DYNAMIQUE DES APPLICATIONS RATIONNELLES DES ESPACES MULTIPROJECTIFS

CHARLES FAVRE & VINCENT GUEDJ

Table des matières

Introduction

Ce travail a pour objet l'étude de l'itération des endomorphismes rationnels f de $\mathbb{C}^k$. Il est naturel de considérer l'extension de ces applications à l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^k$ pour tirer profit de leur algébricité ; c'est le point de vue qui a été adopté par tous les auteurs jusqu'à présent, sous l'impulsion notamment des travaux de Fornaess et Sibony (voir [F-S 94], [F-S 95] et [Si 98]). Un des premiers résultats de la théorie est la construction d'un

1991 *Mathematics Subject Classification.* 32H50, 32H04, 32C30.

"courant de Green", c'est un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ dans $\mathbb{P}^k$ dont le support coïncide -dans les bons cas- avec l'ensemble de Julia et qui est invariant par f. Il faut cependant supposer que l'application est "algébriquement stable"dans $\mathbb{P}^k$, ce qui revient à dire que $\deg(f^j) = (\deg f)^j$, où $\deg f$ désigne le degré algébrique de f.

Il semble difficile d'amorcer une théorie générale des endomorphismes rationnels de $\mathbb{C}^k$ qui ne sont pas algébriquement stables dans $\mathbb{P}^k$. Nous avons observé qu'il est parfois préférable de considérer l'extension de f dans une compactification X différente de $\mathbb{P}^k$. Une compactification de $\mathbb{C}^k$ est la donnée d'une variété complexe compacte X -que nous supposerons lisse, projective- et d'un diviseur Y de X -non nécessairement irréductible- tels que $X \setminus Y$ est biholomorphe à $\mathbb{C}^k$ (voir e.g. [P-S 91]). Nous considérons ici le cas d'un espace multiprojectif $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s}$. De nombreux endomorphismes rationnels de $\mathbb{C}^{n_1+\cdots+n_s}$ ne sont pas algébriquement stables dans $\mathbb{P}^{n_1+\cdots+n_s}$ mais le sont dans $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s}$ (voir définition 1.9 et proposition 1.10 ci-dessous). Nous construisons pour ces applications un courant de Green et montrons qu'il possède des propriétés similaires à celles des courants de Green d'applications algébriquement stables de $\mathbb{P}^k$; nous nous appuyons de façon essentielle sur le récent survey de Sibony [Si 98].

Il est notable que la plupart des endomorphismes rationnels f de $\mathbb{C}^k$ que nous considérons ne sont pas algébriquement stables dans $\mathbb{P}^k$, ni même birationnellement conjugués à des applications algébriquement stables de $\mathbb{P}^k$. Le premier degré dynamique $\lambda_1(f)$ (voir définition 4.1 et lemme 4.4) constitue en effet un invariant par conjugaison birationnelle qui est nécessairement entier si f est algébriquement stable dans $\mathbb{P}^k$; nous étudions des applications dont le premier degré dynamique est dans $\frac{1}{2}\mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Un de nos objectifs était de tenter de préciser la nature de la mesure limite μ_f construite par Russakovskii-Shiffman [R-S 97] qui rend compte de l'équidistribution des points par image inverse (voir théorème 4.6). Nous proposons une construction alternative qui permet d'exprimer μ_f comme la courbure d'un courant "pluripositif" (au sens de [Si 85]) qui ne charge pas les ensembles pluripolaires. Cela nous permet de montrer que μ_f ne charge pas -en général- l'ensemble de normalité (théorème 4.15) et qu'elle est mélangeante dans le cas des produits croisés (section 6). Notons que la construction de courants pluripositifs intervient également dans [G-S 99] pour définir certaines mesures mélangeantes pour des automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^k$.

Par commodité, nous nous sommes restreints au cas où X ne comporte que deux facteurs et, très souvent, au cas $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Nous avons en effet préféré insister sur les nouvelles familles d'exemples que l'on peut traiter ainsi, ce qui justifie l'importance relative des deux dernières sections.

Détaillons à présent le contenu de l'article.

Après avoir brièvement rappelé la forme des endomorphismes rationnels f des espaces multiprojectifs, nous introduisons dans la *section 1* les notions dynamiques fondamentales pour la suite: ensemble d'indétermination, applications algébriquement stables, ensembles de Fatou, Julia et de normalité. Nous construisons le courant de Green T_f de f dans la *section 2* (théorème

2.2). C'est la limite de $\rho_+^{-j}(f^j)^*(\omega)$ où ω est une forme de Kähler normalisée et ρ_+ est la plus grande valeur propre de la matrice des degrés de f. Le courant T_f est à support dans l'ensemble de Julia -avec égalité si f est normale (corollaire 2.7)- et ne charge pas les hypersurfaces (théorème 2.8). Il est extrémal dans le convexe compact $\mathcal{K}_f$ des courants positifs fermés S de bidegré $(1,1)$ sur X tels que $f^*S = \rho_+ \cdot S$ (proposition 2.4).

Dans la *section 3* nous précisons la dynamique des applications monomiales de $\mathbb{C}^2$ définies par $f(z,w) = (z^\alpha w^\beta, z^\gamma w^\delta)$. Nous explicitons par des arguments d'estimées volumiques les éléments extrémaux du convexe $\mathcal{K}_f$ (théorème 3.2). Nous rappelons dans la *section 4* la définition des degrés dynamiques $\lambda_l(f)$ due à Friedland [F 91]. Nous transportons dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ le résultat de Russakovskii-Shiffman [R-S 97] qui assure, sous l'hypothèse $\lambda_2(f) > \lambda_1(f)$, l'existence d'une mesure de probabilité μ_f et d'un ensemble pluripolaire $\mathcal{E}_f$ dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ tels que

$$(1) \qquad \frac{1}{\lambda_2(f^j)}(f^j)^*(\varepsilon_a) \longrightarrow \mu_f, \ \forall a \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \mathcal{E}_f,$$

où ε_a désigne la masse de Dirac au point a. Lorsque μ_f ne charge pas les ensembles pluripolaires, l'équation (1) implique que μ_f est mélangeante pour f (lemme 4.11). Nous montrons que μ_f admet un potentiel continu pluripositif dans l'ensemble de normalité et nous établissons des inégalités de Chern-Levine-Nirenberg pour ces courants afin de montrer que μ_f ne charge pas certains ensembles pluripolaires. Cette technique sera également appliquée aux produits croisés (section 6).

La *section 5* traite le cas des applications polynomiales de $\mathbb{C}^2$ qui admettent une extension méromorphe algébriquement stable dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Lorsque l'application n'est pas un produit croisé, la fonction de Green (potentiel de T_f) est continue et positive dans $\mathbb{C}^2$, c'est la fonction d'échappement vers le point (∞,∞) qui est superattractif (théorème 5.2). Nous exhibons des exemples d'applications polynomiales non normales de $\mathbb{C}^2$ pour lesquelles un disque holomorphe est isolé dans leur ensemble de Julia.

Nous considérons dans la *section 6* le cas des "produits croisés" algébriquement stables de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Nous montrons que la mesure limite μ_f est mélangeante, qu'elle admet des exposants de Lyapunov strictement positifs et nous précisons certains aspects de la dynamique. La fonction de Green peut être discontinue, nous obtenons les premiers exemples explicites d'applications polynomiales de $\mathbb{C}^2$ dont l'ensemble des points d'orbite positive bornée n'est pas fermé et l'ensemble récurrent non borné dans $\mathbb{C}^2$. Des applications similaires ont été étudiées par différents auteurs, nous nous sommes inspirés de Jonsson [Jo 97] qui considère le cas des produits croisés polynomiaux de $\mathbb{C}^2$ admettant une extension holomorphe dans $\mathbb{P}^2$.

La *section 7* est consacrée à la dynamique des applications birationnelles algébriquement stables dans $\mathbb{P}^2$ ou $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Nous caractérisons tout d'abord tous les courants T positifs fermés de bidegré $(1,1)$ t.q. $f^*T = \lambda_1(f)T$. Etant donné S un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$, nous donnons une condition optimale sur les nombres de Lelong de S pour que la suite de courants $\lambda_1(f)^{-j}(f^j)^*S$ converge vers T_f. La démonstration s'appuie sur des estimées volumiques fines. Elle reprends les idées développées par Bedford-Smillie ([B-S 91],[B-S 92]), Fornaess-Sibony ([F-S 92],[Si 98]), et Diller [Di

96] qui obtiennent des résultats plus faibles de convergence. Enfin nous étudions précisément la dynamique d'une classe $\mathcal{H}$ d'applications birationnelles polynomiales de $\mathbb{C}^2$. Nous conjecturons que toute application birationnelle polynomiale f de $\mathbb{C}^2$ avec $\lambda_1(f) > 1$ est conjuguée à un élément de cette classe. Toute application de $\mathcal{H}$ se compactifie de manière algébriquement stable soit dans $\mathbb{P}^2$, soit dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, et nous construisons une mesure mélangeante qui lui est associée.

1. Notations, définitions

Dans toute la suite, X désignera un espace multiprojectif complexe, i.e. un produit d'espaces projectifs complexes. Pour simplifier les notations, nous nous limiterons au cas d'un produit de deux espaces $X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Un point x est défini par ses coordonnées homogènes $([z], [w])$ où $[z] = [z_0 : \cdots : z_n]$ et $[w] = [w_0 : \cdots : w_m]$. Une application méromorphe $f : X \to X$ est nécessairement rationnelle puisque X est projective et s'écrit alors

$$f = ([P_0 : \cdots : P_n], [Q_0 : \cdots : Q_m]),$$

où les P_i sont des polynômes bihomogènes de bidegré (α, β) en (z, w) sans facteur commun, et les Q_j sont des polynômes bihomogènes de bidegré (γ, δ) sans facteur commun également. On notera

$$A_f = A := \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$$

la matrice des degrés de f. On associe à f une application $F = (P, Q)$ de $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{m+1}$ dans $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{m+1}$. Si

$$\pi : (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}) \to X$$

est la projection canonique, on a la propriété de commutation $\pi \circ F = f \circ \pi$. On notera $J(F)$ le jacobien de F.

La matrice A étant fixée, l'espace des applications polynomiales $F = (P, Q) = (P_0, \ldots, P_n, Q_0, \ldots, Q_m)$ où les P_i (resp. Q_j) sont des polynômes bihomogènes de bidegré (α, β) (resp. (γ, δ)) en (z, w) s'identifie à $\mathbb{C}^{N_A+1} \times \mathbb{C}^{M_A+1}$ avec

$$\begin{aligned} N_A &= (n+1)\binom{\alpha+n}{n}\binom{\beta+m}{m} - 1, \\ M_A &= (m+1)\binom{\gamma+n}{n}\binom{\delta+m}{m} - 1. \end{aligned}$$

La condition sur les P_i (resp. sur les Q_j) de ne pas avoir de facteurs communs s'exprime comme la non annulation de leur résultant. L'espace Rat_A des applications méromorphes de X dans lui-même de degré exactement A s'identifie donc à un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}^{N_A} \times \mathbb{P}^{M_A}$.

Définition 1.1. *On notera $\mathcal{M}_A$ le sous ensemble de $\mathbb{P}^{N_A} \times \mathbb{P}^{M_A}$ constitué des applications rationnelles de X dans lui même de degrés A qui sont dominantes i.e. génériquement de rang $n + m$.*

Proposition 1.2. *L'ensemble $\mathcal{M}_A$ est vide uniquement dans l'un des cas suivants:*

- $\alpha = \gamma = 0$,
- $\beta = \delta = 0$,

– $\alpha = 0$ *et* $n > m$,
– $\delta = 0$ *et* $n < m$.

On notera $\mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ *l'ensemble des matrices* 2×2 *à coefficients dans* $\mathbb{N}$ *telles qu'aucun de ces cas n'ait lieu. On a* $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N}) \Rightarrow A \cdot B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$.

Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$, *l'ensemble* $\mathcal{M}_A$ *est un ouvert de Zariski dense de* $\mathbb{P}^{N_A} \times \mathbb{P}^{M_A}$. *En particulier* $\mathcal{M}_A$ *est connexe.*

Démonstration. La preuve de la première assertion est élémentaire. Il suffit d'exhiber un exemple d'application dominante dans Rat_A lorsque $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ (voir exemple 1.13 à la fin de cette section). L'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ est clairement stable par multiplication. Pour la dernière assertion, considérons

$$V := \{(x, f) \in X \times \mathrm{Rat}_A \text{ t.q. } \mathrm{rang}(Df_x) \leq n + m - 1\}.$$

Cet ensemble définit un sous-ensemble analytique de $X \times \mathrm{Rat}_A$. Notons π_1 et π_2 les projections de V respectivement sur X et Rat_A. L'application π_2 est propre. Si $x \in X$ est un point fixé, $V_x := \pi_2(\pi_1^{-1}\{x\} \cap V)$, l'ensemble des applications f t.q. $\mathrm{rang}(Df_x) \leq n + m - 1$, est donc un sous-ensemble analytique de Rat_A. L'ensemble des applications non dominantes de Rat_A est exactement $\cap_{x \in X} V_x$, et définit donc un fermé analytique de Rat_A. □

Etant données $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ et $f \in \mathcal{M}_A$, on note $\mathcal{C}_f$ son ensemble critique, le sous-ensemble analytique propre de X défini par l'annulation du jacobien de f dans un système de coordonnées locales.

Proposition 1.3. *Soit* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ *et* $f \in \mathcal{M}_A$.

L'ensemble critique $\mathcal{C}_f$ *est une hypersurface de* X *de bidegré*

$$((n + 1)(\alpha - 1) + (m + 1)\gamma, (n + 1)\beta + (m + 1)(\delta - 1)).$$

Si $\det A \neq 0$, $\mathcal{C}_f$ *est donné par*

$$\mathcal{C}_f = \{([z], [w]) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \ / \ J(F)(z, w) = 0\}.$$

Démonstration.

Par 1.2, l'ouvert de Zariski $\mathcal{M}_A$ est connexe donc le bidegré de $J(f)$ qui dépend continument de f est constant dans $\mathcal{M}_A$. Il suffit de le calculer sur des applications monomiales pour obtenir la valeur annoncée (voir exemple 1.13).

Considérons l'application monomiale de $\mathbb{C}^2$ dans lui-même définie par $H(x, y) := (x^\alpha y^\beta, x^\gamma y^\delta)$. Fixons $p_0 \in X$ et des trivialisations locales de π dans des voisinages respectivement U de p_0 et V de $f(p_0)$. L'application F se réécrit dans ces cartes $F : U \times (\mathbb{C}^*)^2 \to V \times (\mathbb{C}^*)^2$ sous la forme $F(p, x, y) = (f(p), \psi(p)H(x, y))$ où ψ est une fonction holomorphe de U dans $\mathbb{C}^*$. On en déduit que pour tout (x, y) fixé, $J(F)(p, x, y)/J(f)(p) = \psi(p) \cdot J_H(x, y)$ est une fonction qui ne s'annule pas dans U, ce qui donne l'égalité $\mathcal{C}_f = \{([z], [w]) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \ / \ J(F)(z, w) = 0\}$. □

La cohomologie des espaces multiprojectifs est très simple à décrire. Le second groupe de de Rham à coefficients dans $\mathbb{R}$ est égal a $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ qui dans le cas d'un biproduit est isomorphe à $\mathbb{R}^2$. En particulier, tout courant positif fermé T de bidegré $(1, 1)$ sur X est cohomologue à $a\omega_1 + b\omega_2$ avec $a = \int_X T \wedge \omega_1^{n-1} \wedge \omega_2^m$ et $b = \int_X T \wedge \omega_1^n \wedge \omega_2^{m-1}$, où ω_1 (resp. ω_2) désigne le pull-back de la forme de Fubini-Study de $\mathbb{P}^n$ (resp. $\mathbb{P}^m$) par la projection sur le premier (resp. second) facteur. Notons que $\omega_1^j \equiv 0$ si $j \geq n+1$ (resp. $\omega_2^j \equiv 0$ si $j \geq m+1$) et $\int_X \omega_1^n \wedge \omega_2^m = 1$.

On notera $\omega := \omega_1 + \omega_2$ la forme de Kähler sur X par rapport à laquelle nous calculerons les masses des courants positifs dans la suite de cet article.

Définition 1.4. *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ et $f = ([P],[Q]) \in \mathcal{M}_A$.*

L'ensemble d'indétermination de f est $I_f = I_P \cup I_Q$ avec

$$\begin{aligned} I_P &= \{([z],[w]) \in X \text{ t.q. } P_i(z,w) = 0 \text{ pour } i = 0, \cdots, n\}, \\ I_Q &= \{([z],[w]) \in X \text{ t.q. } Q_j(z,w) = 0 \text{ pour } j = 0, \cdots, m\}. \end{aligned}$$

Un point d'indétermination x sera dit du second type si $x \in I_P \cap I_Q$; $x \in I_f$ sera dit simple s'il n'est pas du second type.

On notera $E_f := \overline{\cup_{k\in\mathbb{N}} I_{f^k}}$ l'adhérence de l'ensemble des points d'indétermination des itérés de f.

L'ensemble analytique I_f est toujours de codimension au moins 2 dans X puisque les P_i (resp. Q_j) sont sans facteur commun.

Proposition 1.5.

1. *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ et $f \in \mathcal{M}_A$. Alors I_P est non vide sauf si $\beta = 0$ et $[z] \to [P(z)]$ est holomorphe dans $\mathbb{P}^n$ ou si $\alpha = 0$, $m = n$ et $[w] \to [P(w)]$ est holomorphe dans $\mathbb{P}^n$.*
2. *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$. L'ensemble $\{f \in \mathcal{M}_A \text{ t.q. } I_P \cap I_Q = \emptyset\}$ est un ouvert de Zariski dense de $\mathbb{P}^{N_A} \times \mathbb{P}^{M_A}$.*

Démonstration.

1. L'ensemble I_P est l'intersection des $n+1$ hypersurfaces $\{P_j = 0\}$. Elles sont toutes de bidegré (α, β), donc le courant d'intégration sur $\{P_j = 0\}$, que l'on note $[P_j = 0]$ est cohomologue à $\alpha\omega_1 + \beta\omega_2$. Si I_P est vide le courant $S := [P_0 = 0] \wedge \ldots \wedge [P_n = 0]$ est bien défini, identiquement nul, et cohomologue à $(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)^{n+1}$ donc

$$0 = \int_X S \wedge \omega_2^{m-1} = \int_X (\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)^{n+1} \wedge \omega_2^{m-1} = n\alpha^n\beta.$$

Si $\beta = 0$, P_j est alors indépendant de w et I_P est vide ssi $[z] \in \mathbb{P}^n \to [P(z)] \in \mathbb{P}^n$ est holomorphe. Si $\alpha = 0$, nécessairement $m \geq n$ car f est dominante. Or l'intersection de $n+1$ hypersurfaces de $\mathbb{P}^m$ ne peut être vide que si $m \leq n$ (théorème de Bezout), donc $m = n$ et $[w] \in \mathbb{P}^n \to [P(w)] \in \mathbb{P}^n$ doit être holomorphe.

2. Soit $\Sigma' = \{(f,x) \in (\mathbb{P}^{N_A} \times \mathbb{P}^{M_A}) \times X \text{ t.q. } P(x) = Q(x) = 0\}$ et $\Sigma = p(\Sigma')$ où $p : (\mathbb{P}^{N_A} \times \mathbb{P}^{M_A}) \times X \to \mathbb{P}^{N_A} \times \mathbb{P}^{M_A}$ désigne la projection holomorphe propre sur le premier facteur. Le théorème de Remmert assure que Σ est un sous-ensemble analytique de $\mathbb{P}^{N_A} \times \mathbb{P}^{M_A}$. L'ensemble $\{f \in \mathcal{M}_A \,/\, I_P \cap I_Q = \emptyset\} = \mathcal{M}_A \setminus \Sigma$ est donc un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}^{N_A} \times \mathbb{P}^{M_A}$ qui n'est pas vide comme le montre l'exemple 1.13. $\square$

Remarque 1.6. *Il découle de i) que les seules applications holomorphes dominantes de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ dans lui même sont du type $([z],[w]) \mapsto ([P(z)],[Q(w)])$ avec P et Q holomorphes, ou du type $([z],[w]) \mapsto ([P(w)],[Q(z)])$ avec P et Q holomorphes, lorsque de plus $n = m$.*

Remarque 1.7. *En général, f^2 aura des points d'indétermination du second type même si f n'en a pas. Cette information est cependant précieuse, par exemple pour déterminer le degré topologique de f (voir proposition 4.7).*

Si A, $B \in M_2(\mathbb{N})$, on notera $A \leq B$ si tous les coefficients de A sont plus petits que ceux de B.

Proposition 1.8. *Soit $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$, $f \in \mathcal{M}_A$ et $g \in \mathcal{M}_B$.*

Alors $f \circ g \in \mathcal{M}_C$, où $C \leq B \cdot A$ avec égalité ssi il n'existe pas d'hypersurface V de X t.q. $g(V \setminus I_g) \subset I_f$.

Démonstration.

Si f et g sont dominantes, leur composition $f \circ g$ l'est aussi. Notons $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ la matrice des degrés de $f \circ g$, et soit F et G des relèvements de f et g dans $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{m+1}$. On vérifie que $(P^1, Q^1) := F \circ G$ a des degrés d'homogénéité donnés par la matrice

$$B.A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \beta_1 & \delta_1 \end{bmatrix}.$$

Si les P_i^1 (resp. Q_j^1) n'ont pas de facteur commun alors (P^1, Q^1) est un relèvement de $f \circ g$ et $C = B \cdot A$. Sinon $C < B \cdot A$ et quitte à permuter les deux facteurs $\mathbb{P}^n$ et $\mathbb{P}^m$, on peut supposer que les P_i^1 ont un facteur commun R; mais alors $g(\pi(R^{-1}(0)) \setminus I_g) \subset I_P \subset I_f$.

Réciproquement, soit V est une hypersurface irréductible de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, son image par g est un ensemble analytique irréductible, l'hypothèse $g(V \setminus I_g) \subset I_f$ se traduit donc par $g(V \setminus I_g) \subset I_P$ ou bien $g(V \setminus I_g) \subset I_Q$. Si $g(V \setminus I_g) \subset I_P$, alors ${P^1}_{|\pi^{-1}(V)} \equiv 0$ donc les composantes de P^1 ont un facteur commun définissant l'équation de V et le bidegré de la première composante de $f \circ g$ est strictement plus petit que (α_1, β_1). De même, si $g(V \setminus I_g) \subset I_Q$ le bidegré de la deuxième composante de $f \circ g$ est strictement plus petit que (γ_1, δ_1). □

Définition 1.9. *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$. On dit que $f \in \mathcal{M}_A$ est algébriquement stable s'il n'existe pas d'entier $k \geq 1$ ni d'hypersurface V tels que $f^k(V \setminus I_{f^k}) \subset I_f$.*

Il résulte de la proposition précédente que f est algébriquement stable ssi pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k \in \mathcal{M}_{A^k}$. Si F est un relèvement de f dans $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{m+1}$, alors $F^k = (P_k; Q_k)$ est un relèvement de f^k.

