\int_{\mathbf{R}}c'^2)(\int_{\mathbf{R}}av'_j)^{n-2})$$

ne tend pas vers 0 quand j tend vers l'infini. Les hypothèses du lemme 94 sont satisfaites, et on conclut que $H^{k,p}(G)\neq 0$.

Le cas particulier s'obtient avec le choix de $I=\{1,\ldots,\lambda_{n-1}\}$. ∎

Corollaire 96 *Soit $G=\mathbf{R}\times_\alpha H$ un produit semi-direct où $H=\mathbf{R}^{n-1}$ est abélien. Sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de p, il existe un degré k tel que $H^{k,p}(G)\neq 0$.*

Preuve. Si $\mathrm{tr}\,\alpha=0$, alors G est unimodulaire, donc fermé à l'infini. D'après le théorème A, $H^{1,p}(G)\neq 0$ pour tout $p>1$.

Si $w_{n-1}=\mathrm{tr}\,\alpha>0$, il n'y a qu'un nombre fini d'exposants critiques. Etant donné $p>1$ non critique, il existe k tel que $w_{k-1}<w_{n-1}/p<w_k$. Le lemme 95 donne alors que $H^{k,p}(G)\neq 0$. ∎

Remarque. Vraisemblablement, $H^{k,p}(G)\neq 0$ pour $p=w_{n-1}/w_k$. C'est le cas notamment lorsque les λ_i sont tous égaux, voir en 15.2.

Remarque. Le lemme 95 ne s'étend pas non plus aux produits semi-directs $G=\mathbf{R}\times_\alpha H$ où H n'est pas abélien.

14.8 Cohomologie aux exposants critiques

Proposition 97 *Soit $G=\mathbf{R}\times_\alpha H$ un produit semi-direct. Soit p un exposant critique en degré $k-1$, i.e. tel que $\Lambda_0^{k-1}\neq 0$. On suppose qu'il existe une $k-1$-forme e fermée et L^p sur H et une suite $e'_j\in\Omega^{n-k,p'}(H)$ telles que*

- $e_-=0$, $e'_{j,-}=0$, $d_-e'_j=0$;
- $\int_H e\wedge e'_j$ *ne tend pas vers* 0 ;
- $\| e'_{j,0} \|_{L^{p'}}$, $\| e'_{j,+} \|_{L^{p'}}$ *et* $\| d_+e'_j \|_{L^{p'}}$ *tendent vers l'infini polynômialement en* j ;
- $\| d_0e'_j \|_{L^{p'}}$ *tend vers* 0 *exponentiellement en* j.

Alors $H^{k,p}(G)\neq 0$.

Preuve. Soient a et u_j des fonctions sur $\mathbf{R}$ qui sont nulles sur $[0,+\infty[$ et coïncident sur $]-\infty,0]$ avec celles construites en 85.

On pose $\omega=a(t)\,dt\wedge\pi^*e$ et $\omega'_j=u_j(t)\pi^*e'_j$. Alors ω est fermée. Comme $e_-=0$, il existe une constante strictement positive ν telle que

$$\| \omega \|^p_{L^p(G)}\leq\text{const.}\int_{-\infty}^0|a(t)|^p(e^{\nu t}\| e_+ \|^p_{L^p(H)}+\| e_0 \|^p_{L^p(H)})\,dt$$

donc $\omega \in L^p(G)$. De même,

$$\| \omega'_j \|^{p'}_{L^{p'}(G)} \leq \text{const.} \int_{-\infty}^{0} |u_j(t)|^{p'} (e^{\nu t} \| e'_{j,+} \|^{p'}_{L^{p'}(H)} + \| e_{j,0} \|^{p'}_{L^{p'}(H)})\, dt$$

tend vers $+\infty$ polynômialement. On calcule $d\omega'_j = u'_j(t)\, dt \wedge \pi^* e'_j + u_j(t)\pi^* de'_j$, et