Proposition 1.10. *Les applications non algébriquement stables de $\mathcal{M}_A$ sont contenues dans une réunion dénombrable de sous-ensembles analytiques propres de $\mathcal{M}_A$.*

Démonstration.

Soit $\mathcal{H}_a$ l'ensemble des hypersurfaces de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ de bidegré $a = (a_1, a_2)$ fixé. C'est également le projectivisé de l'ensemble des polynômes bihomogènes de bidegré (a_1, a_2) en $(z, w) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{m+1}$; il s'identifie à un espace projectif $\mathbb{P}^{K_a}$ avec

$$K_a = \binom{a_1 + n}{n} \binom{a_2 + m}{m} - 1.$$

Soit

$$\begin{aligned}\mathcal{P}'_{k,a} &:= \left\{(f,V) \in (\mathbb{P}^{N_A}\times\mathbb{P}^{M_A})\times\mathbb{P}^{K_a} \,/\, P_k(V)=0\right\},\\ \mathcal{Q}'_{k,a} &:= \left\{(f,V) \in (\mathbb{P}^{N_A}\times\mathbb{P}^{M_A})\times\mathbb{P}^{K_a} \,/\, Q_k(V)=0\right\}.\end{aligned}$$

Ce sont des sous-ensembles analytiques de $(\mathbb{P}^{N_A}\times\mathbb{P}^{M_A})\times\mathbb{P}^{K_a}$ et leur projection sur $\mathbb{P}^{N_A}\times\mathbb{P}^{M_A}$, $\mathcal{P}_{k,a}$ et $\mathcal{Q}_{k,a}$, sont des sous-ensembles analytiques propres de $\mathbb{P}^{N_A}\times\mathbb{P}^{M_A}$. L'ensemble des applications non algébriquement stables de $\mathcal{M}_A$ est contenu dans $\bigcup_{k,a}\mathcal{P}_{k,a}\cup\mathcal{Q}_{k,a}$. Comme précédemment, l'exemple 1.13 montre que cet ouvert n'est pas vide. □

Définition 1.11. *Soit $f\in\mathcal{M}_A$ une application algébriquement stable.*

- *Un point x est dans $\mathcal{F}(f)$ l'ensemble de Fatou de f s'il existe un voisinage U de x tel que la famille $(f|_U)^k$ soit équicontinue. L'ensemble de Julia, noté $J(f)$, est le complémentaire de l'ensemble de Fatou.*
- *Un point est dit normal s'il existe un voisinage U de x et un voisinage V de I_f tels qu'on ait $f^j(U)\cap V=\emptyset$ pour tout $j\in\mathbb{N}$. On note $\mathcal{N}_f$ l'ensemble des points normaux de f.*
- *Enfin f est normale si $\mathcal{N}_f = X\setminus E_f$.*

Il résulte des définitions précédentes que $\mathcal{F}(f)$ est un ouvert disjoint de E_f et que $\mathcal{N}_f$ est un ouvert de $X\setminus E_f$.

Terminons cette section introductive par quelques exemples.

Exemples 1.12.

1. Soit $f:(z_1;w_1)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to(U(z_1,w_1);V(z_1,w_1))\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ où U et V sont des polynômes tels que $deg_{z_1}U=\alpha$, $deg_{w_1}U=\beta$, $deg_{z_1}V=\gamma$ et $deg_{w_1}V=\delta$. Alors f s'étend en une application rationnelle $\tilde f$ de $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$

$$\tilde f([z],[w]) = \Big([z_0^\alpha w_0^\beta : z_0^\alpha w_0^\beta U(z_1/z_0,w_1/w_0)],[z_0^\gamma w_0^\delta : z_0^\gamma w_0^\delta V(z_1/z_0,w_1/w_0)]\Big)$$

dont la matrice de degrés est

$$A=\begin{bmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{bmatrix}.$$

On vérifie aisément que $\tilde f$ est algébriquement stable ssi le degré (total) de U est égal à $\alpha+\beta$ et celui de V est égal à $\gamma+\delta$.

2. L'éclatement de $\mathbb{C}^2$ en 0: $f(z,w)=(w,zw)$ s'étend en

$$\tilde f([z],[w]) = ([w_0:w_1],[z_0w_0:z_1w_1]).$$

On a $I_P=\emptyset$, $I_{\tilde f}=I_Q=\{([0:1],[1:0]);([1:0],[0:1])\}$. Les seules courbes contractées par $\tilde f$ sont $\{w_0=0\}$, $\{w_1=0\}$, $\{z_0=0\}$ et $\{z_1=0\}$; elles sont envoyées sur des points fixes qui ne sont pas d'indétermination, donc $\tilde f$ est algébriquement stable et on vérifie que $E_{\tilde f}=I_{\tilde f}$. On vérifie que $\tilde f$ est normale dans $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ (voir section 3). Notons que l'on peut également considérer l'extension méromorphe de f dans $\mathbb{P}^2$, mais l'extension obtenue ne sera pas algébriquement stable !

3. Une application de Hénon $f(z_1, w_1) \in \mathbb{C}^2 \to (w_1, az_1 + w_1^d) \in \mathbb{C}^2$ *s'étend méromorphiquement à* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ *par*

$$\tilde{f}([z],[w]) = ([w_0 : w_1], [z_0 w_0^d : a z_1 w_0^d + z_0 w_1^d]).$$

On a $A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d \end{bmatrix}$, $I_P = \emptyset$, $I_f = I_Q = \{([0,1],[0,1])\}$. *L'application* $\tilde{f}$ *contracte l'hypersurface* $\{w_0 = 0\}$ *sur le point* $([0,1],[0,1]) \in I_{\tilde{f}}$ *donc* $\tilde{f}$ *n'est pas algébriquement stable.*

Exemples 1.13. *Soit* a, a', b, $b' \in \mathbb{C}$ *et considérons l'application rationnelle* $\tilde{f}$, *extension à* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ *de l'application polynomiale:*

$$f(z,w) = ((z-a)^\alpha (w-b)^\beta, (z-a')^\gamma (w-b')^\delta).$$

La matrice des degrés de $\tilde{f}$ *est donnée par*

$$A_{\tilde{f}} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}.$$

On vérifie aisément les propriétés suivantes:

1. $\tilde{f}$ *est toujours algébriquement stable;*
2. *tous les points de* $I_{\tilde{f}}$ *sont simples dès que* $b \neq b'$ *et* $a \neq a'$;
3. $\tilde{f}$ *est dominante dés que* $\alpha\beta \neq \gamma\delta$, *ou* $\alpha\delta a' b \neq \beta\gamma b' a$, *ou* $b'\beta\gamma \neq b\alpha\delta$, *ou* $a'\alpha\delta \neq a\beta\gamma$.

Cet exemple conclut en particulier les preuves des propositions 1.2, 1.5 et 1.10 dans le cas de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Nous laissons au lecteur le soin de généraliser cet exemple au cas de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ pour construire des applications possédant le même type de propriétés.

2. Courant de Green

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ et $f \in \mathcal{M}_A$ une application méromorphe dominante dans $X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Nous allons lui associer un courant positif fermé $T = T_f$ de bidegré $(1,1)$ dans X dont les propriétés sont liées à la dynamique de f. On note $\mathcal{T}(X)$ le cône des courants positifs fermés de bidegré $(1,1)$ sur X.

Rappelons que si $S \in \mathcal{T}(X)$ est cohomologue à $a\omega_1 + b\omega_2$, il existe une unique fonction plurisousharmonique $\varphi \in PSH(\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{m+1})$ telle que

$$\varphi(\lambda z, \mu w) = a \log|\lambda| + b \log|\mu| + \varphi(z,w),\ \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*,$$

avec $\pi^* S = dd^c \varphi$ et $\sup_{|z|=|w|=1} \varphi = 0$; réciproquement la donnée d'une telle fonction φ définit de manière unique un courant $S = \mathcal{L}(\varphi) \in \mathcal{T}(X)$ (voir [G 97] pour une démonstration et des propriétés analogues de représentation des courants sur les variétés homogènes du groupe linéaire). On appelera potentiel de $T \in \mathcal{T}(X)$ toute fonction $\mathcal{L}^{-1}(T) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Avec nos notations, on a $\omega_1 = \mathcal{L}(\log|z|)$ et $\omega_2 = \mathcal{L}(\log|w|)$. La convergence faible des courants est alors équivalente à la convergence de leurs potentiels dans L^1_{loc}.

Soit $F = (P,Q)$ un relèvement de f dans $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{m+1}$ normalisé de telle sorte que $\sup_{|z|=|w|=1} |P| = \sup_{|z|=|w|=1} |Q| = 1$ et soit $S = \mathcal{L}(\varphi) \in \mathcal{T}(X)$. On peut définir $f^*(S) := \mathcal{L}(\varphi \circ F)$. Comme f est dominante, l'image d'un ouvert n'est pas contenue dans un sous-ensemble analytique et l'opération $S \to f^*(S)$ est continue pour la topologie des courants.

Dans toute la suite, f sera de bidegré (α, γ) et (β, δ), et on notera A la matrice des degrés de f. Le réel ρ_+ désignera la plus grande valeur propre de A et ρ_- la plus petite. On a donc

$$\rho_+ = \frac{\alpha + \delta + \sqrt{(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma}}{2}$$

et

$$\rho_- = \frac{\alpha + \delta - \sqrt{(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma}}{2}.$$

Lemme 2.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ avec $\beta\gamma \neq 0$. Alors*

i) *$\rho_+ > 1$ sauf si $\alpha = \delta = 0$ et $\beta = \gamma = 1$;*
ii) *$\rho_+ > |\rho_-|$ sauf si $\alpha = \delta = 0$;*
iii) *il existe un unique vecteur propre (a, b) de A tel que $a > 0, b > 0$ et $a+b = 1$. C'est un vecteur propre associé à ρ_+ et c'est l'unique vecteur propre de A à coordonnées non-négatives -normalisé par $a + b = 1$;*
iv) *il existe $c > 1$ telle que pour tout $v \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ on ait*

$$c^{-1}\rho_+^j\|v\| \leq \|A^j \cdot v\| \leq c\rho_+^j\|v\|.$$

Démonstration. Elle est laissée au lecteur.
On vérifiera que $a = \gamma/(\gamma + \rho_+ - \alpha)$ et $b = (\rho_+ - \alpha)/(\gamma + \rho_+ - \alpha)$. □

Nous ne perdons rien à supposer $\rho_+ > 1$ (l'égalité correspond à des applications linéaires de X dont la dynamique est triviale). Le cas particulier des produits croisés (i.e. $\beta\gamma = 0$) sera traité à la section 6.

Nous avons vu (proposition 1.8) que les degrés des itérés f^j de f sont donnés par A^j si f est algébriquement stable. Il résulte de 1.7 et de 2.1.iv) que la masse de $(f^j)^*\omega/\rho_+^j$ est bornée inférieurement et supérieurement dans ce cas.

Théorème 2.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ avec $\beta\gamma \neq 0$ et $\rho_+ > 1$. Soit $\omega' := a\omega_1 + b\omega_2$, où (a, b) est l'unique vecteur propre positif de A normalisé par $a + b = 1$ (soit $\|\omega'\| := \int_X \omega' \wedge \omega^{n+m-1} = 1$). Soit $f \in \mathcal{M}_A$ une application méromorphe dominante algébriquement stable de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.*

La suite des courants $\rho_+^{-j}(f^j)^*(\omega')$ converge vers un courant positif fermé T de bidegré $(1,1)$ cohomologue à ω' qui vérifie

$$f^*(T) = \rho_+ \cdot T.$$

Si F est un relèvement de f, T admet un potentiel $G \in PSH(\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{m+1})$ qui vérifie

$$\begin{aligned} G(\lambda z, \mu w) &= a \log|\lambda| + b \log|\mu| + G(z, w) \ , \\ G(F(z, w)) &= \rho_+ \cdot G(z, w) \ . \end{aligned}$$

De plus toute fonction v vérifiant ces deux propriétés est telle que $v \leq G$.

Démonstration.

Soit $F = (P, Q)$ un relèvement de f. Les applications P et Q étant définies à une constante multiplicative près, on peut choisir ces constantes de telle sorte que

$$|P(z, w)| \leq |z|^\alpha |w|^\beta \quad \text{et} \quad |Q(z, w)| \leq |z|^\gamma |w|^\delta,$$

d'où en posant $F^j = (P_j, Q_j)$,

$$|P_{j+1}| = |P(P_j, Q_j)| \leq |P_j|^\alpha |Q_j|^\beta \quad \text{et} \quad |Q_{j+1}| \leq |P_j|^\gamma |Q_j|^\delta.$$

Posons $G_j = \rho_+^{-j}[a\log|P_j| + b\log|Q_j|]$; les inégalités précédentes assurent, puisque $A\cdot {}^t(a,b) = \rho_+\cdot {}^t(a,b)$, que G_j est une suite décroissante de fonctions psh. Donc G_j converge vers une fonction G qui est soit psh soit identiquement $-\infty$.

Supposons que $G \not\equiv -\infty$. Puisque f est algébriquement stable, F^j est un relèvement de f^j pour tout j et G_j est donc un potentiel de $\rho_+^{-j}(f^j)^*(\omega')$; cette dernière suite converge donc au sens des courants vers un courant T qui admet G pour potentiel. Puisque $G_j \circ F = \rho_+ \cdot G_{j+1}$ et $G_j(\lambda z, \mu w) = a\log|\lambda| + b\log|\mu| + G_j(z,w)$, on en déduit les relations annoncées pour G qui impliquent que T est cohomologue à ω' et $f^*(T) = \rho_+ \cdot T$.

Montrons qu'on n'a pas $G \equiv -\infty$. Considérons

$$\sigma_p = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\rho_+^j}[a(f^j)^*(\omega_1) + b(f^j)^*(\omega_2)].$$

Alors (σ_p) est une suite bornée de courants positifs fermés de bidegré $(1,1)$; on peut en extraire une sous-suite convergeant vers σ. Il résulte de la définition des σ_p et de la continuité de l'opération f^* (f est dominante) que $f^*(\sigma) = \rho_+ \cdot \sigma$. Soit u un potentiel de σ dans $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{m+1}$; l'égalité précédente implique $\rho_+^{-1}(u \circ F) = u + c'$, où c' est une constante. Soit $v := u + c'(\rho_+ - 1)^{-1} \in PSH(\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{m+1})$, alors $v \circ F = \rho_+ \cdot v$ et on va montrer que v minore G. Comme σ est cohomologue à $\omega' = a\omega_1 + b\omega_2$, on a $v(z,w) \leq a\log|z| + b\log|w| + C$; on en déduit

$$v(z,w) = \frac{1}{\rho_+^j} v \circ F^j(z,w) \leq G_j(z,w) + \frac{C}{\rho_+^j},$$

d'où $v \leq G$ et $G \not\equiv -\infty$. □

Remarque 2.3. *Dans le cas d'un espace multiprojectif ayant $s \geq 3$ facteurs, le théorème de Perron-Frobenius assure que toute matrice de degrés $A \in \mathcal{M}_s(\mathbb{N})$ admet une valeur propre $\rho_+ \geq 1$ qui majore le module de toutes les autres et un vecteur propre à coordonnées non-négatives associé à ρ_+. L'existence du courant de Green se montre alors de la même manière que dans le cas de deux facteurs, lorsque $\rho_+ > 1$.*

Proposition 2.4. *Soit $\mathcal{K}_f$ l'ensemble des courants S positifs fermés de bidegré $(1,1)$ sur $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ tq $f^*(S) = \rho_+ \cdot S$ et $\|S\| = 1$. Alors le courant de Green T est extrémal dans le convexe compact $\mathcal{K}_f$.*

Démonstration.

Soit $S \in \mathcal{K}_f$ qui est cohomologue à $x\omega_1 + y\omega_2$; l'équation $f^*(S) = \rho_+ \cdot S$ implique que (x,y) est un vecteur propre associé à ρ_+ et la normalisation $\|S\| = 1$ entraîne $(x,y) = (a,b)$, i.e. S est cohomologue à T.

Supposons que $T = (T_1 + T_2)/2$ avec $T_i \in \mathcal{K}_f$. On peut choisir des potentiels G_i des T_i tels que $G_i \circ F = \rho_+ \cdot G_i$. La démonstration du théorème précédent montre que l'on a nécessairement $G_i \leq G$. Or G et $G' = (G_1 + G_2)/2$ sont des potentiels de T invariants par rotation, ils diffèrent d'une constante qui doit être nulle puisque $G \circ F = \rho_+ \cdot G$, $G' \circ F = \rho_+ \cdot G'$ et $\rho_+ > 1$. Cela entraîne $G \equiv G_1 \equiv G_2$. □

Exemples 2.5. *Soit f l'application monomiale de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ dans lui même définie par*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\ ([z],[w]) &\mapsto ([z_0^\alpha w_0^\beta : z_1^\alpha w_1^\beta], [z_0^\gamma w_0^\delta : z_1^\gamma w_1^\delta]). \end{aligned}$$

C'est une application algébriquement stable qui est dominante si $\det A \neq 0$. *On peut calculer explicitement les itérés f^j de f (voir section 3 plus loin) On obtient, lorsque $\beta\gamma \neq 0$,*

$$G = \log \max(|z_0|^a |w_0|^b; |z_1|^a |w_1|^b) \text{ avec } a = \gamma/c \text{ et } b = (\rho_+ - \alpha)/c,$$

où $c = \gamma + (\rho_+ - \alpha)$ est telle que $\int (a\omega_1 + b\omega_2) \wedge \omega^{n-m+1} = 1$. Le convexe $\mathcal{K}_f$ sera décrit au paragraphe 3.2.

Théorème 2.6. *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ avec $\beta\gamma \neq 0$ et $\rho_+ > 1$. Soit $f \in \mathcal{M}_A$ une application algébriquement stable. Alors*

i) *Le courant T est à support dans l'ensemble de Julia qui est donc non vide.*
ii) *Pour tout compact F de l'ensemble de normalité $\mathcal{N}$, on a*

$$\forall k \geq 1, \ \ |G_{k+j} - G_j| \leq \frac{C_F}{\rho_+^j} \ \text{ dans } F,$$

et $\mathcal{N} \cap (X \setminus \mathrm{Supp}\, T)$ est contenu dans l'ensemble de Fatou. En particulier la fonction de Green est continue dans $\pi^{-1}(\mathcal{N})$.

Démonstration. Il s'agit d'une adaptation immédiate de la preuve du théorème I.6.5 de [Si 98]. □

Corollaire 2.7. *Si f est normale alors le support de T coïncide avec l'ensemble de Julia J de f qui est donc connexe.*

Démonstration.
Il suffit de remarquer que le complémentaire du support de T est Stein dès que T est cohomologue à $a\omega_1 + b\omega_2$ avec $a, b > 0$. Cela implique que le support de T (et donc J) est connexe. □

Théorème 2.8. *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ avec $\beta\gamma \neq 0$ et $\rho_+ > 1$. Soit $f \in \mathcal{M}_A$ une application algébriquement stable. Alors T ne charge pas les hypersurfaces.*

Démonstration.
Supposons que T donne de la masse à une hypersurface V de X. Le théorème de Siu [S 74] permet de décomposer $T = T_1 + T_2$ où T_1 ne charge pas les hypersurfaces et $T_2 = \sum_k c_k [V_k]$, les V_k étant des hypersurfaces et les c_k des constantes non-négatives non toutes nulles. Le courant $\rho_+^{-1} f^*(T_2)$ est supporté par une réunion d'hypersurfaces de X tandis que $\rho_+^{-1} f^*(T_1)$ se

décompose en $\rho_+^{-1} f^*(T_1) = T_1' + T_2'$ où T_1' ne charge aucune hypersurface et $T_2' = \sum_k c_k'[V_k']$. L'invariance de T entraîne $T_1 = T_1'$ et

$$T_2 = T_2' + \frac{1}{\rho_+} f^*(T_2) \geq \frac{1}{\rho_+} f^*(T_2).$$

On peut itérer cette inégalité et prendre une moyenne de Césaro pour obtenir $T_2 \geq \sigma_p := p^{-1} \sum_{j=1}^p \rho_+^{-j} (f^j)^*(T_2)$. Cette suite de courants est de masse uniformément bornée supérieurement et inférieurement (cf lemme 2.1.iv), si σ est une valeur d'adhérence, elle va vérifier $f^*\sigma = \rho_+\sigma \leq T_2 \leq T$. L'extrémalité du courant T (proposition 2.4) implique $\sigma = c \cdot T$ où c est une constante strictement positive, mais alors $T \leq c^{-1} T_2$ et donc $T_1 \equiv 0$.

Ainsi $T = T_2$ et on obtient la contradiction cherchée en reprenant pas à pas la fin de la démonstration du théorème I.8.1 de [Si 98]. □

3. Applications monomiales

Nous étudions dans cette section la dynamique des applications monomiales de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ définies dans $\mathbb{C}^2$ par

$$f(z, w) = (z^\alpha w^\beta, z^\gamma w^\delta).$$

Une application de ce type est dominante ssi $\det A \neq 0$ (voir Exemple 1.13). On supposera de plus que f n'est ni holomorphe, ni un produit croisé i.e. $\beta\gamma \neq 0$ et $\alpha + \delta \neq 0$. Bien que la dynamique de ces applications soit simple à décrire, elle va nous permettre d'illustrer les concepts que nous développerons par la suite. Lorsqu'on les restreint au tore invariant $\mathbb{T} = \{|z| = |w| = 1\}$, on obtient des endomorphismes linéaires dont la dynamique a été abondamment étudiée (cf e.g. [K-H 95]).

3.1. **Dynamique générale.**

On vérifie que $I_f = \{([0:1],[1:0])\,;\,([1:0],[0:1])\} = E_f$, f est algébriquement stable et possède exactement deux points fixes super-attractifs: $(0,0) = ([1:0],[1:0])$ et $(\infty,\infty) = ([0:1],[0:1])$ dont on note respectivement Ω_0 et Ω_∞ les bassins d'attraction.