$$\| u'_j(t)\, dt \wedge \pi^* e'_j \|^{p'}_{L^{p'}(G)} \leq \text{const.} \int_{-\infty}^{0} |u'_j(t)|^{p'} (e^{\nu t} \| e'_{j,+} \|^{p'}_{L^{p'}(H)} + \| e_{j,0} \|^{p'}_{L^{p'}(H)})\, dt$$

tend vers 0 exponentiellement car $\| u'_j \|_{L^{p'}}$ et $\| u'_j \|_{L^\infty}$ tendent vers 0 exponentiellement. De même

$$\| u_j(t)\pi^* de'_j \|^{p'}_{L^{p'}(G)} \leq \text{const.} \int_{-\infty}^{0} |u_j(t)|^{p'} (e^{\nu t} \| d_+ e'_j \|^{p'}_{L^{p'}(H)} + \| d_0 e_j \|^{p'}_{L^{p'}(H)})\, dt$$

tend vers 0 exponentiellement car $\| d_0 e'_j \|_{L^{p'}}$ et $\| u_j \|_{L^\infty}$ tendent vers 0 exponentiellement.

Enfin

$$\int_G \omega \wedge \omega'_j = \int_{-\infty}^{0} a u_j \int_H e \wedge e'_j$$

ne tend pas vers 0. On conclut avec le lemme 80 que ω est non nulle dans $H^{k,p}(G)$. ∎

Corollaire 98 *Soit M l'espace hyperbolique réel ou complexe de dimension n. Pour $2 \leq k \leq \frac{n}{2}+1$, soit p le plus grand exposant critique en degré $k-1$ ($p = \frac{n-1}{k-1}$ pour l'espace hyperbolique réel et $p = \frac{n}{k-1}$ pour l'espace hyperbolique complexe). Alors $H^{k,p}(M) \neq 0$. Si de plus $k \leq \frac{n}{2}$, alors $T^{k,p}(M) \neq 0$.*

Preuve. Cas hyperbolique réel. On suppose seulement que $k \geq 2$. Soit e une $k-1$-forme fermée à support compact sur $\mathbf{R}^{n-1}$, non nulle. Cela existe dès que $k \geq 2$. Soit $e'_j = e'$ une $n-k$-forme sur $\mathbf{R}^{n-1}$ telle que $\int e \wedge e' \neq 0$. Comme $\Lambda^{k-1} = \Lambda_0^{k-1}$, $\Lambda^{n-k} = \Lambda_0^{n-k}$ et $\Lambda^{n-k+1} = \Lambda_+^{n-k+1}$, les conditions $e_- = 0$, $e'_- = 0$ et $d_- e' = 0$ sont automatiquement satisfaites. De plus, $d_+ e' = 0$, donc la proposition 97 s'applique, et $H^{k,p}(M) \neq 0$. L'exposant conjugué p' est inférieur ou égal aux exposants critiques en degrés $n-k-1$ et $n-k$, donc $H^{n-k,p'}(M) = 0$ d'après 53.

Cas hyperbolique complexe. Ici $n = 2m+2$, H est le groupe d'Heisenberg de dimension $2m+1$. On suppose que $k \leq m+1$ et on utilise les formes fermées invariantes à gauche θ et θ' construites en 89. On pose $e = b(\rho)\, d\rho \wedge \theta$ et $e'_j = e' = b(\rho) h \theta'$ où b est à support compact et h la fonction telle que $d\rho \wedge \theta \wedge \theta' = h\, vol$. Alors $\int_H e \wedge e' \neq 0$.

Pour $p = n/k-1$, $\Lambda^{k-1}_{-(p')} = 0$ donc la condition $e_- = 0$ est automatiquement satisfaite. On vérifie que

$$\Lambda^{n-k}_{0(p')} = \Lambda^{n-k-1}\mathcal{N}_1^* \otimes \mathcal{N}_2^* \quad \text{et} \quad \Lambda^{n-k+1}_{+(p')} = \Lambda^{n-k}\mathcal{N}_1^* \otimes \mathcal{N}_2^*.$$

Comme θ' est fermée et divisible par la forme de contact τ, $e' \in \Lambda_0^{n-k}$, et sa différentielle est encore divisible par τ, donc dans $\Lambda^{n-k+1}_{+(p')}$. On a donc automatiquement $e'_- = d_- e' = 0$ et de plus $d_0 e' = 0$. De nouveau, la proposition 97 s'applique, et $H^{k,p}(M) \neq 0$.

Dans les deux cas, l'exposant conjugué p' est inférieur ou égal à tous les exposants critiques en degrés $n-k-1$ et $n-k$, donc $H^{n-k,p'}(M) = 0$ d'après 53. La dualité de Poincaré donne que $R^{k,p}(M) = 0$ donc c'est bien la torsion qui est non nulle. ∎

Remarque. La restriction $k \leq \frac{n}{2}$ est nécessaire dans le cas hyperbolique complexe. Par exemple, pour $n = 4$ et $k = 3$, $p = 2$ or la cohomologie L^2 du plan hyperbolique complexe est réduite en tout degré, voir [Bo], [G1].

15 Quelques exemples détaillés

On fait la synthèse des conséquences des résultats généraux pour quelques exemples.

15.1 Le plan hyperbolique

Soit M le plan hyperbolique. On peut voir M comme le groupe $\mathbf{R} \times_\alpha \mathbf{R}$ où α est l'identité, $e^{t\alpha}$ est la dilatation par e^t. Le théorème A donne que $T^{1,p}(M) = 0$ et $R^{1,p}(M) = 0$ pour tout $p > 1$. En fait $R^{1,p}(M) = \mathcal{B}^{1,p}$ est un espace de fonctions (modulo les constantes) sur $\mathbf{R}$. Le corollaire 30 permet d'identifier cet espace. La fonction κ du corollaire 30 satisfait $\kappa(e^t s) = \tau^{-2}\kappa(s)$ donc $\kappa(s) \sim s^{-2}$. Soit u une fonction sur $\mathbf{R}$. D'après le corollaire 30, $du \in \mathcal{B}^{1,p}$ si et seulement si

$$\int_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}} |u(s) - u(s')|^p |s - s'|^{-2}\, ds\, ds' < +\infty.$$

Autrement dit, étant donnée une fonction u dans $L^p(\mathbf{R})$, sa différentielle du est dans $\mathcal{B}^{1,p}$ si et seulement si $u \in B^{1/p}_{p,p}(\mathbf{R})$, voir [T] page 6. En quelque sorte, $\mathcal{B}^{1,p}$ est la version invariante par $PSL(2,\mathbf{R})$ de l'espace $B^{\frac{1}{p}-1}_{p,p}(\mathbf{R})$. Lorsque $p = 2$, espaces de Besov et de Sobolev coïncident.

15.2 L'espace hyperbolique

Ici, $G = \mathbf{R} \times_\alpha \mathbf{R}^{n-1}$ où α est l'identité.

Comme on l'a vu au paragraphe 8.2, la cohomologie L^p est séparée pour tout exposant non critique, et non nulle dans un intervalle en chaque degré k. Si $p \leq n - 1/k$ ou $p > n - 1/k - 1$, $H^{k,p}(G) = 0$. Si $n - 1/k < p < n - 1/k - 1$, $H^{k,p}(G) = \mathcal{B}^{k,p}$ est non nul, c'est en gros l'espace des k-formes fermées sur $\mathbf{R}^{n-1}$ dont les coefficients sont dans l'espace de Besov $B^{-k+(n-1/p)}_{p,p}(\mathbf{R}^{n-1})$ (exactement, c'est l'espace des k-formes fermées sur la sphère S^{n-1} dont les coefficients sont dans l'espace de Besov $B^{-k+(n-1/p)}_{p,p}(S^{n-1})$, ramené sur $\mathbf{R}^{n-1}$ par projection stéréographique).