Le degré topologique de f est donné par $d_t(f) = |\det A|$, la matrice des degrés de f^j se calcule par récurrence:

$$A^j = \frac{4}{\tau} \begin{bmatrix} (\alpha - \rho_-)\rho_+^j + (\rho_+ - \alpha)(\rho_-)^j & \gamma(\rho_+^j - (\rho_-)^j) \\ \beta(\rho_+^j - (\rho_-)^j) & (\rho_+ - \alpha)\rho_+^j + (\alpha - \rho_-)(\rho_-)^j \end{bmatrix}$$

où $\rho_+ \geq \rho_-$ sont comme précédemment les deux valeurs propres de A et $\tau = \sqrt{(\alpha-\delta)^2 + 4\beta\gamma} > 0$. Notons que $\tau > 0$ équivaut à $\rho_+ > |\rho_-|$. On fixe de plus a, $b \geq 0$, normalisés par la condition $a + b = 1$, t.q. le vecteur (a, b) soit propre pour A de valeur propre associée ρ_+. On a

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \{([z];[w]) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \,/\, |z_0|^a |w_0|^b > |z_1|^a |w_1|^b\}\ , \\ \Omega_\infty &= \{([z];[w]) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \,/\, |z_0|^a |w_0|^b < |z_1|^a |w_1|^b\}\ , \\ J_f &= \{|z_0|^a |w_0|^b = |z_1|^a |w_1|^b\} = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,/\, |z|^a |w|^b = 1\} \cup I_f\ . \end{aligned}$$

Le tore $\mathbb{T} = \{|z| = |w| = 1\}$ est toujours totalement invariant. L'action de f sur $\mathbb{T}$ est linéaire, donné par A, et la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{T}$ est invariante pour f.

La dynamique sur J_f dépend de la valeur de la seconde valeur propre ρ_- de A. Le vecteur $(\rho_+ - \alpha, -\beta)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre ρ_-. Soit $(z,w) \in J_f \setminus I_f$, et posons $f^j(z,w) = (z_j, w_j)$. On vérifie que

$$\begin{aligned} |z_j| &= \left(|z|^{\rho_+ - \alpha}|w|^{-\beta}\right)^{\rho_-^j/\tau}, \\ |w_j| &= \left(|z|^{-\gamma}|w|^{\alpha-\rho_-}\right)^{(\rho_-)^j/\tau}. \end{aligned}$$

Notons que $(\rho_+ - \alpha)(\alpha - \rho_-) = \beta\gamma$, donc $|z_j| = 1 \Leftrightarrow |w_j| = 1$.

1. $|\rho_-| > 1$.
   Le tore $\mathbb{T}$ est un répulseur hyperbolique pour f. On a

   $$\begin{aligned} f^{2j}(z,w) \to_{j\to\infty} (\infty, 0) \quad &\text{si} \quad |z|^{\rho_+-\alpha}|w|^{-\beta} > 1, \\ f^{2j}(z,w) \to_{j\to\infty} (0, \infty) \quad &\text{si} \quad |z|^{\rho_+-\alpha}|w|^{-\beta} < 1. \end{aligned}$$

   En particulier f n'est pas normale. Remarquons que $f^2|_{J_f}$ se prolonge continument en une application de J_f dans lui même pour laquelle chacun des deux points d'indétermination devient un point fixe attractif. La mesure λ est mélangeante et d'entropie maximale $h_\lambda(f) = |\det A|$. Les préimages d'un point algébriquement stable s'équidistribuent selon λ. Plus précisément, pour tout point $a \notin \{zw = 0\}$, on a $d_t^{-j}(f^j)^*\varepsilon_a \to \lambda$.
2. $|\rho_-| = 1$.
   L'ensemble de Julia J_f est feuilleté par des tores $\mathbb{T}_c = \{|z|^a|w|^b = c|z|^{\rho_+-\alpha}|w|^{-\beta} = 1\}$ invariants (pour f si $\rho_- = 1$, pour f^2 si $\rho_- = -1$). L'application f est normale.
3. $0 < |\rho_-| < 1$.
   On a pour tout point $(z,w) \in J_f$, $f^j(z,w) \to \mathbb{T}$. On en déduit que $\mathbb{T}$ un ensemble hyperbolique selle. Les variétés stables de $\mathbb{T}$, données par $z^a w^b = \exp(i\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, feuillètent J_f. Les variétés instables de $\mathbb{T}$ sont données par $z^{\rho_+-\alpha}w^{-\beta} = \exp(i\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$ et feuillètent la variété réelle $J^- = \{|z|^{\rho_+-\alpha}|w|^{-\beta} = 1\}$.
   La mesure de Lebesgue sur le tore λ est mélangeante. Elle est d'entropie maximale $h_\lambda(f) = \log|\rho_+|$. Remarquons que, pour $a \in J^-$, on a bien $d_t^{-j}(f^j)^*\varepsilon_a \to \lambda$. Sinon

   $$\begin{aligned} d_t^{-2j}(f^{2j})^*\varepsilon_a \to \varepsilon_{(\infty,0)} \ &\text{si} \ |z|^{\rho_+-\alpha}|w|^{-\beta} > 1; \\ d_t^{-2j}(f^{2j})^*\varepsilon_a \to \varepsilon_{(0,\infty)} \ &\text{si} \ |z|^{\rho_+-\alpha}|w|^{-\beta} < 1. \end{aligned}$$

   Enfin, notons que l'application f est normale.

3.2. **Courants invariants.**

La fonction de Green définie par le théorème 2.2 se calcule explicitement

$$G = \log\max(|z_0|^a|w_0|^b; |z_1|^a|w_1|^b) .$$

En particulier G définit une fonction psh continue dans $\mathbb{C}^2$. Notons $T = \mathcal{L}(G)$ le courant de Green de f. Dans tous les cas Supp T coïncide avec l'ensemble de Julia J_f.

Remarque 3.1. *Dans le premier des cas mentionnés ci-dessus, la fonction de Green est continue dans $\mathbb{C}^2$ bien que f ne soit pas normale. Les points attirés par I_f le sont à une vitesse négligeable par rapport à ρ_+^j. Ce phénomène sera observé de manière plus générale à la section 5.*

Les fonctions $G_0 = \log(|z_0|^a|w_0|^b)$ et $G_1 = \log(|z_1|^a|w_1|^b)$ vérifient également l'équation fonctionnelle $G_i \circ F = \rho_+ \cdot G_i$. On note $T_i = \mathcal{L}(G_i)$ les courants de $\mathcal{T}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ correspondants.

Théorème 3.2.

Les courants T, T_0, T_1 sont les points extrémaux du convexe compact

$$\mathcal{K}_f : = \left\{ S \in \mathcal{T}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \,/\, f^*S = \rho_+ \cdot S \text{ et } \|S\| = 1 \right\}.$$

Autrement dit, tout courant positif fermé S de bidegré $(1,1)$ sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ qui vérifie $f^*S = \rho_+ \cdot S$ est combinaison linéaire à coefficients non-négatifs de ces trois courants.

Démonstration.

Soit $S \in \mathcal{K}_f$ et φ un potentiel associé dans $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ t.q. $\varphi \circ F = \rho_+ \cdot \varphi$. On ne perd rien à supposer S extrémal. Supposons que $\nu(S, ([1:0],[1:0])) = t > 0$, où $\nu(S,p)$ désigne le nombre de Lelong de S au point p. On a toujours l'inégalité $\nu(f^*S,p) \geq \nu(S, f(p))$. Si $p \in \{z_1 w_1 = 0\}$, $f(p) = ([1:0],[1:0])$, et donc $\nu(S,p) \geq \rho_+^{-1}\nu(S,([1:0],[1:0])) > 0$. Donc S charge $\{z_1 = 0\}$ et $\{w_1 = 0\}$. L'extrémalité et l'invariance de S assurent alors que $S = T_1$. On obtiendra de même $S = T_0$ si $\nu(S,([0:1],[0:1])) > 0$.

On suppose à présent que ces deux nombres de Lelong sont nuls. On note φ_0 la restriction de φ dans la carte $\{z_0 = w_0 = 1\} \simeq \mathbb{C}^2$, i.e. $\varphi_0(z,w) = \varphi(1,z,1,w)$. Soit $\Delta^2 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,/\, |z|,|w| < 1\}$, clairement $\Delta^2 \subset \Omega_0$. On va prouver, par des arguments d'estimées volumiques, que φ_0 est nulle dans Δ^2. L'équation fonctionnelle $\varphi_0 \circ f = \rho_+ \cdot \varphi_0$ implique alors que $\varphi_0 \equiv 0$ dans le bassin d'attraction Ω_0 de l'origine. En considérant $\varphi_1(z,w) = \varphi(z,1,w,1)$ la restriction de φ dans la carte $\{z_1 = w_1 = 1\}$, un raisonnement similaire donne $\varphi_1 \equiv 0$ dans Ω_∞ puisque $\nu(S,([0:1],[0:1])) = 0$. On conclut grâce à la bihomogénéïté de φ que $\varphi \equiv G$, d'où $S = T$.

Rappelons que $\varphi \leq G$ dans $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ puisque φ vérifie l'équation fonctionnelle $\varphi \circ f = \rho_+ \cdot \varphi$ et φ a la même bihomogénéïté que G (cf théorème 2.2). On a donc $\varphi_0(z,w) \leq 0 = G(1,z,1,w)$ dans $\Delta^2 \subset \Omega_0$. Notons pour tout $t > 0$, $E_t = \{(z,w) \in \Delta^2, \varphi(z,w) < -t\}$. On veut donc montrer que $\mathrm{Vol}(E_t) = 0$ pour tout $t > 0$. Remarquons tout d'abord que $\nu(S,p) = 0$ pour tout $p \in \Delta^2$. En effet, l'ensemble critique $\{zw = 0\}$ de f est totalement invariant, et si $p \notin \{zw = 0\}$, l'invariance des nombres de Lelong par biholomorphisme donne pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\nu(S,p) &= \rho_+^{-n}\nu((f^*)^n S, p) \\
&= \rho_+^{-n}\nu(S, f^n(p)) \\
&\leq \rho_+^{-n}\sup\{\nu(S,Z), Z \in \Delta^2\} \to_{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Enfin il existe une constante $C_f > 0$ t.q. $\nu(f^*S, p) \leq C_f \times \nu(S, f(p))$ (cf [Fa 98] ou [Ki 98]). Lorsque $p \in \{zw = 0\}$, on a donc $\nu(S, p) = \rho_+^{-1}\nu(f^*S, p) \leq C \times \nu(S, 0) = 0$.

On utilise alors l'estimation suivante de théorie du pluripotentiel du à Kiselman (voir [Ki 98]):

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists C_\varepsilon > 0 \text{ t.q. } \forall t > 0, \quad \mathrm{Vol}(E_t) \leq C_\varepsilon \exp(-t/\varepsilon)\ , \tag{2}$$

ainsi que le lemme suivant.

Lemme 3.3. *Soit $E \subset \Delta^2$ un borélien.*

- *Si $\alpha + \gamma \neq \beta + \delta$, il existe des constantes C_1, $C_2 > 0$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathit{Vol}(f^n(E)) \geq (C_1\ \mathit{Vol}(E))^{C_2\rho_+^n}\ . \tag{3}$$

- *Si $\alpha + \gamma = \beta + \delta$, il existe des constantes C_1, $C_2 > 0$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathit{Vol}(f^n(E)) \geq (C_1 T)^{C_2\rho_+^n}\ , \tag{4}$$

avec $1 > T > 0$ determiné par la relation $-T\log T = \mathit{Vol}(E)$.

Achevons la démonstration du théorème munis de ces estimations. L'invariance de φ assure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^n(E_t) \subset E_{t\rho_+^n}$. On en déduit, pour $t > 0$ fixé:

$$\begin{aligned} C_\varepsilon \exp(-t\rho_+^n/\varepsilon) &\geq \mathrm{Vol}(E_{t\rho_+^n}) \\ &\geq \mathrm{Vol}(f^n(E_t)) \\ &\geq (C_1 x(E_t))^{C_2\rho_+^n}\ , \end{aligned}$$

avec $x(E_t) = \mathrm{Vol}(E_t)$ dans le cas $\alpha + \beta \neq \gamma + \delta$, et $x(E_t) = T$ défini par la relation $-T\log T = \mathrm{Vol}(E_t)$ sinon. Dans les deux cas, on a $x(E_t) = 0$ ssi $\mathrm{Vol}(E_t) = 0$. Si l'on choisit $\varepsilon \ll 1$ assez petit, la comparaison des croissances, lorsque n tend vers l'infini, implique $\mathrm{Vol}(E_t) = 0$, ce qui termine la démonstration. $\square$

Démonstration du lemme 3.3:
Dans le cours de la preuve nous aurons besoin du lemme suivant, dont nous laissons la preuve au lecteur.

Lemme 3.4. *Fixons a, $b > 0$, $R > 0$ et $t > 0$. Notons $\tau = a/b$, et $V_R(a, b, t) = \mathit{Vol}\left(\{|z| < R,\ |w| < R,\ |z|^a|w|^b < t\}\right)$. On a alors*

- *Si $\tau \neq 1$,*

$$V_R(a, b, t) = \frac{\pi^2}{1 - \tau^{-1}} R^{2(1-\tau^{-1})} t^{2/a} + \frac{\pi^2}{1 - \tau} R^{2(1-\tau)} t^{2/b}\ ;$$

- *si $\tau = 1$ $(a = b)$,*

$$V_R(a, a, t) = \pi^2 t^{2/a} \left(1 + \log(R^4/t^{2/a})\right)\ .$$

Soit $E \subset \Delta^2$ un borélien et $n \in \mathbb{N}$. On note λ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{C}^2$, Jf le déterminant jacobien de f et $f^n(z,w) = (z^{\alpha_n}w^{\beta_n}, z^{\gamma_n}w^{\delta_n})$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(f^n(E)) &= \int_{f^n(E)} d\lambda \geq d_t^{-n} \int_E |Jf^n|^2 d\lambda \\
&= d_t^{-n} \int_0^\infty \lambda\left(E \cap \{|Jf^n|^2 > t\}\right) dt \\
&\geq d_t^{-n} \int_0^{T_0} \mathrm{Vol}(E) - \lambda\left(E \cap \{|Jf^n|^2 \leq t\}\right) dt \\
&\geq d_t^{-n} \int_0^{T_0} \mathrm{Vol}(E) - \lambda\left(\{|Jf^n|^2 \leq t\}\right) dt\ ,
\end{aligned}$$

où $T_0 > 0$ sera choisi ultérieurement de sorte que $\mathrm{Vol}(E) \simeq \lambda\{|Jf^n|^2 \leq T_0\}$. Il nous faut à présent majorer $\lambda(\{|Jf^n|^2 \leq t\})$. Un calcul immédiat donne

$$Jf^n(z,w) = (\det A)^n \times z^{\alpha_n+\gamma_n-1}w^{\beta_n+\delta_n-1}\ .$$

Donc

$$\lambda\{|Jf^n|^2 \leq t\} = V_1(\alpha_n+\gamma_n-1, \beta_n+\delta_n-1, \sqrt{t}/|\det A|^n).$$

On peut donc estimer $\lambda\{|Jf^n|^2 \leq t\}$ grâce au lemme 3.4. Comme on travaille dans Δ^2, il suffit d'estimer $\lambda\{|Jf^n|^2 \leq t\}$ pour $t/|\det A|^{2n} < 1$.

Fixons $D_2 > 0$ telle que $\max\{\alpha_n+\gamma_n-1, \beta_n+\delta_n-1\} \leq D_2\rho_+^n$ et soit $\tau_n = (\alpha_n+\gamma_n-1)(\beta_n+\delta_n-1)^{-1}$. Deux cas se présentent.

Lorsque $\alpha+\gamma \neq \beta+\delta$, la suite τ_n tend vers une valeur $\tau_\infty \neq 1$, et ne prend jamais la valeur 1. Par 3.4, il existe donc $D_1 > 1$ telle que

$$\lambda\left\{|Jf^n|^2 \leq t\right\} \leq D_1 \left(\frac{t}{|\det A|^{2n}}\right)^{1/D_2\rho_+^n}\ .$$

On choisit maintenant $T_0 > 0$ tel que

$$D_1|\det A|^{-2n/D_2\rho_+^n} T_0^{1/D_2\rho_+^n} = \mathrm{Vol}(E)\ .$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(f^n(E)) &\geq d_t^{-n}\left(T_0\ \mathrm{Vol}(E) - D_1|\det A|^{-2n/D_2\rho_+^n} \int_0^{T_0} t^{1/D_2\rho_+^n}\ dt\right) \\
&= d_t^{-n} T_0 \left(\mathrm{Vol}(E) - \frac{D_1|\det A|^{-2n/D_2\rho_+^n} T_0^{1/D_2\rho_+^n}}{1+1/D_2\rho_+^n}\right) \\
&= d_t^{-n}\ \mathrm{Vol}(E) T_0 \times (D_2\rho_+^n+1)^{-1} \\
&= \frac{|\det A|^n \mathrm{Vol}(E)}{1+D_2\rho_+^n}\left(\frac{\mathrm{Vol}(E)}{D_1}\right)^{D_2\rho_+^n} \\
&\geq \left(\frac{\mathrm{Vol}(E)}{D_1'}\right)^{D_2'\rho_+^n},
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'estimée 3.

Lorsque $\alpha+\gamma = \beta+\delta$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tau_n = 1$. On notera dans la suite $g(u) := -\pi^2 u \log(u/e)$. La fonction g est positive sur $[0,1]$ et strictement croissante. Par 3.4, on a

$$\lambda\{|Jf^n|^2 \leq t\} \leq g\left((t/|\det A|^{2n})^{1/D_2\rho_+^n}\right) .$$

On fixe alors $T_0 > 0$ tel que $D_1 g((T_0/|\det A|^{2n})^{1/D_2\rho_+^n}) = \mathrm{Vol}(E)$. On obtient de manière analogue au cas précédent

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(f^n(E)) &\geq d_t^{-n}\left(T_0\ \mathrm{Vol}(E) - \int_0^{T_0} D_1 g((t/|\det A|^{2n})^{1/D_2\rho_+^n})\ dt\right)\\ &\geq C d_t^{-n}\ \mathrm{Vol}(E) T_0 \times \frac{1}{\rho_+^n + 1} .\end{aligned}$$

Si $T_1 > 0$ est défini par l'équation $-\pi^2 D_1 T_1 \log(T_1/e) = \mathrm{Vol}(E)$, on a

$$T_0 = T_1^{D_2\rho_+^n} |\det A|^{2n}.$$

Si $T > 0$ est solution de $-T \log T = \mathrm{Vol}(E)$, on a donc pour un choix adéquat de $C_1 > 0$,

$$\mathrm{Vol}(f^n(E)) \geq (C_1 T)^{D_2' \rho_+^n},$$

ce qui conclut la preuve de 3.3. □

4. Mesure limite dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

4.1. Degrés dynamiques.

Soit $g : X \to X$ une application méromorphe dominante sur une variété projective X. L'application g induit une application linéaire sur le sous-espace de $H^{l,l}(X)$ engendré par les cycles analytiques de dimension l (cf [F 91]). On note $\varrho_l(g)$ le rayon spectral de cette application linéaire. Si $f : X \to X$ est une autre application méromorphe dominante, on vérifie (cf lemma 3 p.364 [F 91], voir également lemma 4.6 p.916 [R-S 97]) que

$$\varrho_l(g \circ f) \leq \varrho_l(f) \cdot \varrho_l(g) . \tag{5}$$

En particulier la suite $\{\varrho_l(g^j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ est sous-multiplicative, donc la suite $(\varrho_l(g^j))^{1/j}$ converge.

Définition 4.1. *Soit $g : X \to X$ une application méromorphe dominante sur une variété projective X et $1 \leq l \leq k = dim_{\mathbb{C}} X$.*

On définit le $l^{ième}$ degré dynamique de g par:

$$\lambda_l(g) : = \lim_{j\to+\infty} \left(\varrho_l(g^j)\right)^{1/j} .$$

Lorsque $l = k = dim_{\mathbb{C}} X$, $\lambda_k(g) (= \varrho_k(g))$ est le degré topologique de f (i.e. le nombre de préimages par f d'un point algébriquement stable) que l'on notera $d_t(f)$.

Exemples 4.2. *Soit $g : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ une application méromorphe dominante et ω_{FS} la forme de Kähler de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^k$. Alors $g^*(\omega_{FS}^l)$ est une forme lisse de bidegré (l,l) bien définie dans $\mathbb{P}^k \setminus I_g$ dont la masse est finie. On note encore $g^*(\omega_{FS}^l)$ son extension triviale à travers I_g, c'est un courant positif fermé de bidegré (l,l) sur $\mathbb{P}^k$ (cf [Sk 82]). La classe de cohomologie du courant $g^*(\omega_{FS}^l)$ est précisément $\varrho_l(g)[\omega_{FS}^l]$. Russakovskii et Shiffman ont établi certaines inégalités entre les différents degrés dynamiques.*

Exemples 4.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ et $f \in \mathcal{M}_A$ une application méromorphe dominante de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. L'application linéaire induite sur l'espace $H^{1,1}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2$ est donnée -dans la base (ω_1, ω_2)- par la matrice A. On a donc $\varrho_1(f) = \rho_+$, et $\lambda_1(f) = \rho_+$ si et seulement si f est algébriquement stable (cf proposition 1.8).*

Lemme 4.4. *Les degrés dynamiques λ_l sont invariants par conjugaison birationnelle.*

Démonstration. Soit $g : X \to X$ une application méromorphe dominante, $\Phi : X \to X$ une application birationnelle et $f := \Phi \circ g \circ \Phi^{-1}$. On a $f^j = \Phi \circ g^j \circ \Phi^{-1}$ donc $\varrho_l(f^j) \leq \varrho_l(\Phi)\varrho_l(\Phi^{-1})\varrho_l(g^j)$ (d'après 5) d'où $\lambda_l(f) \leq \lambda_l(g)$. On obtient l'inégalité inverse en intervertissant les rôles de f et g et en changeant Φ en Φ^{-1}. $\square$

Définition 4.5. *Soit $f : X \to X$ une application méromorphe dominante, et μ une mesure borélienne de masse finie sur X. Soit $V \supset I_f$ le sous-ensemble des points de X en lesquels f n'est pas finie. On définit $f^*\mu$ comme l'extension triviale à travers V de $(f|_{X\setminus V})^*(\mu|_{X\setminus f(V)})$.*

Soit $g : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ une application méromorphe dominante qui vérifie $\lambda_1(g) < d_t(g)$. Russakovski et Shiffman ont montré (theorem 1.1 p.899 [R-S 97]) l'existence d'une mesure de probabilité μ_g sur $\mathbb{P}^2$ et d'un ensemble pluripolaire $\mathcal{E}_g$ de $\mathbb{P}^2$ tels que

$$\frac{1}{(d_t(g))^j}(g^j)^*(\nu) \to \mu_g \ ,$$

pour toute mesure de probabilité ν sur $\mathbb{P}^2$ qui ne charge pas $\mathcal{E}_g$. On peut "transporter" ce résultat dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$:

Théorème 4.6 (Russakovskii-Shiffman)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ et $f \in \mathcal{M}_A$ une application méromorphe dominante de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.*

Si $\lambda_1(f) < d_t(f)$ alors il existe une mesure de probabilité μ_f sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et un ensemble pluripolaire $\mathcal{E}_f$ de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ tels que

$$\frac{1}{(d_t(f))^j}(f^j)^*(\nu) \to \mu_f, \tag{6}$$

pour tout mesure de probabilité ν sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ telle que $\nu(\mathcal{E}_f) = 0$.