Si $p = n - 1/k - 1$, $R^{k,p}(M) = 0$ par dualité de Poincaré, et $T^{k,p}(M) \neq 0$ d'après le corollaire 98.

15.3 Produits semi-directs de R par $\mathbf{R}^2$

Soit $G = \mathbf{R} \times_\alpha \mathbf{R}^2$ où $\alpha = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ici, $h = 1 + \lambda$.

Cas où $\lambda \in]-1, 1]$. Dans ce cas, le groupe G est ouvert à l'infini.

En degré 1, le théorème A donne la réponse complète si $p > 1$.

- Si $\lambda \leq 0$, alors $H^{1,p}(G) = 0$ pour tout $p > 1$.
- Si $0 < \lambda \leq 1$, alors $H^{1,p}(G) = 0$ pour $p \leq 1+1/\lambda$ et $H^{1,p}(G) = R^{1,p}(G) \neq 0$ pour $p > 1+1/\lambda$.

En degré 3, comme $\mathrm{tr}\,(\alpha) \neq 0$, la proposition 51 s'applique et $H^{3,p}(G) = 0$ pour tout $p > 1$.

On se place désormais en degré 2. Si $\lambda \leq 0$, il n'y a aucun exposant critique en degré 1. Si $\lambda = 1$, il y en a un, c'est $p = 2$. Si $0 < \lambda < 1$, il y en a deux, $p = 1 + \lambda$ et $p = 1 + 1/\lambda$.

La proposition 32 s'applique directement lorsque $0 < \lambda \leq 1$ et $p > 1 + 1/\lambda$. En effet, $\Omega^1_- = 0$ et $\Omega^2_- = 0$ donc $\mathcal{B}^{2,p} = 0$ et $H^{2,p}(G) = 0$.

Si $0 < \lambda \leq 1$ et $p < 1 + \lambda$, $\mathcal{B}^{1,p} = 0$ donc $H^{2,p}(G)$ est séparé et $T^{2,p}(G) = 0$. Par dualité de Poincaré, $R^{2,p}(G)$ est non nul.

Supposons désormais que $\lambda \leq 0$ ou que $0 < \lambda < 1$ et $1 + \lambda < p < 1 + 1/\lambda$. Par dualité de Poincaré, $R^{2,p}(G) = 0$. D'après le lemme 95, $H^{2,p}(G) \neq 0$ et donc $T^{2,p}(G) \neq 0$. Dans des cas particuliers, on le sait par d'autres moyens. Lorsque $\lambda = 0$, cela résulte de la formule de Künneth. Pour $p = 2$, d'après J. Lott [Lt], pour un espace homogène riemannien, l'un au moins des espaces de cohomologie L^2 est non nul (théorème “zéro dans le spectre”). Comme la cohomologie L^2 est nulle en degrés 0, 1 et 3, nécessairement $L^2H^2(G) \neq 0$.

Cas où $\lambda = -1$. Dans ce cas, le groupe G est unimodulaire.

En degré 1, le théorème A donne que $R^{1,p}(G) = 0$ et $T^{1,p}(G) \neq 0$. Par dualité de Poincaré, on en déduit que $R^{3,p}(G) = 0$ et $T^{3,p}(G) \neq 0$ pour tout $p > 1$.

En degré 2. Aucun exposant n'est critique en degré 1. Comme $\Omega^0_+ = \Omega^0_+ = 0$, $\mathcal{B}^{1,p} \subset \Omega^1_- \cap \Omega^1_+$ est nul, donc la cohomologie du complexe $\mathcal{B}^{*,p}$ en degré 2 est séparée, c'est l'espace de Besov ordinaire $B^{2/p}_{p,p}(\mathbf{R}^2)$. Comme p est critique en degré 0, le théorème 1 donne seulement une surjection $H^2(\mathcal{B}^{*,p}) \to H^{2,p}(G)$. V. Goldshtein et M. Troyanov ont montré que $H^{2,p}(G)$ est non nul pour tout $p > 1$, [GT]. Comme d'après le théorème 3, la cohomologie réduite est nulle, nécessairement $T^{2,p}(G) \neq 0$.

15.4 Le plan hyperbolique complexe

Soit M le plan hyperbolique complexe. On peut le voir comme une métrique invariante à gauche sur le produit semi-direct $\mathbf{R} \times_\alpha N$ où N est le groupe de Heisenberg, $\mathcal{N}$ a une base (X, Y, Z) telle que $[X, Y] = Z$ et Z est central, et $\alpha(X) = X$, $\alpha(Y) = Y$, $\alpha(Z) = 2Z$. Notons (dx, dy, τ) la base duale de $\mathcal{N}^*$. Les 1-formes invariantes à gauche dx et dy sont fermées, mais $d\tau = -dx \wedge dy$.

En degré 1, le théorème A (plus précisément, la proposition 78) donne que $H^{1,p}(M) = 0$ pour $p \leq 4$ et $H^{1,p}(M) = R^{1,p}(M) \neq 0$ pour $p > 4$.

Pour $p > 4$, l'espace $\mathcal{B}^{1,p} \cap \ker d$ est un espace de fonctions (modulo les constantes) sur la sphère S^3. C'est une sorte d'espace de Besov anisotrope. Il contient les différentielles de fonctions de classe C^1 à support compact sur N comme sous-espace dense.

En degré 4, la proposition 51 donne que $H^{4,p}(M) = 0$.

Degré 2. Comme $h = 4$, il y a 2 exposants critiques en degré 1, $p = 2$ et $p = 4$.

Pour $1 < p \leq 4/3$, $\Omega^2_+ = 0$ et $\Omega^1_+ = 0$ donc $\mathcal{B}^{2,p} = 0$ et $H^{2,p}(M) = 0$.

Pour $4/3 < p < 2$, $\mathcal{B}^{1,p} = 0$ donc $H^{2,p}(M) = \mathcal{B}^{2,p} \cap \ker d$ est séparé. Comme $\Omega^1_+ = 0$ et Ω^2_+ est engendré par les formes $dx \wedge \tau$ et $dy \wedge \tau$, les éléments de $\mathcal{B}^{2,p}$ s'annulent sur $X \wedge Y$. Il y a de nombreuses formes fermées qui satisfont cette condition. En fait, pour toute 1-forme ϕ sur N, $\psi = d\phi + d((d\phi)(X, Y)\tau)$ convient. Si ϕ est de classe C^1 à support compact, alors $\psi \in \mathcal{B}^{2,p} \cap \ker d$. Par conséquent, $H^{2,p}(M)$ est séparé et non nul.

L'exposant $p = 2$ est critique en degré 1. Par conséquent, le théorème 1 ne donne rien. On peut modifier la méthode pour traiter ce cas, voir [P2] page 193. Il est connu (voir [Bo], [G1]) que $L^2H^2(M)$ est non nul et séparé.

Pour $2 < p < 4$, l'opérateur $d : \mathcal{B}^{1,p} \to \mathcal{B}^{2,p}$ est d'image fermée. En effet, une de ses composantes $D : a \wedge \tau \mapsto a \wedge d\tau$ est un isomorphisme de $\mathcal{B}^{1,p}$ sur le sous-espace fermé $\ker \iota_Z \subset \mathcal{B}^{2,p}$. Par conséquent $H^{2,p}(M)$ est séparé, il est isomorphe (non canoniquement) au sous-espace $E \subset \mathcal{B}^{2,p}$ des formes s'annulant sur $X \wedge Y$.

L'exposant $p = 4$ est critique en degré 1. Par conséquent, le théorème 1 ne donne rien. Néanmoins, par dualité de Poincaré, la cohomologie réduite est nulle, et d'après le corollaire 98, $T^{2,4}(M)$ est non nul.