Démonstration. Soit $\Phi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ une application birationnelle. On note $\mathcal{C}_\Phi$ (resp. $\mathcal{C}_{\Phi^{-1}}$) son ensemble critique (resp. celui de Φ^{-1}), ainsi $\Phi|_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\setminus\mathcal{C}_\Phi}$ réalise un biholomorphisme de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \mathcal{C}_\Phi$ sur $\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{C}_{\Phi^{-1}}$. Soit $g := \Phi \circ f \circ \Phi^{-1}$. C'est une application méromorphe dominante de $\mathbb{P}^2$, qui satisfait $\lambda_1(g) < d_t(g)$, puisque λ_1 et d_t sont invariants par conjugaison birationnelle (cf lemme 4.4). Le résultat de Russakovskii-Shiffman assure donc l'existence d'une mesure de probabilité μ_g et d'un ensemble pluripolaire $\mathcal{E}_g$ de $\mathbb{P}^2$ tels que l'équation 6 est satisfaite.

Soit $p \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \left(\mathcal{C}_\Phi \cup \Phi^{-1}(\mathcal{E}_g \setminus \mathcal{C}_{\Phi^{-1}})\right)$ et $a = \Phi(p) \in \mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{E}_g$. On note $d_t = d_t(f) = d_t(g)$ le degré topologique de f et g. On déduit de 6 que

$$\frac{1}{d_t^j}(\Phi^{-1} \circ g^j)^*(\varepsilon_p) = \frac{1}{d_t^j}(g^j)^*(\varepsilon_a) \longrightarrow \mu_g,$$

où ε_p désigne la masse de Dirac au point p. Comme $f^j = \Phi^{-1} \circ g^j \circ \Phi$, il s'ensuit, que dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \mathcal{C}_\Phi$

$$\frac{1}{d_t^j}(f^j)^*(\varepsilon_p) = \Phi^* \left(\frac{1}{d_t^j}(\Phi^{-1} \circ g^j)^* \varepsilon_p \right) \longrightarrow \mu_f := \Phi^*(\mu_g) \ .$$

En considérant plusieurs applications birationnelles Φ_i telles que $\cap_i \mathcal{C}_{\Phi_i} = \emptyset$, on en déduit l'existence d'une mesure de probabilité μ_f de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (donnée par $\mu_f = \Phi^*(\mu_g)$ dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \mathcal{C}_\Phi$) et d'un ensemble pluripolaire $\mathcal{E}_f$ de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (tel que $\mathcal{E}_f \setminus \mathcal{C}_\Phi = \Phi^{-1}(\mathcal{E}_g \setminus \mathcal{C}_{\Phi^{-1}})$) qui satisfont les propriétés annoncées. □
Donnons à présent une condition pour que $\lambda_1 < d_t$ soit vérifiée.

Proposition 4.7. *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ et $f \in \mathcal{M}_A$ une application méromorphe dominante de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. On note $d_t(f)$ son degré topologique, i.e. le nombre de préimages par f d'un point algébriquement stable. Alors*

$$\begin{cases} d_t(f) = \alpha\delta + \beta\gamma & si\ I_P \cap I_Q = \emptyset, \\ d_t(f) < \alpha\delta + \beta\gamma & si\ I_P \cap I_Q \neq \emptyset. \end{cases}$$

En particulier $d_t(f) < \rho_+^2$ à moins que $\alpha = \delta = 0$ ou $\alpha = \delta \geq 1$ et $\beta\gamma = 0$.

Démonstration.
Soit $p = (x, y)$ un point algébriquement stable de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et $\varepsilon_p = \omega_1^x \wedge \omega_2^y$ la masse de Dirac au point p ; le degré topologique de f est égal à la masse de la mesure $f^*(\varepsilon_p)$ dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Cette mesure est égale à la mesure $f^*(\omega_1^x) \wedge f^*(\omega_2^y)$ dans $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \setminus I_f$, mais il se peut que cette dernière charge I_f. En fait elle charge précisément les points d'indétermination du second type $I_P \cap I_Q$. Comme ω_1^x (resp. ω_2^y) est cohomologue à ω_1 (resp. ω_2), on a

$$d_t(f) \leq \int_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1} f^*(\omega_1^x) \wedge f^*(\omega_2^y) = \int_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1} f^*(\omega_1) \wedge f^*(\omega_2) = \alpha\delta + \beta\gamma,$$

avec égalité si et seulement si $I_P \cap I_Q = \emptyset$. On a donc

$$\rho_+^2 \geq \left((\alpha+\delta)^2 + (\alpha-\delta)^2 + 4\beta\gamma \right)/4 = (\alpha^2+\delta^2)/2 + \beta\gamma \geq \alpha\delta + \beta\gamma \geq d_t(f)$$

avec inégalité stricte à moins que $\alpha = \delta = 0$ (on a alors $d_t(f) = \rho_+^2 = \beta\gamma$) ou $\alpha = \delta \geq 1$ et $\beta\gamma = 0$ (on a alors $d_t(f) = \rho_+^2 = \alpha^2$). □

Remarque 4.8. *Lorsque f est algébriquement stable, on est tenté de construire une mesure dynamiquement intéressante en cherchant à définir $T_f \wedge T_f$. Lorsque $\alpha = \delta = 0$, f est holomorphe et $T_f \wedge T_f$ est une mesure invariante mélangeante (voir paragraphe 6.1). Lorsque f n'est pas holomorphe, la dernière assertion implique qu'une telle mesure serait portée par l'ensemble E_f. Par des méthodes analogues à [Fa 99], on peut en fait prouver que $T_f \wedge T_f$ est à support dans $\cup_{n \in \mathbb{N}} I_{f^n}$.*

Proposition 4.9. *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ et $f \in \mathcal{M}_A$ une application méromorphe dominante algébriquement stable de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ telle que $I_P \cap I_Q = \emptyset$. Alors $d_t(f) > \lambda_1(f)$ sauf dans les situations suivantes:*

1. *f est un produit croisé ($\beta\gamma = 0$) et* $\min(\alpha, \delta) = 1$ *;*
2. *$\alpha\delta = 0$ et $\beta\gamma \leq$* $\max(\alpha, \delta) + 1$ *;*
3. *$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$.*

En particulier si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N}^*)$ est de déterminant non nul, l'ensemble des $f \in \mathcal{M}_A$ telles que $d_t(f) \leq \lambda_1(f)$ est inclus dans une réunion dénombrable d'hypersurfaces de $\mathcal{M}_A$.

Démonstration.
On a $d_t(f) = \alpha\delta + \beta\gamma$ et $\lambda_1(f) = \rho_+ = (\alpha + \delta + \sqrt{(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma})/2$. Si $\alpha, \delta \geq 2$, alors $\alpha\delta \geq \alpha + \delta$ donc

$$d_t(f) \geq \alpha + \delta + \beta\gamma > (\alpha + \delta + \sqrt{(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma})/2.$$

Si $\alpha = 1$ et $\delta \geq 1$,

- soit $\beta\gamma = 0$ alors $d_t(f) = \lambda_1(f) = \delta$;
- soit $\beta = \gamma = \delta = 1$ alors $d_t(f) = \lambda_1(f) = 2$;
- soit $\beta\gamma \geq 2$ (ou $\beta = \gamma = 1$ et $\delta \geq 2$), et $(\delta - 1) + 2\beta\gamma > \sqrt{(\delta - 1)^2 + 4\beta\gamma}$ donc $d_t(f) > \lambda_1(f)$.

Enfin si $\alpha = 0$, on a $d_t(f) = \beta\gamma$ et $\lambda_1(f) = 1/2(d + \sqrt{\delta^2 + 4\beta\gamma})$, et on vérifie que

$$d_t(f) > \lambda_1(f) \Longleftrightarrow \beta\gamma > 1 + \delta.$$

Lorsque $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N}^*)$ est de déterminant non nul, on a donc $d_t(f) > \lambda_1(f)$ dès que f est algébriquement stable avec $I_P \cap I_Q = \emptyset$. La première condition est satisfaite hors d'une réunion dénombrable de sous-ensembles analytiques propres de $\mathcal{M}_A$ (proposition 1.10) et la seconde l'est dans un ouvert de Zariski de $\mathcal{M}_A$ (proposition 1.5.2). $\square$

Exemples 4.10. *Soit $f \in \mathcal{M}_A$ l'application monomiale définie en section 3. Elle est algébriquement stable et dominante ssi* $\det A \neq 0$, *on a alors $d_t(f) = |\alpha\delta - \beta\gamma| = \rho_+ \cdot |\rho_-|$. Dans ce cas l'inégalité $d_t(f) > \lambda_1(f)$ équivaut à $|\rho_-| > 1$ et la mesure limite μ_f est la mesure de Lebesgue sur le tore $\mathbb{T} = \{|z| = |w| = 1\}$.*

On a malheureusement très peu d'informations sur la mesure limite μ_f définie au théorème 4.6. Par exemple on ne sait pas si elle est invariante (au sens $f^*\mu_f = d_t(f) \cdot \mu_f$, cf question 2 p.908 [R-S 97]). L'exemple 4 p.907 de [R-S 97] suggère en effet que le support de μ_f peut contenir des points d'indétermination. Nous exhiberons de tels exemples lorsque nous analyserons le cas des produits croisés (section 6). Dans ce cas, une construction alternative de μ_f nous assurera qu'elle ne charge pas les ensembles pluripolaires, ce qui, grâce à la propriété d'équidistribution du théorème 4.6, impliquera alors que μ_f est mélangeante. En effet, on a le

Lemme 4.11. *Soit $f : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ une application méromorphe dominante algébriquement stable, et soit μ une mesure de probabilité qui ne charge pas les ensembles pluripolaires vérifiant $f^*(\mu) = d_t\mu$ (μ est donc invariante).*

Si μ satisfait (6) alors elle est mélangeante.

Démonstration.
Etant données deux fonctions test χ et θ dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, il s'agit de démontrer que

$$< \theta \cdot \chi \circ f^j, \mu >: = \int \theta \cdot \chi \circ f^j d\mu \longrightarrow \int \chi d\mu \cdot \int \theta \, d\mu.$$

Or

$$\begin{aligned} < \theta \cdot \chi \circ f^j, \mu > &= < \theta, d_t^{-j} (f^j)^* (\chi\mu) > \\ &= < d_t^{-j} (f^j)_*(\theta), \chi\mu >, \end{aligned}$$

et $d_t^{-j}(f^j)_*(\theta)(a) =< d_t^{-j}(f^j)^*(\varepsilon_a), \theta > \to \int \theta d\mu, \forall a \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \mathcal{E}_f$. Comme μ ne charge pas $\mathcal{E}_f$ qui est pluripolaire, on obtient la convergence souhaitée. □

4.2. **Théorie du pluripotentiel des courants pluripositifs.**

Nous allons construire dans l'ensemble de normalité un courant fermé réel (mais non positif) S de bidegré $(1,1)$ qui admet un potentiel v continu et tel que $T \wedge S$ est une mesure positive. Le courant $v \cdot T$ est donc un courant "pluripositif" au sens de [Si 85] et nous allons établir pour ces courants quelques résultats analogues aux propriétés classiques de la théorie du pluripotentiel initiée par Bedford et Taylor [B-T 82]. Bien qu'il s'agisse d'une adaptation immédiate de la théorie telle qu'elle est présentée e.g. dans [De 93], nous en donnons des démonstrations pour la commodité du lecteur ; nous nous restreignons toutefois au contexte qui nous intéresse.

Dans toute la suite de ce paragraphe u désigne une fonction psh dans un ouvert pseudoconvexe Ω de $\mathbb{C}^2$ et v est une fonction semi-continue supérieurement (s.c.s.) qui est localement bornée sur le support de $dd^c u$; le courant $vdd^c u$ est donc bien défini, la mesure $dd^c u \wedge dd^c v := dd^c(vdd^c u)$ également, et on suppose que cette dernière est positive.

Proposition 4.12. *Soit $\varphi \in PSH(\Omega)$ et F, L deux compacts de Ω tels que $F \subset L^\circ$. Alors il existe $C_{F,L} > 0$ indépendante de u et v telle que*

$$\|\varphi dd^c u \wedge dd^c v\|_F \leq C_{F,L} \|\varphi dd^c u\|_L \|v\|_{L^\infty(L \cap Supp\, dd^c u)}.$$

En particulier $dd^c u \wedge dd^c v$ ne charge pas les ensembles pluripolaires si $dd^c u$ ne les charge pas (e.g. si u est localement bornée).

Nous commençons par établir le lemme suivant.

Lemme 4.13. *Soit $u \in PSH(\Omega)$. Soit v_1, v_2 des fonctions s.c.s localement bornées sur le support de $dd^c u$, telles que $dd^c(v_i dd^c u) \geq 0$. Alors $dd^c(\max(v_1, v_2) dd^c u) \geq 0$.*

Démonstration.

On vérifie sans peine que

$$dd^c \max(v_1, v_2) \geq \mathbf{1}_{\{v_1 \geq v_2\}} dd^c v_1 + \mathbf{1}_{\{v_2 > v_1\}} dd^c v_2.$$

Si u est lisse, le courant $dd^c(\max(v_1, v_2) dd^c u)$ est égal à $dd^c \max(v_1, v_2) \wedge dd^c u$. Comme $dd^c u \geq 0$, on déduit de l'inégalité précédente que

$$dd^c(\max(v_1, v_2) dd^c u) \geq \mathbf{1}_{\{v_1 \geq v_2\}} dd^c(v_1 dd^c u) + \mathbf{1}_{\{v_2 > v_1\}} dd^c(v_2 dd^c u) \geq 0.$$

Lorsque u n'est pas lisse, on peut l'approcher par des fonctions u_ε qui sont psh et lisses. Puisque $dd^c u_\varepsilon \to dd^c u$ au sens des mesures de Radon, on a

$\max(v_1, v_2)dd^c u_\varepsilon \to \max(v_1, v_2)dd^c u$ si v_1 et v_2 sont continues, ce qui permet d'établir une inégalité similaire. Enfin si v_1 (resp. v_2) n'est pas continue, on peut l'approximer par une suite décroissante de fonctions continues v_1^j (resp. v_2^j) qui convergent ponctuellement vers v_1 (resp. v_2). Le théorème de la convergence monotone assure que $\max(v_1^j, v_2^j)dd^c u$ converge vers $\max(v_1, v_2)dd^c u$. □

Démonstration de la proposition 4.12:

Pour des raisons techniques on est amené à travailler dans $\mathbb{C}^3$; on note $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\varphi}$ les fonctions obtenues à partir de u, v, φ en ajoutant une coordonnée indépendante, on note $\tilde{F} := F \times \Delta(1)$, $\tilde{L} = L \times \Delta(2)$, et $\tilde{\Omega} = \Omega \times \Delta(3)$.

Quitte à recouvrir $\tilde{F}$ par de petites boules, on peut supposer que $\tilde{F}$ est contenu dans un ouvert strictement pseudoconvexe $\Omega' = \{\psi < 0\} \subset \tilde{L} \subset \tilde{\Omega}$. On ne perd rien à supposer que $\tilde{u}, \tilde{\varphi} \leq -1$ sur $\tilde{L}$ et $\tilde{v} \leq -1$ dans $\tilde{L} \cap \operatorname{Supp} dd^c\tilde{u}$. On peut également normaliser $\tilde{v}$ (en divisant par $\|v\|_{L^\infty}$) pour se ramener à $-2 \leq \tilde{v} \leq -1$. Soit alors $V := \max(\tilde{v}, A\psi)$; pour un choix de $A > 0$ assez grand on a $V \equiv \tilde{v}$ sur $F \cap \operatorname{Supp} dd^c\tilde{u}$ et $V \equiv A\psi$ près du bord de Ω'. Le lemme précédent assure par ailleurs que $dd^c(V dd^c\tilde{u}) \geq 0$.

Soit χ une fonction test positive à support compact dans Ω' telle que $\chi \equiv \psi + c$ dans $\Omega'_\delta := \{\psi < -\delta\} \supset \tilde{F}$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_F |\varphi| dd^c(v dd^c u) &\leq C_1 \int_{\Omega'_\delta} |\varphi| dd^c(V dd^c\tilde{u}) \wedge dd^c\psi \\
&= C_1 \int_{\Omega'_\delta} -\varphi dd^c(V dd^c\tilde{u}) \wedge dd^c\chi \\
&= C_1 \int_{\Omega'_\varepsilon} -\chi dd^c(V dd^c\tilde{u}) \wedge dd^c\varphi - C_1 \int_{\Omega'_\varepsilon \setminus \Omega'_\delta} -\varphi dd^c(V dd^c\tilde{u}) \wedge dd^c\chi,
\end{aligned}$$

où $\varepsilon > 0$ est choisi assez petit pour que $\operatorname{Supp}\chi \subset \Omega'_\varepsilon$. Le premier terme est négatif et $V \equiv A\psi$ dans $\Omega'_\varepsilon \setminus \Omega'_\delta$, donc $dd^c(V dd^c\tilde{u}) = A dd^c u \wedge dd^c\psi$ et en majorant $dd^c\chi$ par $C_2\|\chi\|_{\mathcal{C}^2} dd^c\psi$, on obtient

$$\int_F |\varphi| dd^c(v dd^c u) \leq C_3 \cdot A \int_{\Omega'_\varepsilon} |\varphi| dd^c\tilde{u} \wedge (dd^c\psi)^2,$$

d'où le résultat. Lorsque u est localement bornée, les inégalités standard de Chern-Levine-Nirenberg assurent que $dd^c u$ ne charge pas les ensembles pluripolaires (cf [De 93]). □

Proposition 4.14. *Soit (u_j) une suite de fonctions psh dans Ω qui converge vers u dans $L^1_{loc}(\Omega)$. Soit (v_j) une suite de fonctions continues dans Ω qui décroît vers une fonction v, continue dans Ω. Alors*

$$v_j dd^c u_j \to v dd^c u \text{ au sens des courants},$$

et donc $dd^c u_j \wedge dd^c v_j \to dd^c u \wedge dd^c v$.

Démonstration.

Quitte à retrancher une constante, on peut supposer que $v_j, v \leq 0$. Soit θ une forme test positive de bidegré $(1,1)$ dans Ω, il suffit de montrer que $\int_\Omega v_j dd^c u_j \wedge \theta \to \int_\Omega v dd^c u \wedge \theta$. La suite de courants $v_j dd^c u_j$ est de masse localement uniformément bornée dans Ω, soit $R = \lim v_{j_k} dd^c u_{j_k}$ une valeur d'adhérence. On a

$$0 \geq \int_\Omega v_{j_k} dd^c u_{j_k} \wedge \theta \geq \int_\Omega v dd^c u_{j_k} \wedge \theta.$$

Or $dd^c u_{j_k} \wedge \theta$ tend vers $dd^c u \wedge \theta$ au sens des mesures de Radon et v est continue, donc le membre de droite de l'inégalité tend vers $\int_\Omega v dd^c u \wedge \theta$. Ainsi $R \geq v dd^c u$. Réciproquement, on a

$$\int_\Omega v_{j_k} dd^c u_{j_k} \wedge \theta \leq \int_\Omega v_p dd^c u_{j_k} \wedge \theta,$$

pour tout $p \leq j_k$ fixé. Comme v_p est continue, le membre de droite tend vers $\int_\Omega v_p dd^c u \wedge \theta$; le théorème de la convergence monotone assure que ce dernier tend vers $\int_\Omega v dd^c u \wedge \theta$ lorsque $p \to +\infty$. On en déduit $R \leq v dd^c u$. □

4.3. Application à la dynamique dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Nous allons montrer, que sous certaines hypothèses, la mesure μ_f ne charge pas l'ensemble de normalité.

Théorème 4.15. *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ telle que $\alpha \neq \delta$ et $\beta\gamma \neq 0$. Soit $f \in \mathcal{M}_A$ une application méromorphe dominante algébriquement stable de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.*

i) Si $\rho_- > 1$ alors $(\det A)^{-j}(f^j)^*(\omega_1 \wedge \omega_2)$ converge dans l'ensemble de normalité $\mathcal{N}_f$ vers une mesure positive μ qui ne charge pas les ensembles pluripolaires et vérifie $f^*\mu = (\det A) \cdot \mu$. En particulier si $\det A \neq d_t(f)$, soit μ est de masse infinie, soit $\mu \equiv 0$.

ii) Si $\rho_- < -1$ alors $(\det A)^{-j}(f^j)^*(\omega_1 \wedge \omega_2)$ converge vers 0 dans $\mathcal{N}_f$.

Ce théorème, combiné au théorème 4.4 et à la proposition 4.6, a pour corollaire immédiat:

Corollaire 4.16.

Supposons que $\rho_+ < \min\{|\det A|, d_t(f)\}$, $\alpha \neq \delta$ et $\beta\gamma \neq 0$. Alors

$$\mu_f|_{\mathcal{N}_f} = 0 \ . \tag{7}$$

Soit $f \in \mathcal{M}_A$ algébriquement stable avec $I_P \cap I_Q = \emptyset$, $\alpha \neq \delta$ et $\beta\gamma \neq 0$.

- *Si $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$, on a toujours $d_t(f) > \rho_+$, et $d_t(f) = \alpha\delta + \beta\gamma > |\det A|$. Lorsque $|\rho_-| > 1$, l'égalité (7) est vérifiée.*
- *Si $\alpha\delta = 0$, $\det A = -d_t(f) = \rho_+ \cdot \rho_-$. Donc $d_t(f) > \rho_+$ ssi $\rho_- < -1$ et dans ce cas (7) est aussi valide.*

Démonstration.

Soit U un ouvert relativement compact de l'ensemble de normalité $\mathcal{N}_f$. Il existe $C > 1$ telle que pour tout $(z, w) \in U$,

$$C^{-1}|z|^\alpha|w|^\beta \ \leq |P(z,w)| \leq \ |z|^\alpha|w|^\beta \ , \tag{8}$$

$$C^{-1}|z|^\gamma|w|^\delta \ \leq |Q(z,w)| \leq \ |z|^\gamma|w|^\delta \ , \tag{9}$$

où $F = (P, Q)$ désigne un relèvement de f dans $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$. Rappelons que le courant de Green T est cohomologue à $a\omega_1 + b\omega_2$ où (a, b) est un vecteur propre positif associé à la valeur propre ρ_+ de A normalisé de telle sorte que $\int T \wedge (\omega_1 + \omega_2) = 1$. Soit (x, y) un vecteur propre associé à la valeur propre ρ_- de A ; c'est un multiple de $(\gamma, \rho_- - \alpha)$ (et (a, b) est un multiple de $(\gamma, \rho_+ - \alpha))$ donc $ay + bx$ est un multiple de $\gamma(\delta - \alpha)$ que l'on a supposé non nul, on choisit (x, y) de telle sorte que $ay + bx = 1$. Soit

$$v_j(z, w) := \frac{1}{(\rho_-)^j} \left(x \log |P_j(z, w)| + y \log |Q_j(z, w)| \right) .$$

Les inégalités (8) et (9) entraînent

$$\begin{aligned} -\log C + \alpha \log |P_j| + \beta \log |Q_j| \quad &\leq \log |P_{j+1}| \leq \quad \alpha \log |P_j| + \beta \log |Q_j| , \\ -\log C + \gamma \log |P_j| + \delta \log |Q_j| \quad &\leq \log |Q_{j+1}| \leq \quad \gamma \log |P_j| + \delta \log |Q_j| , \end{aligned}$$

et ainsi $\forall (z, w) \in U$,

$$|v_{j+1}(z, w) - v_j(z, w)| \leq \frac{\max(|x|, |y|) \log C}{|\rho_-|^j} .$$

Puisque $|\rho_-| > 1$ on en déduit la convergence uniforme dans U de la suite (v_j) vers une fonction v continue mais non psh (x et y ne sont pas de même signe).