Pour $p > 4$, $\Omega^2_- = 0$ et $\Omega^1_- = 0$ donc $\mathcal{B}^{2,p} = 0$ et $H^{2,p}(M) = 0$.

Degré 3. Il y a 2 exposants critiques en degré 2, $p = 4/3$ et $p = 2$.

Pour $1 < p < 4/3$, $\mathcal{B}^{2,p} = 0$ donc $T^{3,p}(M) = 0$, $H^{3,p}(M) = R^{3,p}(M) = \mathcal{B}^{3,p}$ est séparé. Toute 3-forme continue à support compact sur N est dans $\mathcal{B}^{3,p}$.

Pour $p = 4/3$, la dualité de Poincaré donne $R^{3,4/3}(M) = 0$ et $T^{2,4} \neq 0$.

Pour $4/3 < p < 2$, le théorème 1 donne $H^{3,p}(M) = \mathcal{B}^{3,p}/d\mathcal{B}^{2,p}$. Comme $R^{1,p} = T^{2,p} = 0$, la dualité de Poincaré donne que $R^{3,p} = T^{3,p} = 0$. C'est compatible avec un résultat de N. Lohoué, [L2] (voir aussi [CL]), qui entraîne que $H^{3,p}(M) = 0$ pour p assez proche de 2.

Pour $p = 2$, on sait, [G1] ou [DF], que $L^2H^3(M) = 0$.

Pour $p \geq 2$, le théorème B donne $H^{3,p}(M) = 0$.

Pour résumer, pour le plan hyperbolique complexe,

- la cohomologie réduite est non nulle pour un intervalle ouvert de valeurs de p en chaque degré, cet intervalle est vide en degré 0, $]4,+\infty[$ en degré 1, $]4/3,4[$ en degré 2, $]1,4/3[$ en degré 3, vide en degré 4 ;
- la torsion est non nulle exactement pour les deux valeurs exceptionnelles de p, en degré 2 pour $p=4$ et en degré 3 pour $p=4/3$.

References

[ADN] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II.* Commun. Pure Appl. Math. **17**, 35 – 92 (1964).

[BMR] J. BEMELMANS, MIN OO, E. RUH, *Smoothing Riemannian metrics.* Math. Z. 188, 69 – 74 (1984).

[B] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie.* Eléments de Mathématique, Masson, Paris (1981).

[Be] Y. BENOIST, Communication privée.

[BK] P. BUSER and H. KARCHER, *Gromov's almost flat manifolds.* Astérisque **81**, Soc. Math. de France, Paris (1981).

[Bo] A. BOREL, *The L^2-cohomology of negatively curved Riemannian symmetric spaces.* Ann. Acad. Sci. Fennicae **10**, 95 – 105 (1985).

[Br] R. BROOKS, *The fundamental group and the spectrum of the Laplacian.* Comment. Math. Helv. **56**, 581 – 598 (1981).

[CG] J. CHEEGER, M. GROMOV, *L^2 cohomology and group cohomology.* Topology **25**, 189 – 215 (1986).

[CL] M. CHAYET, N. LOHOUE, *Sur la cohomologie L^p des variétés.* C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I **324**, 211 – 213 (1997).

[DF] H. DONNELLY, C. FEFFERMAN, *L^2 cohomology and index theorem for the Bergman metric.* Annals of Math. **118**, 593 – 618 (1983).

[DX] H. DONNELLY, F. XAVIER, *On the differential form spectrum for negatively curved manifolds.* Amer. J. Math. **108**, 169 – 185 (1984).

[F] R. FORMAN, *Spectral sequences and adiabatic limits.* Comm. Math. Phys. **168**, 57 – 116 (1995).

[G1] M. GROMOV, *Kähler hyperbolicity and L_2-Hodge theory.* J. Differen. Geom. **33**, 253 – 320 (1991).

[G2] M. GROMOV, *Asymptotic invariants of infinite groups.* In "Geometric Group Theory", ed. G. Niblo and M. Roller, Cambridge University Press, Cambridge (1993).

[GKS] V. GOLDSTEIN, V. KUZMINOV, I. SHVEDOV, *The Kuenneth formula for L_p cohomologies of warped products.* Sib. Math. J. **32**, No.5, 749 – 760 (1991); translation from Sib. Mat. Zh. **32**, No.5(189), 29 – 42 (1991).

[GT] V. GOLDSTEIN, M. TROYANOV, *The $L^{p,q}$ cohomology of SOL.* Preprint, Lausanne (1997).

[He] E. HEINTZE, *On homogeneous manifolds of negative curvature.* Math. Annalen **211**, 23 – 34 (1974).

[Ho] H. HOKE, *Lie groups that are closed at infinity.* Trans. Amer. Math. Soc. **313**, 721 – 735 (1989).

[KS] V. KUZMINOV, I. SHVEDOV, *On compact solvability of the operator of exterior derivation.* Sib. Math. J. **38**, No.3, 492 – 506 (1997); translation from Sib. Mat. Zh. **38**, No.3, 573 – 590 (1997).

[L1] N. LOHOUE, *Remarques sur un théorème de Strichartz.* C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I **311**, 507 – 510 (1990).

[L2] N. LOHOUE, *Sur un théorème de M. Gromov.* Prépublication d'Orsay (1996).

[Lt] J. LOTT, *The zero-in-the-spectrum question.* Enseign. Math. **42**, 341 – 376 (1996).

[M] Y. MATSUSHIMA, *On Betti numbers of compact locally symmetric Riemannian manifolds.* Osaka Math. J. **14**, 1 – 20 (1962).

[Ma] V. MAZYA, *Classes of domains and embedding theorems for function spaces.* Dokl. Akad. Nauk USSR **133**, 527 – 530 (1960).

[MM] R. MAZZEO, R. MELROSE, *The adiabatic limit, Hodge cohomology and Leray's spectral sequence for a fibration.* J. Differen. Geom. **31**, 185 – 213 (1990).

[P1] P. PANSU, *Cohomologie L^p des variétés à courbure négative, cas du degré un.* In "P.D.E. and Geometry 1988", Rend. Sem. Mat. Torino, Fasc. spez., 95 – 120 (1989).

[P2] P. PANSU, *Differential forms and connections adapted to contact structures, after M. Rumin.* P. 183-196 in "Symplectic Geometry", D. Salamon ed., L.M.S. Lect. Notes Vol. **192**, London Math. Soc., London (1993).

[P3] P. PANSU, *Cohomologie L^p : invariance sous quasiisométrie.* Manuscrit (1995).

[P4] P. PANSU, *Difféomorphismes de p-dilatation bornée.* Ann. Acad. Sci. Fennicae **223**, 475 – 506 (1997).

[R] D. ALEXANDRU-RUGINA, *L_p-intégrabilité des formes harmoniques K-finies sur les espaces hyperboliques réels et complexes.* Rend. Semin. Mat., Torino **54**, 75 – 87 (1996).

[S] R. STRICHARTZ, *Analysis of the Laplacian on a complete Riemannian manifold.* J. Funct. Anal. **52**, 48 – 79 (1983).

[T] H. TRIEBEL, *Theory of function spaces II.* Birkhaüser, Basel (1992).

[Z] S. ZUCKER, *L^2-cohomology of warped products and arithmetic groups.* Invent. Math. **70**, 169 – 218 (1982).

Laboratoire de Mathématique d'Orsay
UMR 8628 du C.N.R.S.
Université de Paris-Sud XI
Bâtiment 425
91405 Orsay
France
`Pierre.Pansu@math.u-psud.fr`
`http://www.math.u-psud.fr/~pansu`