On note $S_j = (\rho_-)^{-j}(f^j)^*(x\omega_1 + y\omega_2)$, ainsi S_j converge au sens des courants vers un courant fermé de bidegré $(1, 1)$ S tel que $\pi^* S = dd^c v$. Soit $T_j := \rho_+^{-j}(f^j)^*(a\omega_1 + b\omega_2)$ la suite de courants positifs fermés qui converge vers le courant de Green T ; $\mu_j := T_j \wedge S_j = (\rho_+\rho_-)^{-j}(ay+bx)(f^j)^*(\omega_1 \wedge \omega_2)$ est une suite de mesures qui converge dans U vers $\mu = S \wedge T$ d'après la proposition 4.14. Si $\rho_- < -1$ on obtient $\mu_{2j} \geq 0$ et $\mu_{2j+1} \leq 0$ donc $S \wedge T \equiv 0$. Si $\rho_- > 1$, μ est une mesure positive dans U et la proposition 4.12 montre qu'elle ne charge pas les ensembles pluripolaires dans U. □

5. Applications polynomiales de $\mathbb{C}^2$

Soit $f : (z, w) \in \mathbb{C}^2 \to (P(z, w), Q(z, w)) \in \mathbb{C}^2$ une application polynomiale de $\mathbb{C}^2$, où P et Q sont des polynômes tels que $\deg_z P = \alpha$, $\deg_w P = \beta$ et $\deg_z Q = \gamma$, $\deg_w Q = \delta$. On note $\mathcal{P}_A$ l'ensemble de ces applications où

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$$

désigne comme d'habitude la matrice des degrés.

On peut considérer l'extension $\tilde{f}$ de f à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et on vérifie aisément que le point $q = ([0 : 1], [0 : 1])$ est un point d'indétermination sur lequel l'une des droites $\{z_0 = 0\}$ ou $\{w_0 = 0\}$ est contractée par $\tilde{f}$ si $\deg P < \alpha + \beta$ ou $\deg Q < \gamma + \delta$. Réciproquement si $\deg P = \alpha + \beta$ et $\deg Q = \gamma + \delta$ alors q est un point fixe de $\tilde{f}$ qui n'est pas d'indétermination. Or les droites $\{z_0 = 0\}$ et $\{w_0 = 0\}$ ne peuvent être contractées que sur q, donc $\tilde{f}$ est algébriquement stable. Notons que $\{f \in \mathcal{P}_A \,/\, \tilde{f}$ non algébriquement stable$\}$ est une hypersurface de $\mathcal{P}_A$.

Proposition 5.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ et $f \in \mathcal{P}_A$ qui s'étend en une application méromorphe algébriquement stable $\tilde{f} \in \mathcal{M}_A$ de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Alors $q = ([0 : 1], [0 : 1])$ est un point fixe superattractif de $\tilde{f}$ à part dans l'un des cas suivants*

1. *$\alpha = \delta = 0$ et $\beta = \gamma = 1$, dans ce cas $\tilde{f}$ est un automorphisme linéaire ;*
2. *$\beta = 0$ et $\alpha = 1$;*

3. $\gamma = 0$ *et* $\delta = 1$.

La preuve est immédiate. Remarquons que les deux derniers cas correspondent à des produits croisés semi-linéaires dont la dynamique se ramène essentiellement à de la dynamique en une variable. Notons également que tout un voisinage de $\{z_0 w_0 = 0\} \setminus I_{\tilde{f}^2}$ est envoyé sur q par $\tilde{f}^2$, lorsque f n'est pas un produit croisé, ce qui implique $E_{\tilde{f}} = I_{\tilde{f}^2}$. Nous verrons à la section 6 que l'ensemble $E_{\tilde{f}}$ peut être beaucoup plus gros dans le cas des produits croisés (cf proposition 6.8).

5.1. **Fonction de Green.**

Comme précédemment, on notera $\rho_+ > 1$ la plus grande valeur propre de A, et (a, b) un vecteur propre à coefficients positifs associé, normalisé par $a + b = 1$. On notera aussi pour $j \in \mathbb{N}$, $f^j = (P^j, Q^j)$. Enfin, on notera dans toute cette partie $\|(z, w)\| := |z| + |w|$ si $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. De même, pour $\zeta \in \mathbb{C}$, $\|\zeta\| := \|(1, \zeta)\| = 1 + |\zeta|$.

Théorème 5.2. *Soit $f \in \mathcal{P}_A$ une application polynomiale dominante de $\mathbb{C}^2$ qui s'étend en une application méromorphe algébriquement stable $\tilde{f}$ de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ qui n'est ni holomorphe ni un produit croisé. Soit $g(z, w) := G_{\tilde{f}}(1, z, 1, w)$ la fonction de Green de f dans $\mathbb{C}^2$ et $\Omega_q := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \ / \ f^j(z, w) \to q = ([0 : 1], [0 : 1])\}$ le bassin d'attraction de q dans $\mathbb{C}^2$. Alors*

$$g(z, w) = \lim_{j \to \infty} \frac{1}{\rho_+^j} \left(a \log \|P^j(z, w)\| + b \log \|Q^j(z, w)\| \right) \geq 0 \ ,$$

et

$$\Omega_q = \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \ / \ g(z, w) > 0 \right\} \ .$$

En particulier la fonction de Green est continue dans $\mathbb{C}^2$.

Démonstration.

Sous les hypothèses du théorème, on peut écrire $f = (P, Q)$ avec $P(z, w) = B_1 z^\alpha w^\beta + O(\|(z, w)\|)^{\alpha+\beta-1})$ et $Q(z, w) = B_2 z^\gamma w^\delta + O(\|(z, w)\|)^{\gamma+\delta-1})$, et $B_1 B_2 \neq 0$. On peut donc trouver $R > 0$ assez grand, et $C > 0$ tels que $\forall (z, w) \in U_R := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2, \ \min\{|z|, |w|\} > R\}$,

$$C^{-1} \|z\|^\alpha \|w\|^\beta \leq \|P(z, w)\| \leq C \|z\|^\alpha \|w\|^\beta \ , \tag{10}$$

$$C^{-1} \|z\|^\gamma \|w\|^\delta \leq \|Q(z, w)\| \leq C \|z\|^\gamma \|w\|^\delta \ . \tag{11}$$

Définissons

$$g^j(z, w) = \frac{1}{\rho_+^j} \left(a \log \|P^j\| + b \log \|Q^j\| \right) + \sum_{k \geq j+1} \rho_+^{-j-1} \log C \ .$$

Les inégalités (10) et (11) impliquent que la suite g^j est décroissante et $|g^{j+1} - g^j| \leq \log C / \rho_+^{j+1}$. On en déduit que g^j converge uniformément vers g dans U_R ; de plus

$$|g - a \log \|z\| - b \log \|w\|| \leq \log C / (\rho_+ - 1) \text{ dans } U_R,$$

donc $U_R \subset \Omega_q$ et l'invariance de g entraîne $\Omega_q \subset \{g > 0\}$.

On va prouver que $g(z, w) = 0$ si $(z, w) \notin \Omega_q$. Quitte à augmenter $R > 0$, on a $\forall |z| \leq R$, $\forall |w| > R$,

$$|P(z, w)| \leq C R^\alpha |w|^\beta \text{ et } |Q(z, w)| \leq C R^\gamma |w|^\delta \ . \tag{12}$$

De même, $\forall |z| > R$, $\forall |w| \leq R$,

$$|P(z,w)| \leq CR^{\beta}|z|^{\alpha} \text{ et } |Q(z,w)| \leq CR^{\delta}|w|^{\gamma} \ . \tag{13}$$

Nous aurons besoin du lemme suivant, dont nous laissons la preuve au lecteur.

Lemme 5.3. *Soit $k > \max(\alpha, \delta, \sqrt{\beta\gamma})$. Pour des choix de constantes C_1, $C_2 > 0$ assez grandes vérifiant $C_1/C_2 = \sqrt{\gamma/\beta}$, les suites $a_j = C_1 k^j$, et $b_j = C_2 k^j$ satisfont, pour tout $j \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} a_j, b_j &\geq 1 \ , \\ a_{j+1} &\geq \max\{\beta + \alpha a_j, \alpha + \beta b_j\} + 1 \ , \\ b_{j+1} &\geq \max\{\gamma + \delta b_j, \delta + \gamma a_j\} + 1 \ . \end{aligned}$$

Fixons maintenant $(z,w) \notin \Omega_q$. Soit

$$M_1 := \max\{\sup_{\Delta^2(R)} |P|, \ \sup_{\Delta^2(R)} |Q|\} \ ,$$

et $\tau := \max(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. On pose $M := \max(M_1, R, C, |z|, |w|)$ et on note $(z_j, w_j) = f^j(z,w)$. On a donc $\forall j \geq 1$, $|z_j| \leq R$ ou $|w_j| \leq R$. Vérifions par récurrence que $\forall j \geq 1$, $|z_j| \leq M^{a_j}$ et $|w_j| \leq M^{b_j}$. L'assertion est claire pour $j = 1$ puisque $a_1, b_1 \geq 1$ et $M \geq \max(|z|, |w|)$. Supposons la vérifiée au rang $j \geq 1$.

Supposons $\max\{|z_j|, |w_j|\} \leq R$. Alors $|z_{j+1}| \leq M_1 \leq M \leq M^{a_{j+1}}$ et similairement $|w_j| \leq M^{b_{j+1}}$.

Supposons $|z_j| \leq R$ et $|w_j| > R$. Alors $|z_{j+1}| = |P(z_j, w_j)| \leq CR^{\alpha}|w_j|^{\beta} \leq CM^{\alpha + \beta b_j - 1} \leq M^{a_{j+1}}$ et $|w_{j+1}| = |Q(z_j, w_j)| \leq CR^{\gamma}|w_j|^{\delta} \leq CM^{\gamma + \delta b_j - 1} \leq M^{b_{j+1}}$.

Enfin le cas $|z_j| > R$ et $|w_j| \leq R$ se traite de manière similaire.

Il suffit à présent de remarquer que

$$\rho_+ = \frac{\alpha + \delta + \sqrt{(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma}}{2} > \max(\alpha, \delta, \sqrt{\beta\gamma}) \ ,$$

lorsque $\tilde{f}$ n'est ni holomorphe ni un produit croisé. En fixant $k < \rho_+$ dans la majoration précédente, on obtient ainsi que $a_j/\rho_+^j \to 0$ et $b_j/\rho_+^j \to 0$ et donc $g(z,w) = 0$. $\square$

Exemples 5.4. *On ne peut pas, en général, espérer majorer la croissance de $f^j(z,w)$ par $C \cdot M^{|\rho_-|^j}$ dans $\mathbb{C}^2 \setminus \Omega_q$, comme dans le cas des applications monomiales. Si par exemple $\alpha > |\rho_-| \geq 1$ et $f(z,w) = (z^{\alpha}w^{\beta} + z^{\alpha}, z^{\gamma}w^{\delta})$, alors $f(z,0) = (z^{\alpha}, 0)$, un voisinage de $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,/\, |z| > 1$ et $w = 0\}$ est attiré par le point d'indétermination $([0:1],[1:0])$ et la croissance est de l'ordre de M^{α^j}.*

Remarque 5.5. *Le cas des produits croisés sera analysé à la section 6. Lorsque $f(z,w) = (P(w), Q(z))$ où P et Q sont des polynômes de degrés β et γ, $\tilde{f}$ est holomorphe et $\rho_+ = \sqrt{\beta\gamma}$. La fonction de Green est alors, si $\beta\gamma \geq 2$, $g(z,w) = (\sqrt{\gamma} + \sqrt{\beta})^{-1}[\sqrt{\gamma} g_{P\circ Q}(z) + \sqrt{\beta} g_{Q \circ P}(w)]$ où $g_{P \circ Q}$ (resp. $g_{Q\circ P}$) désigne la fonction de Green du polynôme $P \circ Q$ (resp. $Q \circ P$). L'ensemble $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,/\, g(z,w) = 0\}$ correspond ainsi aux points d'orbite positive bornée dans $\mathbb{C}^2$.*

Théorème 5.6. *Soit (f_λ) une famille d'applications polynomiales dominantes algébriquement stables de $\mathcal{P}_A$ dépendant continument d'un paramètre $\lambda \in \Lambda$ (Λ étant un espace métrique). Soit (T_λ) la famille associée des courants de Green. Alors $\lambda \to T_\lambda$ est continue.*

Démonstration.
La continuité de la famille des courants de Green est équivalente à celle des potentiels (g_λ) dans $\mathbb{C}^2$ pour la topologie L^1_{loc}. Puisque les degrés A sont fixés indépendemment de λ, il découle de la construction des potentiels que $\forall \lambda \in \Lambda$, $g_\lambda(z,w) \leq a \log \|z\| + b \log \|w\|$, donc la famille g_λ est localement uniformément majorée.

Soit $\lambda_0 \in \Lambda$ et v une valeur d'adhérence de la famille (g_λ) au point λ_0. Montrons tout d'abord que $v \leq g_{\lambda_0}$. Rappelons que g_λ est la limite décroissante des fonctions $g^j(\cdot, \lambda)$ et $\forall j \in \mathbb{N}$, $\lambda \to g^j(\cdot,\lambda)$ est continue. Or un infimum de fonctions s.c.s. est s.c.s., donc $\lambda \to g(.,\lambda)$ est s.c.s. et ainsi $v \leq g_{\lambda_0}$. Notons que cette inégalité n'a lieu a priori que pour presque tout $(z,w) \in \mathbb{C}^2$, mais v et g_{λ_0} sont psh donc $v(z,w) \leq g_{\lambda_0}(z,w)$, $\forall (z,w) \in \mathbb{C}^2$.

L'inégalité inverse requière véritablement le fait que les f_λ sont polynomiales dans $\mathbb{C}^2$. Les coefficients des polynômes définissant f_λ varient continument avec λ. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on peut trouver $R > 0$ et une constante $C > 0$ tels que $\forall \lambda \in B(\lambda_0, \varepsilon)$, $\forall (z,w) \in U_R$,

$$\begin{aligned} C^{-1}\|z\|^\alpha \|w\|^\beta &\leq |P_\lambda(z,w)| \leq & C\|z\|^\alpha\|w\|^\beta \ , \\ C^{-1}\|z\|^\gamma \|w\|^\delta &\leq |Q_\lambda(z,w)| \leq & C\|z\|^\gamma\|w\|^\delta \ . \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $g^j(z,\lambda)$ converge uniformément par rapport à (z,λ) dans $U_R \times B(\lambda_0,\varepsilon)$. Donc $v \equiv g_{\lambda_0}$ dans U_R. Mais v et g_{λ_0} satisfont la même équation fonctionnelle $v \circ f_{\lambda_0} = \rho_+ \cdot v$, et $g_{\lambda_0} \circ f_{\lambda_0} = \rho_+ \cdot g_{\lambda_0}$. On en déduit, puisque le bassin d'attraction $\Omega_q(f_{\lambda_0})$ de q relatif à f_{λ_0} est égal à $\Omega_q(f_{\lambda_0}) = \bigcup_{j\geq 1} f_{\lambda_0}^{-j}(U_R)$, que $v \equiv g_{\lambda_0}$ dans ce bassin. Enfin on a $0 \leq v \leq g_{\lambda_0}$ et $g_{\lambda_0} \equiv 0$ à l'extérieur de $\Omega_q(f_{\lambda_0})$, donc $v \equiv g_{\lambda_0}$ dans tout $\mathbb{C}^2$. □

Nous concluons ce paragraphe par l'estimation suivante de $G_{\tilde f}$ que nous utiliserons dans la partie 7.

Proposition 5.7.
Soit $f \in \mathcal{P}_A$ une application polynomiale dominante de $\mathbb{C}^2$ qui s'étend en une application méromorphe algébriquement stable $\tilde f$ de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ qui n'est ni holomorphe ni un produit croisé.

Alors, au voisinage de tout point $p_0 \in I_{\tilde f}$, le courant invariant T associé à $\tilde f$ admet un potentiel G psh t.q.

$$G(p) \geq c \log \ dist(p,p_0) + O(1)$$

pour une constante $c > 0$.

Remarque 5.8. *Lorsque f s'étend à $\mathbb{P}^2$ en une application $\tilde f$ algébriquement stable, la même minoration du potentiel de T s'applique en tout point $p_0 \in I_{\tilde f}$.*

Démonstration. On peut supposer que $p_0 = ([1:0],[0:1])$ et, quitte à remplacer f par f^2, que $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 1$. Notons $G(x,y) := G_{\tilde f}(1,x,y,1)$ un potentiel de T au voisinage de p_0. On cherche une constante $c > 0$ t.q. pour tout x, y assez petits

$$G(x,y) \geq c \max\{\log|x|, \log|y|\} + O(1).$$

On remarque tout d'abord que

$$\begin{aligned} G(x,y) = G_{\tilde f}(1,x,y,1) &= G_{\tilde f}(1,x,1,1/y) + b\log|y| \\ &= g(x,1/y) + b\log|y| \geq b\log|y|, \end{aligned}$$

car la fonction g est positive (voir théorème 5.2). Soit $N \in \mathbb{N}^*$ que nous fixerons précisément par la suite, on obtient dans $\{|y| \geq |x|^N\}$ l'estimation

$$G(x,y) \geq b\log|y| \geq bN \max\{\log|x|, \log|y|\}. \tag{14}$$

Il reste à minorer G dans $\{|y| \leq |x|^N\}$. Comme $q = ([0:1],[0:1])$ est super-attractif, la fonction $G_{\tilde f}$ est pluriharmonique dans un voisinage de $\pi^{-1}\{q\}$. On peut donc trouver $C_1 > 0$ t.q. pour u, v assez petits

$$G_{\tilde f}(u,1,v,1) \geq C_1. \tag{15}$$

Or le point p_0 est isolé dans $I_{\tilde f}$, d'où $P(1,x,0,1) = 0$ ssi $x = 0$. On peut donc trouver des constantes $C_2 > 0$, $M \in \mathbb{N}$ t.q. $|P(1,x,0,1)| \geq C_2|x|^M$. De même, il existe $C_2' > 0$ et $M' \in \mathbb{N}$ tels que $|Q(1,x,0,1)| \geq C_2'|x|^{M'}$. On choisit $N > \max(M, M')$ et $\varepsilon \ll 1$. La formule de Taylor donne pour tout point de $\{|y| \leq |x|^N, |x| + |y| \leq \varepsilon\}$

$$|P(1,x,y,1)| \geq C_2|x|^M - C_3|y| \geq C_4|x|^M,$$

pour des constantes $C_3, C_4 > 0$. De même $|Q(1,x,y,1)| \geq C_4|x|^{M'}$. Donc

$$\sup_{|y|\leq|x|^N, |x|+|y|\leq\varepsilon} \left\{ \left|\frac{y^\beta}{P(1,x,y,1)}\right|, \left|\frac{y^\delta}{Q(1,x,y,1)}\right| \right\} \leq C_4^{-1}|x|^{\min(\beta N - M, \delta N - M')} \ll 1. \tag{16}$$

On utilise alors l'équation fonctionnelle $G_{\tilde f} \circ F = \rho_+ G_{\tilde f}$. On déduit de $F(1,x,y,1) = (y^\alpha, P(1,x,y,1), y^\delta, Q(1,x,y,1))$ que pour tous les points de $\{|y| \leq |x|^N, |x| + |y| \leq \varepsilon\}$,

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \rho_+^{-1} G_{\tilde f}(y^\beta, P, 1, y^\delta, Q) \\ &= \rho_+^{-1} G_{\tilde f}\left(\frac{y^\beta}{P}, 1, \frac{y^\delta}{Q}, 1\right) + \rho_+^{-1}\left(a\log|P| + b\log|Q|\right) \\ &\geq \rho_+^{-1} C_1 + \rho_+^{-1}\left(a\log|P| + b\log|Q|\right) \\ &\geq c\log|x| + C_5 \geq c\max\{\log|x|, \log|y|\} + C_5, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

5.2. **Exemples.**

Nous exhibons ici une famille d'applications polynomiales pour lesquelles le support du courant de Green est strictement inclus dans l'ensemble de Julia, ces applications ne sont donc pas normales (cf corollaire 2.7). Plus précisément, il y a un disque holomorphe isolé dans l'ensemble de Julia que le courant de Green ne peut pas charger (cf théorème 2.8). Ce phénomène est plutôt surprenant pour des applications qui ne sont pas des produits croisés.

Proposition 5.9. *Considérons*

$$f : (z,w) \in \mathbb{C}^2 \mapsto \big(z(w^2-\lambda^2), w^2(zw^p + Q(w))\big) \in \mathbb{C}^2,$$

où Q est un polynôme de degré $m \leq p$ et $|\lambda| > 1$. On note encore f l'extension méromorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ qui est algébriquement stable. Soit $A = ([0:1],[1:0]) \in I_f$. On note Ω_A l'ensemble des points attirés par A sous l'itération de f.

Alors il existe $r_0 > 0$ tel que

$$\big\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,/\, 0 < |z| < r_0^{-1} \text{ et } |w| < r_0^2\big\} \subset \Omega_A.$$

Le disque $\{0\} \times \Delta(r_0^2)$ est isolé dans l'ensemble de Julia J_f. En particulier $\mathrm{Supp}\, T$ est strictement contenu dans J_f.

La proposition est une conséquence immédiate du lemme suivant:

Lemme 5.10. *Considérons pour $\varepsilon,\ r > 0$,*

$$W_\varepsilon(r) := \big\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,/\, \varepsilon < |z| < r^{-1} \text{ et } |w| < r^2\big\}.$$

Fixons $t, t' \in \mathbb{R}$ tels que $1 < t < |\lambda|^2 < t'$. Alors il existe $r_0 > 0$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, $\forall 0 < r < r_0$,

$$f(W_\varepsilon(r)) \subset W_{t\varepsilon}(r/t') \ .$$

Démonstration.

On fixe $r_0 > 0$ assez petit pour que $|\lambda|^2 - r_0^2 \geq t$, $|\lambda|^2 + r_0^2 \leq t'$ et $(1+M)(t')^2 r_0 < 1$, où $M = \sup_{|w|\leq 1} |Q(w)|$. On a alors, pour $0 < r < r_0$, $(z,w) \in W_\varepsilon(r)$ et $(z_1,w_1) = f(z,w)$, les inégalités

$$\begin{aligned} |z_1| &\geq (|\lambda^2| - r^2)|z| > t\varepsilon; \\ |z_1| &\leq (|\lambda|^2 + r^2)|z| < \frac{|\lambda|^2 + r^2}{r} < \frac{t'}{r}; \\ |w_1| &\leq |w|^2(|z||w|^p + |Q(w)|) \leq r^4 \frac{1+M}{r} < \left(\frac{r}{t'}\right)^2 . \end{aligned}$$

□

L'application f a pour degrés la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2+p \end{bmatrix} .$$

Son premier degré dynamique et son degré topologique sont

$$\begin{aligned} \lambda_1(f) &= 1/2(3 + p + \sqrt{(p+1)^2 + 8}) \ , \\ d_t(f) &= \max(p+2, 4+m) \text{ si } Q \not\equiv 0 \ . \end{aligned}$$

On a donc $d_t(f) > \lambda_1(f)$ ssi $m = p$ ou $m = p-1 \geq 0$ et cette condition assure l'existence d'une mesure limite μ_f (cf théorème 4.4).

Lorsque $m \leq p-1$, on obtient

$$\begin{aligned} I_P &= \{([1:0],[0:1]); ([0:1],[1:\pm\lambda])\} \ , \\ I_Q &= \{([1:0],[0:1]); ([0:1],[1:0])\} \ . \end{aligned}$$

Lorsque $m = p$, on obtient $I_P \cap I_Q = \emptyset$ et $d_t(f) = p + 4$ est donné par la proposition 4.7. Notons que le point $A = ([0 : 1], [1 : 0])$ est un point d'indétermination, l'application f n'est donc pas normale.

6. Produits croisés

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ et $f \in \mathcal{M}_A$ une méromorphe dominante de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ de bidegrés (α, β) et (γ, δ). Nous traitons dans cette section le cas des produits croisés ($\beta\gamma = 0$). Ce type d'applications a été étudié par plusieurs auteurs (voir [He 96], [Jo 97], [Se 97]). Notre point de vue est à rapprocher de celui de Jonsson [Jo 97] dont nous nous sommes très largement inspirés ; il considère des produits croisés polynomiaux de $\mathbb{C}^2$ qui admettent une extension holomorphe dans $\mathbb{P}^2$ et dispose dans ce cas d'une mesure mélangeante à support compact dans $\mathbb{C}^2$ contruite par Fornaess-Sibony [F-S 95]. Nous construisons ici une mesure mélangeante pour des produits croisés polynomiaux de $\mathbb{C}^2$ qui admettent une extension méromorphe algébriquement stable dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$; le support de cette mesure peut-être non borné dans $\mathbb{C}^2$.

Par symétrie, il suffit de traiter le cas $\beta = 0$. Nous supposerons de plus toujours que $\alpha, \delta \geq 2$. Si ce n'est pas le cas la dynamique sur l'un des facteurs est affine. Nous étudions tout d'abord rapidement le cas des applications holomorphes (en incluant les applications non produits croisés avec $\alpha = \delta = 0$). La section 6.2 est consacrée au cas $\delta > \alpha$. Dans la suite (section 6.3 à 6.6) nous nous restreignons aux produits croisés polynomiaux dans $\mathbb{C}^2$. Dans les sections 6.3 et 6.4, on construit une mesure mélangeante μ lorsque $\alpha > \delta$ puis $\alpha = \delta$. La section 6.5 présente une étude plus fine de μ: calcul des exposants de Lyapunov et description de son support. Enfin nous concluons par l'étude d'une classe d'exemple dans la section 6.6.

Comme précedemment, on notera $\|(z, w)\| := |z| + |w|$ si $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. De même, pour $\zeta \in \mathbb{C}$, $\|\zeta\| := \|(1, \zeta)\| = 1 + |\zeta|$.

6.1. Le cas holomorphe.

Soit $\beta = \gamma = 0$ et $f = ([P(z)], [Q(w)])$ est une application holomorphe de $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ dans lui même. L'ensemble d'indétermination I_f est vide et f est donc toujours algébriquement stable et normale. La dynamique peut alors s'étudier séparément sur chacun des facteurs. Si $\alpha, \delta \geq 2$, on obtient deux courants T_P et T_Q dans $\mathcal{T}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ admettant des potentiels continus et vérifiant les équations fonctionnelles $f^*T_P = \alpha \cdot T_P$ et $f^*T_Q = \delta \cdot T_Q$. On définit $\mu := T_P \wedge T_Q$, c'est une mesure de probabilité invariante mélangeante et d'entropie maximale $\log(\alpha\delta)$.

Lorsque $\alpha = 1$ ou $\delta = 1$, la dynamique est linéaire en l'un des facteurs et peut être calculée explicitement.

Soit $\alpha = \beta = 0$ et $f = ([P(w)], [Q(z)])$ est également holomorphe. Lorsque $\beta = \gamma = 1$, f est un automorphisme linéaire. Si $\beta\gamma \geq 2$, le théorème 2.1 donne l'existence d'un courant de Green T_f de potentiel continu (puisque f est normale) tel que $f^*T_f = \sqrt{\beta\gamma} \cdot T_f$. Ce courant n'est pas extrémal dans $\mathcal{T}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ puisqu'il est égal à

$$T_f = \frac{1}{\sqrt{\gamma} + \sqrt{\beta}} \left(\sqrt{\gamma} T_{P \circ Q}(z) + \sqrt{\beta} T_{Q \circ P}(w) \right),$$

avec des notations évidentes traduisant le fait que

$$f^2 = ([P \circ Q(z)], [Q \circ P(w)])$$

est une application holomorphe du type précédent. En effet,

$$\begin{aligned} T &= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{(\beta\gamma)^{j/2}} (f^j)^* \left(\frac{\sqrt{g}\omega_1 + \sqrt{\beta}\omega_2}{\sqrt{\gamma}+\sqrt{\beta}} \right) , \\ T_{P\circ Q} &= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{(\beta\gamma)^{j}} (f^{2j})^*(\omega_1) , \\ T_{Q\circ P} &= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{(\beta\gamma)^{j}} (f^{2j})^*(\omega_2) . \end{aligned}$$

La mesure de probabilité

$$\mu = T_{P\circ Q} \wedge T_{Q\circ P} = \frac{(\sqrt{\gamma}+\sqrt{\beta})^2}{2\sqrt{\beta\gamma}} T_f \wedge T_f$$

vérifie donc $f^*\mu = (\beta\gamma)\cdot\mu$. C'est une mesure invariante mélangeante et d'entropie maximale $\log(\beta\gamma)$.

Remarque 6.1. *Plus généralement, on peut associer à toute application holomorphe f d'un espace multiprojectif X dans lui même une mesure de probabilité invariante qui est mélangeante et d'entropie maximale si f n'est pas linéaire sur un des facteurs. Il s'agit d'une conséquence directe du cas $X = \mathbb{P}^n$ traité par [F-S 95].*

6.2. **Le cas $\beta = 0$, $\gamma \geq 1$ et $\delta > \alpha$.**

Si $\alpha = 1$, la dynamique est semi-linéaire et se ramène essentiellement à de la dynamique en une variable, on supposera donc de plus que $\alpha \geq 2$.

Théorème 6.2. *Soit $f \in \mathcal{M}_A$ une application méromorphe dominante algébriquement stable de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, avec $\gamma \geq 1$ et $\delta \geq \alpha + 1 \geq 3$. Soit $\omega' = a\omega_1 + b\omega_2$, où $a = \gamma/(\gamma+\delta-\alpha)$ et $b = (\delta-\alpha)/(\gamma+\delta-\alpha)$ sont tous deux positifs.*

(i) *La suite de courants $\delta^{-j}(f^j)^*(\omega')$ converge vers un courant $T \in \mathcal{T}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ de masse 1, cohomologue à ω', et vérifiant*

$$f^*T = \delta \cdot T .$$

Le courant T est à support dans l'ensemble de Julia J_f de f, ne charge pas les hypersurfaces et est extrémal dans le convexe compact $\mathcal{K}_f = \{S \in \mathcal{T}(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1) \,/\, f^*S = \delta \cdot S \text{ et } \|S\| = 1\}$.

(ii) *La suite de courants $\alpha^{-j}(f^j)^*(\omega_1)$ converge vers un courant $T_P \in \mathcal{T}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ de masse 1, cohomologue à ω_1, et vérifiant*

$$f^*T_P = \alpha \cdot T_P .$$

Le support de T_P est inclus dans l'ensemble de Julia J_f, et T_P admet un potentiel continu.

(iii) *La mesure $\mu := (\gamma+\delta-\alpha)(\delta-\alpha)^{-1} T_P \wedge T$ est une mesure de probabilité dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ qui vérifie*

$$f^*\mu = (\alpha\delta)\cdot\mu .$$

C'est donc une mesure invariante $f_*\mu = \mu$ ($d_t(f) = \alpha\delta$).

Si T ne charge pas les ensembles pluripolaires -en particulier, si f est l'extension d'une application polynomiale de $\mathbb{C}^2$ - alors μ est mélangeante.

Démonstration.
Le vecteur (a, b) est un vecteur propre de A associé à sa plus grande valeur propre $\rho_+ = \delta$ dont les coordonnées sont positives, on l'a normalisé par $a + b = 1$. On obtient la première assertion en reprenant pas à pas les démonstrations des théorèmes 2.2 et 2.8 et de la proposition 2.4.

Puisque $\beta = 0$, le premier facteur est indépendant de w. On a donc une application holomorphe $P : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ pour laquelle on sait construire une mesure de probabilité μ_P telle que $P^*\mu_P = \alpha \cdot \mu_P$ et qui admet un potentiel continu. Le courant $T_P = p_1^*\mu_P$ a toutes les propriétés annoncées, où $p_1 : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ désigne la projection sur le premier facteur.

La mesure $\mu := (\gamma + \delta - \alpha)(\delta - \alpha)^{-1} T_P \wedge T$ est bien définie puisque T_P admet un potentiel continu (cf [B-T 82]). Elle est cohomologue à $\omega_1 \wedge \omega_2$ et est donc de masse égale à 1. L'équation fonctionnelle $f^*\mu = (\alpha\delta) \cdot \mu$ est conséquence de celles satisfaites par T et T_P, ainsi que du fait que μ ne charge pas les hypersurfaces. En effet, T_P possède un potentiel continue, et T ne charge pas les hypersurfaces. Enfin le degré topologique de f est égal à $\alpha\delta$ puisque $I_P = \emptyset$ (cf proposition 4.7), on a donc pour toute fonction test θ,

$$< f_*\mu, \theta >=< \mu, f^*\theta >=< \frac{1}{\alpha\delta} f^*\mu, f^*\theta >=< \mu, \frac{1}{\alpha\delta} f_*(f^*\theta) >=< \mu, \theta > .$$

Lorsque T ne charge pas les ensembles pluripolaires, la proposition 4.12 assure que μ ne les charge pas non plus. Or f est algébriquement stable donc le premier degré dynamique de f est $\lambda_1(f) = \delta$. Comme $d_t(f) > \lambda_1(f)$ ($\alpha \geq 2$), le résultat d'équidistribution de Russakovski-Shiffman (théorème 4.6) et l'équation fonctionnelle $f^*\mu = (\alpha\delta) \cdot \mu$ assurent l'existence d'un ensemble pluripolaire $\mathcal{E}_f$ tel que

$$\frac{1}{(\alpha\delta)^j} (f^j)^*(\varepsilon_p) \to \mu, \forall p \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \mathcal{E}_f,$$

où ε_p désigne la masse de Dirac au point p. Le lemme 4.11 assure alors que μ est mélangeante. Lorsque f est l'extension algébriquement stable d'une application polynomiale de $\mathbb{C}^2$, T admet un potentiel localement borné dans $\mathbb{C}^2$ et ne charge pas les hypersurfaces à l'infini, il ne charge donc aucun ensemble pluripolaire de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et μ est mélangeante. $\square$

Exemples 6.3. *Soit $f : (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (z^\alpha, z^\gamma w^\delta) \in \mathbb{C}^2$ où les degrés de f satisfont les hypothèses du théorème. Cette application s'étend en une application méromorphe algébriquement stable de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ que l'on note encore f. Les points $0 = (0, 0) = ([1 : 0], [1 : 0])$ et $q = (\infty, \infty) = ([0 : 1], [0 : 1])$ sont des points fixes superattractifs pour f et $E_f = I_f = \{p, p'\}$ où $p = (\infty, 0)$ et $p' = (0, \infty)$. L'ensemble de Fatou de f est constitué de quatre composantes* *invariantes que nous écrivons dans* $\mathbb{C}^2$ *:*

$$\Omega_0 = \Big\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,/\, |z| < 1 \text{ et } |z|^\gamma |w|^{\delta-\alpha} < 1\Big\} \text{ (bassin d'attraction de 0)},$$

$$\Omega_q = \Big\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,/\, |z| > 1 \text{ et } |z|^\gamma |w|^{\delta-\alpha} > 1\Big\} \text{ (bassin d'attraction de } q),$$

$$\Omega_p = \Big\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,/\, |z| > 1 \text{ et } |z|^\gamma |w|^{\delta-\alpha} < 1\Big\} \text{ (bassin d'attraction de } p),$$

$$\Omega_{p'} = \Big\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,/\, |z| < 1 \text{ et } |z|^\gamma |w|^{\delta-\alpha} > 1\Big\} \text{ (bassin d'attraction de } p').$$

Le potentiel de T *est donné dans* $\mathbb{C}^2$ *par la fonction* $g(z,w) = (\gamma+\delta-\alpha)^{-1}\log^+(|z|^\gamma|w|^{\delta-\alpha})$ *et celui de* T_P *par* $g_P(z,w) = \log^+|z|$*. L'ensemble de Julia coïncide dans ce cas avec Supp* $T \cup$ *Supp* T_P *et* $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,/\, g(z,w) > 0\}$ *correspond à l'ensemble des points qui sont attirés par* $\{w_0 = 0\}$ *(comparer avec le théorème 5.2). Comme dans le cas des applications monomiales qui ne sont pas des produits croisés, la mesure invariante limite est la mesure de Lebesgue sur le tore* $\mathbb{T} = \{|z| = |w| = 1\}$ *qui est ici un ensemble invariant hyperbolique.*

6.3. Le cas $\beta = 0$, $\gamma > 0$ et $\alpha > \delta$.

Dans ce cas, la plus grande valeur propre de la matrice des degrés A est α et les vecteurs propres associés à la seconde valeur propre δ ont des coordonnées de signes contraires. Tout courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ invariant par f est cohomologue à ω_1. Nous nous restreignons au cas où l'application est *polynomiale*. Nous construisons une fonction v s.c.s., qui est localement bornée sur le support du courant invariant T_P et telle que le courant $v \cdot T_P$ soit pluripositif (cf paragraphe 4.2). Nous montrons alors que la mesure positive $dd^c(v \cdot T_P)$ est une mesure de probabilité invariante qui est mélangeante.

Théorème 6.4. *Soit* $f : (z,w) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (P(z), A(z)w^\delta + B(z,w)) \in \mathbb{C}^2$*, où* P, A, B *sont des polynômes tels que* $\deg P = \alpha > \delta \geq 2$ *et* $\deg A = \gamma \geq 1$. $\deg_z B \leq \gamma$, $\deg_w B \leq \delta - 1$*. On note encore* f *l'extension méromorphe algébriquement stable de* f *à* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$*.*

(i) *La suite de courants* $\alpha^{-j}(f^j)^*(\omega_1)$ *converge vers un courant* $T_P \in \mathcal{T}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ *de masse 1, qui vérifie* $f^*T_P = \alpha \cdot T_P$ *et Supp* $T_P = J_P \times \mathbb{P}^1$*, où* J_P *désigne l'ensemble de Julia de* P*.*

(ii) *La suite de fonctions*

$$v_j(z,w) = \frac{1}{\delta^j}\big((\alpha-\delta)\log\|Q^j(z,w)\| - \gamma\log\|P^j(z)\|\big)$$

converge ponctuellement sur $K_P \times \mathbb{C}$ *vers une fonction* v *s.c.s qui est localement bornée sur* $K_P \times \mathbb{C}$ *et telle que* $v \circ f = \delta \cdot v$ *(*K_P *désigne l'ensemble de Julia rempli de* P*).*

(iii) *Le courant* $\mu := (\alpha-\delta)^{-1}dd^c(v \cdot T_P)$ *est une mesure de probabilité invariante dans* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ *telle que*

$$f^*\mu = (\alpha\delta) \cdot \mu.$$

Elle ne charge pas les ensembles pluripolaires et est mélangeante.

Démonstration.

i) Le courant T_P correspond à la mesure de Green de P, cf 6.2.ii).

ii) Le vecteur $(\alpha-\delta,-\gamma)$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre δ. Il existe une constante $C>0$ telle que $\forall(z,w)\in\mathbb{C}^2$,

$$\|Q(z,w)\|\leq C\|z\|^{\gamma}\|w\|^{\delta} \text{ et } \|P(z)\|\geq C^{-1}\|z\|^{\alpha}.$$

On en déduit la majoration $v_{j+1}\leq v_j+C'/\delta^{j+1}$ donnant la quasi-décroissance de v_j vers une fonction v. Si $z\in\mathbb{C}\setminus K_P$, on risque d'obtenir $v(z,.)\equiv-\infty$ car $\|P^j(z)\|$ croît rapidement vers l'infini. On se place donc sur $K_P\times\mathbb{C}$; dans ce cas $(P^j(z))_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée et $v=\lim_j(\alpha-\delta)\delta^{-j}\log(1+|Q^j(z,w)|^2)$ est positive. La fonction v est une limite décroissante de fonctions s.c.s localement majorées, elle est donc s.c.s et localement bornée sur $K_P\times\mathbb{C}$. Enfin $v_j\circ f=\delta\cdot v_j$ donne $v\circ f=\delta\cdot v$.

iii) Comme Supp $T_P=J_P\times\mathbb{C}\subset K_P\times\mathbb{C}$, le courant $\mu:=dd^c(vT_P)/(\alpha-\delta)$ est bien défini. On a $v_jT_P\to vT_P$ donc $\mu_j:=dd^c(v_jT_P)/(\alpha-\delta)\to\mu$. Or

$$\mu_j=\frac{1}{\delta^j}dd^c\log\|Q^j\|\wedge T_P=\frac{1}{\delta^j}(f^j)^*(\omega_2)\wedge T_P.$$

Ce sont des mesures de probabilité donc μ est une mesure de probabilité. Puisque T_P ne charge pas les ensembles pluripolaires, la proposition 4.10 assure que μ ne charge pas les ensembles pluripolaires. L'équation fonctionnelle $f^*\mu=(\alpha\delta)\cdot\mu$ résulte de $f^*T_P=\alpha\cdot T_P$ et $v\circ f=\delta\cdot v$. La mesure μ est donc invariante puisque $d_t(f)=\alpha\delta$. Enfin $d_t(f)>\lambda_1(f)=\alpha$ (on a supposé $\delta\geq 2$), on peut appliquer le théorème 4.6 et le lemme 4.11 pour conclure au mélange de μ. □

6.4. **Le cas $\beta=0$, $\gamma>0$ et $\alpha=\delta$.**

Dans ce cas la matrice des degrés n'est pas diagonalisable. On peut toutefois reprendre le cheminement du paragraphe précédent pour construire une mesure invariante mélangeante lorsque l'application est *polynomiale*.

Théorème 6.5. *Soit $f:(z,w)\in\mathbb{C}^2\mapsto(P(z),A(z)w^{\alpha}+B(z,w))\in\mathbb{C}^2$, où P,A,B sont des polynômes tels que $\deg P=\alpha\geq 2$ et $\deg A=\gamma\geq 1$. $\deg_z B\leq\gamma$, $\deg_w B\leq\alpha-1$. On note encore f l'extension méromorphe algébriquement stable de f à $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$. Alors*

(i) *La suite de courants $\alpha^{-j}(f^j)^*(\omega_1)$ converge vers un courant $T_P\in\mathcal{T}(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)$ de masse 1, qui vérifie $f^*T_P=\alpha\cdot T_P$ et Supp $T_P=J_P\times\mathbb{P}^1$, où J_P désigne l'ensemble de Julia de P.*

(ii) *La suite de fonctions $v_j(z,w)=\alpha^{-j}\log\|Q^j(z,w)\|$ converge ponctuellement sur $K_P\times\mathbb{C}$ vers une fonction v s.c.s et localement bornée sur $K_P\times\mathbb{C}$, telle que $v\circ f=\alpha\cdot v$ (K_P désigne l'ensemble de Julia rempli de P).*

(iii) *Le courant $\mu:=dd^c(v\cdot T_P)$ est une mesure de probabilité invariante dans $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ telle que*

$$f^*\mu=\alpha^2\cdot\mu.$$

Elle ne charge pas les ensembles pluripolaires et est mélangeante.

Démonstration.

i) voir 6.2.ii).

ii) Il existe une constante $C>0$ telle que $\|Q(z,w)\|\leq C\|z\|^{\gamma}\|w\|^{\alpha}$, on en déduit $v_{j+1}(z,w)\leq v_j(z,w)+\alpha^{-(j+1)}(\log C+\gamma\log\|P^j(z)\|)$. Comme K_P

est complètement invariant par P, on obtient sur $K_P \times \mathbb{C}$ une majoration $v_{j+1} \leq v_j + \alpha^{-(j+1)}C'$. La suite (v_j) est donc quasi-décroissante, et sa limite v est s.c.s. et localement bornée sur $K_P \times \mathbb{C}$. De $Q^j \circ f = \alpha \cdot Q_{j+1}$ on déduit $v \circ f = \alpha \cdot v$.

iii) Le courant $\mu := dd^c(v \cdot T_P)$ est donc bien défini, il est limite des mesures de probabilité $\mu_j := dd^c(v_j T_P)$. Donc μ est une mesure de probabilité qui satisfait les assertions annoncées (il suffit de reprendre les arguments donnés pour 6.6.iv). $\square$

6.5. Étude de Supp μ pour les produits croisés polynomiaux.

Soit $f : (z,w) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (P(z), Q(z,w)) = (P(z), A(z)w^\delta + B(z,w)) \in \mathbb{C}^2$, où P, A, B sont des polynômes tels que $\deg P = \alpha \geq 2$, $\delta \geq 2$, $\deg A = \gamma \geq 1$, $\deg_z B \leq \gamma$ et $\deg_w B \leq \delta - 1$. Nous avons construit, aux paragraphes 6.1, 6.2 et 6.3, précédents, une mesure μ qui est mélangeante pour f. Elle est définie dans $\mathbb{C}^2$ par l'équation

$$\mu := dd^c(\widehat{g} T_P),$$

où

$$\begin{array}{rcl} \widehat{g} : K_P \times \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}^+ \\ (z,w) & \mapsto & \widehat{g}(z,w) := \lim\limits_{j\to\infty} \widehat{g}_j(z,w), \end{array}$$

avec $\widehat{g}_j := \delta^{-j} \log \|Q^j\|$ -dans les notations précédentes, on avait $\widehat{g} = (\delta - \alpha)/(\gamma + \delta - \alpha) g$ pour $\delta > \alpha$ et $\widehat{g} = v$ dans les autres cas. On note $K_P := \{z \in \mathbb{C},\ P^j(z) = O(1)\}$ l'ensemble de Julia rempli de P et $J_P = \partial K_P$.

Théorème 6.6.

(i) *La suite de fonctions* $\varphi_j(z) = \sum_{l=0}^{j-1} \delta^{-l-1} \log |A \circ P^l(z)|$ *converge ponctuellement sur* K_P *vers une fonction* φ *s.c.s. telle que* $\varphi \in L^1(\mu_P)$.

(ii) *Fixons* $z \in K_P \setminus \{\varphi = -\infty\}$. *La fonction* $w \mapsto \widehat{g}(z,w)$ *est continue, sous-harmonique dans* $\mathbb{C}$. *C'est la fonction de Green avec pôle à l'infini du compact* $K_z := \{w \in \mathbb{C}/\ \widehat{g}(z,w) = 0\}$. *Elle admet le développement asymptotique*

$$\widehat{g}(z,w) = \log|w| + \varphi(z) + o_z(1)\ .$$

En particulier la capacité logarithmique de K_z *est* $\exp(-\varphi(z))$.

(iii) *Les exposants de Lyapunov dans* $\mathbb{C}^2$ *de* μ *sont*

$$\lambda' = \lambda_P = \log\alpha + \sum_{P'(z_i)=0} g_P(z_i) \geq \log\alpha > 0\ ,$$

et

$$\lambda'' = \log\delta + \int \sum_{\frac{\partial Q}{\partial w}(z,w_i(z))=0} \widehat{g}(z, w_i(z))\ d\mu_P(z) \geq \log\delta > 0\ .$$

(iv) *Le support de* μ *vérifie*

$$Supp\,(\mu) = \overline{\bigcup_{z\in J_P\setminus\{\varphi=-\infty\}} \{z\} \times \partial K_z}\ .$$

Le support de μ est un compact de $J_P \times \mathbb{C}$ si et seulement si $A^{-1}(0) \cap J_P = \emptyset$. Dans ce cas les points périodiques répulsifs s'équidistribuent selon μ, i.e.

$$\frac{1}{(\alpha\delta)^j} \sum_{f^j(p)=p \text{ et } p \text{ répulsif}} \varepsilon_p \underset{j\to\infty}{\to} \mu,$$

et Supp μ coïncide alors avec l'adhérence des points fixes répulsifs.

Démonstration.

i) On calcule par récurrence $f^j(z,w) = (P^j(z), Q^j(z,w))$, où Q^j est de terme dominant $A_j(z)w^{\delta^j}$ avec

$$A_j(z) = \prod_{l=0}^{j-1} (A \circ P^l(z))^{\delta^{j-l-1}} .$$

La suite

$$\varphi_j(z) = \frac{1}{\delta^j} \log |A_j(z)| = \sum_{l=0}^{j-1} \frac{1}{\delta^{l+1}} \log |A \circ P^l(z)|$$

est "quasi-décroissante" sur le compact K_P i.e. $\varphi_{j+1} \leq \varphi_j + \log C/\delta^j$ pour une constante $C > 0$, car A est bornée sur K_P qui est totalement invariant. Elle converge donc vers une fonction φ s.c.s. Cette fonction φ n'est pas identiquement $-\infty$ puisque P admet une infinité de points périodiques dont le cycle ne rencontre pas $A^{-1}(0)$. Enfin le théorème de convergence monotone donne

$$\begin{aligned}
\int \varphi \, d\mu_P &= \lim_{j\to\infty} \int \varphi_j \, d\mu_P \\
&= \sum_{l\geq 0} \frac{1}{\delta^{l+1}} < (P^l)^* \log |A|, \mu_P > \\
&= \frac{1}{\delta - 1} \int \log |A| \, d\mu_P > -\infty ,
\end{aligned}$$

donc $\varphi \in L^1(\mu_P)$.

ii) Il existe une constante $C > 0$ t.q. pour tout $z \in K_P$ et $w \in \mathbb{C}$, on a

$$\Big| \|Q(z,w)\| - |A(z)| \cdot \|w\|^\delta \Big| \leq C \|w\|^{\delta-1} .$$

On en déduit $\forall j \in \mathbb{N}, \forall z \in K_P, \forall w \in \mathbb{C}$

$$\left| \frac{1}{\delta^{j+1}} \log \|Q^{j+1}\| - \frac{1}{\delta^j} \log \|Q^j\| - \frac{1}{\delta^{j+1}} \log |A \circ P^j(z)| \right| \leq \frac{1}{\delta^{j+1}} \log \left(1 + \frac{C}{\|Q^j\| \cdot |A \circ P^j|} \right) . \tag{17}$$

En minorant $\|Q^j\| \geq 1$ et en sommant (17) entre j et $+\infty$, on obtient $\forall j \in \mathbb{N}$, $\forall z \in K_P \setminus \{\varphi = -\infty\}, \forall w \in \mathbb{C}$,

$$|\widehat{g}(z,w) - \widehat{g}_j(z,w) - (\varphi(z) - \varphi_j(z))| \leq \sum_{l\geq j} \frac{1}{\delta^{l+1}} \log \left(1 + \frac{C}{|A \circ P^l|} \right) .$$

Lorsque $z \in K_P \setminus \{\varphi = -\infty\}$, la série du membre de droite converge, et la suite $(\widehat{g}_j)$ converge uniformément vers $\widehat{g}$ sur $\{z\} \times \mathbb{C}$. Ainsi la fonction $w \mapsto \widehat{g}(z,w)$ est sous-harmonique continue dans $\mathbb{C}$.

En sommant (17) entre 0 et $+\infty$, on obtient $\forall z \in K_P, \forall w \in \mathbb{C}$,

$$|\widehat{g}(z,w) - \log\|w\| - \varphi(z)| \leq \psi(z,w) \ ,$$

avec

$$\psi(z,w) := \sum_{l \geq 0} \frac{1}{\delta^{l+1}} \log\left(1 + \frac{C}{|A \circ P^l| \cdot \|Q^l\|}\right) .$$

Par convergence dominée, on en déduit que

$$\lim_{w \to \infty} \psi(z,w) = \sum_{l \geq 0} \frac{1}{\delta^{l+1}} \lim_{w \to \infty} \log\left(1 + \frac{C}{|A \circ P^l| \cdot \|Q^l\|}\right) = 0.$$

Ainsi $\widehat{g}(z,w) = \log\|w\| + \varphi(z) + o_z(1)$, $K_z = \{w \in \mathbb{C} / \widehat{g}(z,w) = 0\}$ est un compact de $\mathbb{C}$, $w \mapsto \widehat{g}(z,w)$ est sa fonction de Green avec pôle à l'infini et K_z est de capacité logarithmique $e^{-\varphi(z)}$.

iii) L'application f admet deux exposants de Lyapunov relatifs à la mesure ergodique μ. Ce sont deux réels $\lambda_1 \geq \lambda_2$ caractérisés par l'existence, pour μ-presque tout $m \in \mathbb{C}^2$ d'un sous-espace $E_2(m)$ de $\mathbb{C}^2$ tel que

$$\lim_{j \to +\infty} \frac{1}{j} \log\|Df^j \cdot v\| = \lambda_2, \ \forall v \in E_2(m) \setminus \{0\},$$
$$\lim_{j \to +\infty} \frac{1}{j} \log\|Df^j \cdot v\| = \lambda_1, \ \forall v \in \mathbb{C}^2 \setminus E_2(m).$$

On a de plus (cf [Y 95])

$$\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \int \log|\det Df| d\mu. \tag{18}$$

Puisque f envoie une droite verticale $\{z\} \times \mathbb{C}$ sur la droite verticale $\{P(z)\} \times \mathbb{C}$, l'un des exposants de Lyapunov, notons le λ', est égal à l'exposant de Lyapunov λ_P de P relatif à la mesure μ_P qui est ergodique pour P. La formule annoncée pour λ' est alors une conséquence simple du fait que g_P -la fonction de Green de P- est la fonction de Green avec pôle à l'infini du compact K_P (cf [P 85]). Il reste donc à calculer $\lambda'' = \Lambda - \lambda_P$, pour cela nous utilisons (1). Posons $\mu_z(w) := \Delta_w \widehat{g}(z,w)$; il s'agit d'une mesure de probabilité à support compact dans $\mathbb{C}$ pour tout $z \in J_P \setminus \{\varphi = -\infty\}$. Puisque μ_P ne charge pas l'ensemble $\{\varphi = -\infty\}$, la mesure μ agit sur toute forme test $\chi(z,w)$ par

$$< \mu, \chi >= \int \left(\int \chi(z,w) \ d\mu_z(w) \right) \ d\mu_P(z) \ . \tag{19}$$

On en déduit

$$\lambda'' = \Lambda - \lambda_P = \int \left(\int \log\left|\frac{\partial Q}{\partial w}(z,w)\right| \ d\mu_z(w) \right) \ d\mu_P(z).$$

Or pour tout $z \in J_P \setminus \{\varphi = -\infty\}$, $\widehat{g}(z,w) = \varphi(z) + \int \log|\zeta - w| \mu_z(\zeta)$, et le terme dominant de $Q_z(w) = Q(z,w)$ est $A(z)w^\delta$. Si $w_1(z), \dots, w_{\delta-1}(z)$ sont les racines de $\partial Q_z/\partial w(w)=0$ (comptées avec multiplicité), on obtient donc

$$\int \log\left|\frac{\partial Q}{\partial w}(z,w)\right| \, d\mu_z(w) = \log\delta + \log|A(z)| + \sum_{i=1}^{\delta-1}\left(\widehat{g}(z,w_i(z)) - \varphi(z)\right) \, .$$

Enfin l'égalité $(\delta-1)\int\varphi\, d\mu_P = \int \log|A|\, d\mu_P$ fournit la formule désirée pour λ''.

iv) La formule annoncée pour le support est une conséquence de (19). Lorsque $A^{-1}(0)\cap J_P=\emptyset$, la fonction φ est uniformément minorée sur J_P et on déduit de (17) que $\widehat{g}(z,w)-\log\|w\|\geq C_3$ pour une constante $C_3>0$. Cela prouve la compacité de $\mathrm{Supp}\,(\mu)$.

Si $A^{-1}(0)\cap J_P\neq\emptyset$, $\{\varphi=-\infty\}\cap J_P\neq\emptyset$. En considérant x_j une suite de points de $J_P\setminus\{\varphi=-\infty\}$ qui converge vers x tel que $\varphi(x)=-\infty$, on a nécessairement $\varphi(x_j)\to-\infty$ car φ est s.c.s. . La suite de compacts $\partial K_{x_j}\subset \mathrm{Supp}\,(\mu)$ est donc non bornée puisque ces compacts sont de capacité logarithmique $\exp(-\varphi(x_j))$, et $\mathrm{Supp}\,(\mu)$ n'est donc pas borné.

Dans le cas où $\mathrm{Supp}\,(\mu)$ est compact, f est holomorphe au voisinage de $\mathrm{Supp}\,(\mu)$. Les exposants de Lyapunov de μ sont strictement positifs. On peut donc transposer la preuve donnée par [Br 97] et [BrD 98] dans notre cadre pour en déduire l'équidistribution des cycles répulsifs pour μ. □

Remarque 6.7. *La fonction de Green g est pluriharmonique dans $\{\widehat{g}>0\}$, et les points de $\{\widehat{g}>0\}$ sont ceux qui sont attirés par $\{w_0=0\}$ à une vitesse de l'ordre de M^{δ^j} ; il se peut cependant que certains points soient attirés moins rapidement par cette même droite (considérer e.g. $f(z,w)=(z^\alpha, z^\gamma w^\delta + w^{\delta-1})$). On ne peut donc pas affirmer, en général, que l'ensemble $K_f=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2\,/\,|f^j(z,w)|=O(1)\}$ des points d'orbite positive bornée est fermé dans $\mathbb{C}^2$. Nous verrons au paragraphe 6.5 des exemples où il ne l'est pas.*

6.6. **Exemples.**

Nous précisons dans ce paragraphe la dynamique d'une classe particulière de produits croisés polynomiaux pour laquelle il est possible de décrire exactement le support de la mesure μ. Cela fournit en particulier des exemples d'applications polynomiales de $\mathbb{C}^2$ pour lesquelles l'ensemble K_f des points d'orbite positive bornée n'est pas fermé.

Proposition 6.8.

Soit $f:(z,w)\in\mathbb{C}^2\to(P(z),A(z)w^\delta)\in\mathbb{C}^2$, avec $\delta\geq 2$, $\deg P=\alpha\geq 2$ et $\deg A=\gamma\geq 1$. On note comme précédemment

$$\varphi(z)=\sum_{l\geq 0}\frac{1}{\delta^{l+1}}\log|A\circ P^l(z)| \, .$$

(i) *La fonction $\widehat{g}:K_P\times\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ est donnée par*

$$\widehat{g}(z,w)=\max(\varphi(z)+\log|w|,0) \, .$$

(ii) *L'ensemble K_f des points d'orbite positive bornée vérifie*

$$\begin{aligned} K_f &\subset \{(z,w)\in K_P\times\mathbb{C}\,/\,\varphi(z)+\log|w|=0\} \, , \\ K_f &\supset \{(z,w)\in K_P\times\mathbb{C}\,/\,\varphi(z)+\log|w|<0\} \, . \end{aligned}$$

(iii) *Le support de la mesure μ vérifie*

$$Supp\,(\mu) = \overline{\bigcup_{z\in J_P\setminus\{\varphi=-\infty\}} \left\{w \in \mathbb{C}/\,|w| = e^{-\varphi(z)}\right\}}\ ,$$

où $J_P = \partial K_P$ est l'ensemble de Julia de P.

– *Si $A^{-1}(0)\cap J_P = \emptyset$, alors Supp (μ) est un compact de $J_P\times\mathbb{C}$.*

– *Si $A^{-1}(0)\cap J_P \neq \emptyset$, Supp (μ) est adhérent à $J_P\times\{[0:1]\}\subset E_f = \overline{\cup_{j\geq 1} I_{f^j}}$.*

Les exposants de Lyapunov de μ sont $\lambda' = \lambda_P$ et $\lambda'' = \log\delta$.

Précisons maintenant la structure de l'ensemble K_f.

Proposition 6.9.

(i) *Si $J_P\cap A^{-1}(0)\neq\emptyset$, alors*

– *La fonction $\widehat{g}$ est discontinue en tout point de*

$$\left\{z\in J_P\setminus\{\varphi=-\infty\}\ \textit{et}\ |w| > e^{-\varphi(z)}\right\}\ ;$$

– *l'ensemble K_f n'est pas fermé, son adhérence contient $J_P\times\mathbb{C}$.*

(ii) *Si $A^{-1}(0)\subset\mathbb{C}\setminus K_P$, alors*

– *La fonction $\widehat{g}$ est continue.*

– *$K_f = \{(z,w)\in K_P\times\mathbb{C}/\,\varphi(z)+\log|w|\leq 0\}$ est compact dans $\mathbb{C}^2$.*

(iii) *Si f est de la forme $f(z,w) = (a(z-b)^\alpha + b, (z-b)^m B(z) w^\delta)$, où $m\geq 1$ et B est un polynôme de degré $\gamma - m$ tel que $B^{-1}(0)\cap K_P = \emptyset$, avec $(a,b)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$.*

Lorsque $\alpha < \delta$:

– *la fonction $\widehat{g}$ est continue;*

– *$K_f = \{(z,w)\in K_P\times\mathbb{C}/\,\varphi(z)+\log|w|\leq 0\}$ est un fermé de $\mathbb{C}^2$ dont l'adhérence dans $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ rencontre l'infini $\{z_0w_0 = 0\}$ exactement au point $([1:b],[0:1])$.*

Lorsque $\alpha\geq\delta$:

– *la fonction $\varphi|_{\mathrm{Int}(K_P)}\equiv -\infty$, et $\widehat{g}$ est discontinue en tout point de*

$$\left\{z\in J_P\ \textit{et}\ |w| > e^{-\varphi(z)}\right\}\ ;$$

– *$K_f\supset \mathrm{Int}(K_P)\times\mathbb{C}$ n'est pas fermé et son adhérence contient $K_P\times\mathbb{C}$.*

(iv) *Si $A^{-1}(0)\cap\mathrm{Int}(K_P)\neq\emptyset$, mais $A^{-1}(0)\cap J_P = \emptyset$ et si f n'est pas du type précédent, alors*

– *la fonction $\widehat{g}$ est discontinue en tout point de*

$$\left\{z\in J_P\ \textit{et}\ |w| > e^{-\varphi(z)}\right\}\ ;$$

– *l'ensemble K_f n'est pas fermé, son adhérence contient $J_P\times\mathbb{C}$.*

Démonstration de la proposition 6.8:

i) On vérifie que $Q^j(z,w) = \prod_{l=0}^{j-1}(A\circ P^l(z))^{\delta^{j-l-1}} w^{\delta^j}$ ce qui donne la formule annoncée.

ii) L'ensemble K_f est un sous-ensemble de $K_P\times\mathbb{C}$. Si $\log|w| > -\varphi(z)$, l'équation fonctionnelle $\widehat{g}\circ f = \delta\cdot\widehat{g}$ assure que $|w_j|\to\infty$, et l'orbite de (z,w) est attirée par $\{w_0 = 0\}$, donc $(z,w)\notin K_f$.

Si $z \in K_P$ et $\varphi(z) + \log|w| < 0$,

$$\frac{1}{\delta^j}\log|w_j| = \log|w| + \sum_{l=0}^{j-1}\frac{1}{\delta^{l+1}}\log|A \circ P^l(z)|$$

est strictement négatif pour j assez grand. Donc $|w_j| \to 0$ et $(z,w) \in K_f$.

iii) La formule donnant Supp (μ) est prouvé au 6.6. iv).

Si $A^{-1}(0) \cap J_P = \emptyset$, φ est bornée sur J_P d'où le résultat.

Supposons que $A^{-1}(0) \cap J_P \neq \emptyset$. L'ensemble $\{\varphi = -\infty\}$ est totalement invariant et intersecte J_P. Il est donc dense dans J_P. Si $z \in J_P$, on peut trouver une suite de points $z_i \to z$ t.q. $\varphi(z_i) > \varphi(z_{i+1}) \to -\infty$. Comme Supp $(\mu) \supset \{(z_i, w) \in \mathbb{C}^2,\ |w| = \exp(-\varphi(z_i))\}$, on en déduit Supp $(\mu) \supset \{[z : 1] \times [0 : 1]\}$. □

Démonstration de la proposition 6.9:

i) Soit x un point de J_P tel que $A(x) = 0$. Les préimages de x par P^j sont denses dans J_P et appartiennent à $\cup_{j\geq 1}\{\varphi_j = -\infty\} \subset \{\varphi = -\infty\}$. La fonction $\varphi_{|J_P}$ ne peut donc pas être continue aux points de $J_P \setminus \{\varphi = -\infty\}$. Par suite, $\widehat{g}$ est nulle sur une famille de droites $\{z\} \times \mathbb{C}$ dense dans $J_P \times \mathbb{C}$ et $\gamma|_{J_P\times\mathbb{C}}$ est discontinue aux points annoncés. Les autres assertions s'ensuivent.

ii) Lorsque $K_P \cap A^{-1}(0) = \emptyset$, la fonction φ est uniformément minorée sur K_P. La convergence vers φ est uniforme sur K_P donc φ et $\widehat{g}$ sont continues. Il s'ensuit que K_f est compact.

iii) La famille concernée est conjuguée à $(z,w) \mapsto (z^\alpha, z^m B_2(z) w^\delta)$, il suffit donc de traiter le cas $a = 1, b = 0$. L'ensemble $A^{-1}(0) \cap K_P$ est réduit au point fixe superattractif 0 de $P(z) = z^\alpha$.

Dans le premier cas, on vérifie que $\varphi(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z)$, où $\varphi_1(z) = m(\delta-\alpha)^{-1}\log|z|$ et φ_2 est continue sur K_P. Les assertions s'ensuivent. Notons que l'on retrouve le cas des applications monomiales lorsque B_2 est constant.

Dans le second cas, on vérifie que $\varphi \equiv -\infty$ dans $\mathrm{Int}(K_P)$ ce qui implique les autres assertions.

iv) Lorsque $K_P \cap A^{-1}(0) \neq \emptyset$ et si P n'est pas conjugué à z^α (i.e. si f n'est pas du type précédent), les préimages par P^j de $x \in A^{-1}(0) \cap K_P$ sont toutes dans K_P et s'accumulent sur J_P. On en déduit (comme en v)) que φ et $\widehat{g}$ sont discontinues ainsi que $J_P \times \mathbb{C} \subset \overline{K_f}$. Cependant notons que $K_f \cap J_P \times \mathbb{C}$ est compact car $\varphi_{|J_P}$ est continue. □

7. Applications birationnelles de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

7.1. **Généralités.**

Définition 7.1. *Une application $f : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ rationnelle est dite birationnelle s'il existe une application rationnelle $g : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ telle que $f \circ g$ est l'identité, en tant qu'application rationnelle. Dans ce cas on notera f^{-1} l'application g.*

On se restreindra dans toute la suite au cas où la plus grande valeur propre ρ_+ de la matrice des degrés de f satisfait $\rho_+ > 1$. Le cas d'égalité ne se produit que lorsque f est un automorphisme linéaire de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ou lorsque f est conjuguée à $(z, w) \mapsto (az + b, R_1(z)w + R_2(z))$ avec $a \neq 0$, et R_1, $R_2 \in \mathbb{C}(z)$.

Notations : dans la suite, étant donnée $f : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ une application birationnelle, on adoptera les notations suivantes:

- $I^+ := I_f$ l'ensemble d'indétermination de f, $I^+_\infty := \cup_{j \geq 1} I_{f^j}$ l'ensemble des points d'indétermination des itérés de f et E^+ l'adhérence de I^+_∞. On notera similairement I^- l'ensemble d'indétermination de f^{-1}, $I^-_\infty = \cup_{j \geq 1} I_{f^{-j}}$ et $E^- = \overline{I^-_\infty}$.
- $\mathcal{C}^+$ (resp. $\mathcal{C}^-$) l'ensemble critique de f (resp. f^{-1}). Ce sont des courbes algébriques de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ de bidegré $(2\alpha + 2\gamma - 1, 2\beta + 2\delta - 1)$ (voir proposition 1.2)
- Si $B \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, on notera $f(B) := \overline{f(B \setminus I^+)}$. Afin d'éviter les confusions, on notera $[f]^{-1}(B)$ l'image réciproque de l'ensemble B par l'application f, i.e. l'ensemble (éventuellement vide) des points de X qui sont envoyés dans B par f.

Nous utiliserons à plusieurs reprises l'observation suivante:

Observation 7.2. *Soit $f : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ une application birationnelle. Alors*

- *f réalise un biholomorphisme de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \mathcal{C}^+$ sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \mathcal{C}^-$;*
- *$f(\mathcal{C}^+) = I^-$.*

Proposition 7.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ et $f \in \mathcal{M}_A$ une application birationnelle de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Alors $f^{-1} \in \mathcal{M}_{{}^tA}$, où ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A. En particulier $\lambda_1(f) = \lambda_1(f^{-1})$.*

Démonstration. Soit ω' et ω'' deux formes lisses fermées de bidegré $(1, 1)$ sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Les courants $f^*\omega' \wedge \omega''$ et $\omega' \wedge (f^{-1})^*\omega''$ ne chargent pas les hypersurfaces, on a donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1} f^*\omega' \wedge \omega'' &= \int_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \mathcal{C}^+} f^*\omega' \wedge \omega'' \\ &= \int_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \mathcal{C}^-} \omega' \wedge (f^{-1})^*\omega'' \\ &= \int_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1} \omega' \wedge (f^{-1})^*\omega''.\end{aligned}$$

L'application $([\omega'], [\omega'']) \in H^{1,1}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathbb{R})^2 \to \int_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1} f^*\omega' \wedge \omega''$ est une forme bilinéaire Φ_f dont l'action dans la base $([\omega_1], [\omega_2])$ est donnée par la matrice A_f. L'égalité ci-dessus signifie que $\Phi_{f^{-1}}$ est l'application duale de Φ_f, on a donc $A_{f^{-1}} = {}^tA_f$. □

Proposition 7.4. *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ et $f \in \mathcal{M}_A$ une application birationnelle de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Les conditions suivantes sont équivalentes*

i) *f est algébriquement stable ;*
ii) *$\lambda_1(f) = \rho_+$;*
iii) *$I^+_\infty \cap I^-_\infty = \emptyset$;*

iv) f^{-1} *est algébriquement stable.*

Démonstration. L'équivalence entre i) et ii) résulte de la proposition 1.8. Celle entre i) et iv) est une conséquence de la proposition 7.3.

Supposons $I_\infty^+ \cap I_\infty^- \neq \emptyset$ et montrons que f ne peut pas être algébriquement stable. Soit $p \in I_{f^j} \cap I_{f^{-k}}$ avec $j, k \geq 1$, on ne perd rien à supposer $j \leq k$. L'ensemble $[f^k]^{-1}(p)$ est une courbe de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ qui est envoyée par f^k sur $p \in I_{f^j}$. Mais $I_{f^j} \subset I_{f^k}$ si f est algébriquement stable puisque l'on a supposé $j \leq k$, contradiction.

Réciproquement si f n'est pas algébriquement stable, il existe une courbe irréductible V de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et un entier $j \geq 1$ tels que $f^j(V) = p \in I^+$. Quitte à changer f en f^j on peut supposer que $j = 1$. La courbe V est nécessairement une composante de $\mathcal{C}^+$, donc $p \in I^+ \cap I^-$ (voir observation 7.2). □

Nous aurons besoin dans la suite de l'information suivante.

Proposition 7.5. *Soit f une application birationnelle algébriquement stable de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et vérifiant $\rho_+ > 1$. Soit T^+ le courant de Green de f. Alors*

$$\nu(T^+, p) > 0 \text{ ssi } p \in I_\infty^+ .$$

Remarque 7.6. *Le cas de $\mathbb{P}^2$ a été traité dans [Di 98].*

Plus généralement, si f est une application rationnelle de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ vérifiant les hypothèses du théorème 2.2, on peut montrer que le courant de Green a des singularités logarithmiques exactement sur l'ensemble $\cup_j I_{f^j}$. La démonstration est néanmoins plus délicate que dans le cas birationnelle. Nous renvoyons le lecteur à [Fa 99] qui traite du cas des applications rationnelles algébriquement stables de $\mathbb{P}^2$.

Démonstration. Soit G^+ un potentiel de T^+ dans $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$. La relation $G^+(\lambda z, \mu w) = a^+ \log|\lambda| + b^+ \log|\mu| + G^+(z,w)$ assure que G^+ a un nombre de Lelong supérieur ou égal à $\min(a^+, b^+) > 0$ en tout point de $\{0\} \times \mathbb{C} \cup \mathbb{C} \times \{0\}$. Soit $p \in I_{f^j} \subset I_\infty^+$ et $q \in \pi^{-1}(p)$. Soit F un relèvement de f dans $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ normalisé de telle sorte que $G^+ \circ F = \rho_+ \cdot G^+$. Comme $F^j(q) \in \{0\} \times \mathbb{C} \cup \mathbb{C} \times \{0\}$, on a

$$\nu(G^+, q) = \frac{1}{\rho_+^j} \nu(G^+ \circ F^j, q) \geq \frac{1}{\rho_+^j} \nu(G^+, F^j(q)) \geq \frac{\min(a^+, b^+)}{\rho_+^j} > 0.$$

Ainsi $\nu(T^+, p) > 0$.

Réciproquement, soit $p \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus I_\infty^+$. Supposons que pour tout $j \geq 0$, $f^j(p) \notin \mathcal{C}_f$. Les nombres de Lelong sont invariants par biholomorphisme (voir [S 74]), donc on a pour tout $j \in \mathbb{N}$

$$\nu(T^+, p) = \frac{1}{\rho_+^j} \nu((f^j)^* T^+, p) = \frac{1}{\rho_+^j} \nu(T^+, f^j(p)) \leq \frac{C}{\rho_+^j}$$

avec $C = \max\{\nu(T^+, z),\ z \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1\}$. Donc $\nu(T^+, p) = 0$.

Quitte à remplacer f par un itéré on peut donc supposer que $p \in \mathcal{C}_f$. Soit V une composante irréductible de $\mathcal{C}_f$ contenant p. Comme T^+ ne charge pas V (théorème 2.8.), il existe $q \in V$ tel que $\nu(T^+, q) = 0$. De plus, il existe une constante $C_f > 0$ telle que $\nu(f^* T^+, p) \leq C_f \times \nu(T^+, f(p))$ (cf [Fa 98] et

[Ki 98]). Donc

$$\nu(T^+,p) = \frac{1}{\rho_+}\nu(f^*T^+,p) \leq \frac{C_f}{\rho_+}\nu(T^+,f(p)) \leq \frac{C_f}{\rho_+}\nu(f^*T^+,q) = 0 \ ,$$

puisque $f(q) = f(p)$ est un point de I^- (cf observation 7.2). □

7.2. Convergence vers T^+ et points exceptionnels.

Soit f une application birationnelle de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ algébriquement stable telle que $\rho_+ > 1$. Le but de ce paragraphe est de caractériser le convexe compact $\mathcal{K}_f$ des courants positifs fermés T de bidegré $(1,1)$ et de masse 1 qui vérifient l'équation fonctionnelle $f^*T = \rho_+ T$. Les éléments extrémaux de $\mathcal{K}_f$ sont T^+ et certains courants d'intégration sur des courbes "exceptionnelles" de l'ensemble critique. Notre principal résultat est le théorème de convergence suivant.

Théorème 7.7. *[Convergence vers T^+]*

Soit f une application birationnelle de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ algébriquement stable t.q. $\rho_+ > 1$. Soit $T^+ = \mathcal{L}(G^+)$ le courant de Green de f.

Alors il existe un ensemble fini $\mathcal{E}x$, tel que pour tout $S \in \mathcal{T}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$, les conditions suivantes sont équivalentes.

1. *Pour tout $p \in \mathcal{E}x$, $\nu(p,S) = 0$.*
2. *Il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de la classe de cohomologie de S t.q.*

$$\frac{1}{\rho_+^j}(f^j)^*(S) \longrightarrow cT^+. \tag{20}$$

De plus si V est un voisinage fixé de $\mathcal{E}x$, la convergence dans (20) est uniforme dans le compact des courants de masse 1 et dont le support évite V.

La démonstration s'appuie sur des estimations volumiques, i.e. sur une minoration fine de la suite $Vol(f^j(E))$ pour un borélien E fixé. Elle se situe dans l'esprit de celle initiée par Bedford-Smillie ([B-S 91]), Fornaess-Sibony ([F-S 92]) dans le cas des applications de Hénon, et de Diller ([Di 96])) dans celui des applications birationnelles de $\mathbb{P}^2$. Notons qu'un résultat similaire se démontre pour les applications birationnelles algébriquement stables de $\mathbb{P}^2$ et constitue la version aboutie des procédés de convergence développés jusqu'à présent, en particulier dans le cas des applications de Hénon.

Commençons par quelques définitions. Nous noterons SA_f l'ensemble des points périodiques superattractifs de f, i.e. ceux dont les deux valeurs propres s'annulent. Cet ensemble est fini car le nombre de cycles superattractifs est majoré par le nombre de composantes irréductibles de l'ensemble critique $\mathcal{C}_f$. On notera de plus $\Omega(SA_f) = \cup_{p \in SA_f} \Omega(p)$ la réunion des bassins d'attractions des cycles superattractifs.

Soit $p \in SA_f$ un point périodique que l'on peut supposer fixe quitte à prendre un itéré de f. Comme f est birationnelle, il découle de la proposition 2.1. de [Fa 99b] que le germe défini par f en p est rigide, c'est-à-dire que $\cup_{n \geq 0} \mathcal{C}_{f^n}$ est un germe de courbe analytique à croisements normaux. L'article [Fa 99b] est consacré à la classification de ce type de germes. On en déduit que (f,p) est conjuguée à l'une des formes normales suivantes.

- Classe 1:
$$f_1(z,w) = (z^{a_1}, \lambda w z^{a_2} + P(z))$$
avec $a_1 \geq 2$, $\lambda \neq 0$, $a_2 \geq 1$ et P est un polynôme s'annulant en 0.
- Classe 2:
$$f_2(z,w) = (z^{a_1} w^{a_2}, z^{a_3} w^{a_4})$$
avec $|a_1 a_4 - a_2 a_3| = 1$.
- Classe 3:
$$f_3(z,w) = \Big((z^{a_1} w^{a_2})^u (1 + \lambda z^{b_1} w^{b_2} + P(z^{a_1} w^{a_2}))^{-a_2}, \\ (z^{a_1} w^{a_2})^v (1 + \lambda z^{b_1} w^{b_2} + P(z^{a_1} w^{a_2}))^{a_1} \Big)$$
avec $a_1 + a_2, b_1 + b_2 \geq 1$, $u, v \geq 1$, $\lambda \neq 0$ et $|a_1 b_2 - a_2 b_1| = 1$ et P est un polynôme s'annulant en 0.

Remarque 7.8. *Lorsque $p \in SA_f$ est fixé, le germe $(\mathcal{C}_f, p)$ n'est pas toujours totalement invariant. Par contre $(\mathcal{C}_{f^2}, p)$ l'est et pour tout $j \geq 2$, $(\mathcal{C}_{f^j}, p) = (\mathcal{C}_{f^2}, p)$. Par la suite nous considérerons ainsi les itérés de f^2.*

Définition 7.9. *Soit $p \in SA_f$ de période n. On définit le réel $\rho(p)$ par*
- *$\rho(p)^n := a_1$ si (f,p) est de classe 1;*
- *$\rho(p)^n := 2^{-1}(a_1 + a_4 + \sqrt{(a_1 - a_4)^2 + 4a_2 a_3})$ si (f,p) est de classe 2;*
- *$\rho(p)^n := a_1 u + a_2 v$ si (f,p) est de classe 3.*

Le réel $\rho(p)^n$ est le rayon spectral de l'action de f^n sur l'espace des $\mathbb{R}$-cycles engendrés par les composantes de $\mathcal{C}_{f^{2n}}$ contenant p.

Notons que $\rho(p) > 1$ dans chacun des trois cas car f est superattractive. Le réel $\rho(p)$ controle précisément la décroissance du volume Vol $(f^j(E))$ lorsque $E \subset \Omega(p)$ (voir proposition 7.13).

Lemme 7.10. *Soit f une application birationnelle de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ algébriquement stable t.q. $\rho_+ > 1$ et $p \in SA_f$ un point périodique. Alors $\rho(p) \leq \rho_+$.*

De plus $\rho(p) = \rho_+$ ssi il existe un $\mathbb{R}$-cycle $[V]$ contenant p, cohomologue à T^+ et à coefficients réels positifs, t.q. $f^*[V] = \rho_+[V]$.

Démonstration. Notons n la période du point p. Puisque f n'est pas un produit croisé (nous avons supposé $\rho_+ > 1$), il existe une constante $c > 0$ telle que $\forall S \in \mathcal{T}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$, $\|(f^j)^*(T)\| \leq c\rho_+^j \|T\|$.

Lorsque f est de classe 1, le germe $\mathcal{C}_{f^n}$ est irréductible en p. Soit V la composante irréductible (globale) de $\mathcal{C}_{f^n}$ contenant p. Au voisinage de p,
$$((f^n)^*[V], p) = (\rho(p)^n [V], p).$$
Globalement on obtient donc $(f^{nj})^*[V] \geq \rho(p)^{nj}[V]$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, d'où $\rho(p) \leq \rho_+$. Lorsque $\rho(p) = \rho_+$, on a $(f^n)^*[V] \geq \rho_+^n[V]$, ce qui force $(f^n)^*[V] = \rho_+^n[V]$. On conclut en remarquant que
$$f^* \left(\sum_{k=0}^{n-1} \rho_+^{n-k} (f^k)^*[V] \right) = \rho_+ \left(\sum_{k=0}^{n-1} \rho_+^{n-k} (f^k)^*[V] \right).$$

Si f est de classe 2 ou 3, notons V_1 et V_2 les deux composantes irréductibles locales du germe défini par $\mathcal{C}_{f^{2n}}$ au voisinage de p. Supposons que V_1 et V_2 appartiennent à la même courbe irréductible $V \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Après un nombre fini d'éclatements de points au dessus de $I_{f^{2n}}$, la transformée stricte de V devient une courbe rationnelle partout lisse (voir e.g. [Be 83]). Or elle ne l'est pas au point $p \notin I_{f^{2n}}$, ce qui est contradictoire. Donc V_1 et V_2 définissent globalement deux courbes irréductibles distinctes.

Définissons le cycle $[V] := a_3[V_1] + (\rho(p)^n - a_1)[V_2]$ si f est de classe 2 (le vecteur $(a_3, \rho(p)^n - a_1)$ est propre pour la matrice $\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{bmatrix}$), et $[V] := a_1[V_1] + a_2[V_2]$ si f est de classe 3. Ce sont des $\mathbb{R}$-cycles à coefficients positifs. Pour tout $j \in \mathbf{N}$, on a localement

$$\big((f^{nj})^*[V], p\big) = (\rho(p)^n[V], p).$$

Comme précédemment, on en déduit $\rho(p) \leq \rho_+$ et, lorsque $\rho(p) = \rho_+$, $(f^n)^*[V] = \rho_+[V]$. □

Définition 7.11. *[Points exceptionnels]*

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ avec $\beta\gamma \neq 0$, et $f \in \mathcal{M}_A$ une application birationnelle algébriquement stable de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ qui n'est pas linéaire (i.e. $\rho_+ > 1$).

Un point $p \in SA_f$ est dit exceptionnel si $\rho(p) = \rho_+$. On notera $\mathcal{E}x$ l'ensemble des points exceptionnels de f.

Le théorème suivant donne une estimation précise de la décroissance de $\mathrm{Vol}(f^j(E))$ lorsque j tend vers l'infini. C'est le point clé de la démonstration du résultat de convergence des courants (théorème 7.7).

Théorème 7.12. *[Estimations volumiques]*

Soit f une application birationnelle de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ algébriquement stable t.q. $\rho_+ > 1$. On note $\Omega(p)$ le bassin d'attraction d'un point $p \in SA_f$. Pour $r > 0$ assez petit, on définit $\Omega_r(p) := \{z \in \Omega(p) \,/\, dist(z, \partial\Omega(p)) > r\}$.

Fixons $\lambda > 1$ et $\rho_0 > 1$ t.q. $\rho > \rho_0 \geq \sup\{\rho(p),\ p \in SA_f \setminus \mathcal{E}x\}$. Alors, il existe C_1, $C_2 > 0$ t.q.

1. *pour tout borélien $E \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \bigcup_{p \in SA_f} \Omega(p)$, et $\forall j \geq 0$,*
$$Vol(f^j(E)) \geq (C_1\, Vol(E))^{C_2 \lambda^j};$$
2. *pour tout borélien $E \subset \bigcup_{p \in SA_f \setminus \mathcal{E}x} \Omega_r(p)$, et $\forall j \geq 0$,*
$$Vol(f^j(E)) \geq (C_1 x(E))^{C_2 \rho_0^j};$$
3. *pour tout borélien $E \subset \bigcup_{p \in \mathcal{E}x} \Omega_r(p)$, et $\forall j \geq 0$,*
$$Vol(f^j(E)) \geq (C_1 x(E))^{C_2 \rho_+^j};$$

avec $-x(E) \log x(E) = Vol(E)$.

Nous commençons par établir la

Proposition 7.13. *Soit $p \in SA_f$ et $B \subset \Omega(p)$ un petit voisinage de p.*

Il existe des constantes D_1, $D_2 > 0$ t.q. pour tout borélien $E \subset B$ et pour tout $j \in \mathbf{N}$,

$$Vol(f^j(E)) \geq (D_1 x(E))^{D_2 \rho(p)^j},$$

où $x(E)$ est défini par la relation $-x(E) \log x(E) = Vol(E)$.

Démonstration. La preuve est similaire à celle du lemme 3.3. Il nous faut estimer Vol $\{|Jf^j|^2 \leq t\}$ pour $t \ll 1$ au voisinage de p. Pour cela on calcule explicitement Jf à l'aide de la forme normale de f.

Classe 1:

$$|Jf| = |\lambda a_1||z|^{a_1+a_2-1}.$$

Classe 2:

$$|Jf| = |z|^{a_1+a_3-1}|w|^{a_2+a_4-1}.$$

Classe 3:

$$|Jf| = |\lambda\rho(p)||z|^{a_1(u+v)+b_1-1}|w|^{a_2(u+v)+b_2-1}(1+\psi)^{a_1-a_2},$$

avec $\psi(z,w) = \lambda z^{b_1}w^{b_2} + P(z^{a_1}w^{a_2})$.

On remplace alors dans les formules ci-dessus f par son itéré f^j et on en déduit une minoration de $|Jf|^j$. Dans le cas des classes 1 et 2, le calcul se fait simplement. Pour f de la classe 3, on observe que

$$f^{j+1}(z,w) = \Big((z^{a_1}w^{a_2})^{u\rho(p)^j}(1+\psi\circ f^j))^{-a_2}, \\ (z^{a_1}w^{a_2})^{v\rho(p)^j}(1+\psi\circ f^j))^{a_1} \Big).$$

On en déduit l'existence d'une constante $C > 0$ t.q. pour tout $j \geq 0$

Classe 1:

$$|Jf|^j \geq D^j|z|^{C\rho(p)^j},$$

avec $D = |\lambda a_1|$.

Classe 2:

$$|Jf|^j \geq |zw|^{C\rho(p)^j}.$$

Classe 3:

$$|Jf|^j \geq D^j|z|^{C\rho(p)^j},$$

avec $D = |\lambda(a_1u + a_2v)|$.

On peut alors reprendre la démonstration du lemme 3.3 pour conclure. □

Remarque 7.14. *On peut remplacer $x(E)$ par Vol(E) lorsque f est de classe 1, ou de classe 2 avec $a_1 + a_3 \neq a_2 + a_4$, ou encore de classe 3 avec $a_1 \neq a_2$.*

Démonstration du théorème 7.12. La première assertion est une adaptation immédiate du théorème 3.11 de [Di 96] que nous laissons au lecteur.

Pour prouver la seconde et la troisième, on vérifie que pour $r \ll 1$ et $p \in SA_f$ fixés, et pour tout borélien $E \subset \Omega_r(p)$ et $j \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathrm{Vol}(f^j(E)) \geq (C_1x(E))^{C_2\rho(p)^j}.$$

On choisit $N \in \mathbb{N}$ assez grand pour que $f^N(\Omega_r(p)) \subset B$, où B est un voisinage de p sur lequel les estimations de la proposition 7.13 sont valides.

On peut de plus trouver $C > 0$ t.q. pour tout borélien $E \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

$$\mathrm{Vol}(f^N(E)) \geq (\mathrm{Vol}(E))^C$$

(voir e.g. corollary 3.13 de [Di 96]). On a donc, pour $j \geq N$,

$$\mathrm{Vol}(f^j(E)) \geq (\mathrm{Vol}(f^{j-N}(E))^C \geq (D_1x(E))^{CD_2\rho(p)^{j-N}},$$

ce qui achève la démonstration. □

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le théorème de convergence.

Démonstration du théorème 7.7. Soit $S \in \mathcal{T}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$. Supposons que $\nu(p, S) > 0$ pour un point $p \in \mathcal{E}x$. Quitte à changer f en f^l, on peut supposer $f(p) = p$ et $f(V) = p$, où V est le $\mathbb{R}$-cycle défini par le lemme 7.10. Soit $q \in V \setminus I_f$, on a

$$\nu(f^*S, q) \geq \nu(S, f(q)) = \nu(S, p) > 0.$$

Ainsi $f^*S \geq c \cdot [V]$ pour une constante $c > 0$. Mais alors $\forall j \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{\rho_+^j}(f^j)^*S \geq c\frac{1}{\rho_+^j}(f^{j-1})^*[V] = \frac{c}{\rho_+}[V],$$

donc $\rho_+^{-j}(f^j)^*S$ ne peut pas converger vers un multiple de T^+.

Réciproquement, soit $S \in \mathcal{T}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ un courant cohomologue à $a_S\omega_1 + b_S\omega_2$ t.q. $\nu(p, S) = 0$ pour tout point $p \in \mathcal{E}x$. Soit $\varphi = \mathcal{L}^{-1}(S)$ un potentiel normalisé de S dans $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$. La fonction psh $u_j := \rho_+^{-j}\varphi \circ F^j$ est un potentiel de $\rho_+^{-j}(f^j)^*(S)$. On va prouver que $u_j \to cG^+$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{C}^4)$ pour une constante $c > 0$. La condition d'homogénéité sur φ assure, $\forall (z, w) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$,

$$\varphi(z, w) \leq a_S \log|z| + b_S \log|w|.$$

On en déduit $\forall j \geq 0$, $\forall (z, w) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$,

$$u_j \leq \rho_+^{-j}\left(a_S \log|P^j| + b_S \log|Q^j|\right).$$

Nous prouvons ci-après le

Lemme 7.15. *Posons*

$$E_\varepsilon^j := \{([z], [w]) \text{ t.q. } u_j - \rho_+^{-j}(a_S \log|P^j| + b_S \log|Q^j|) < -\varepsilon\} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{j\to\infty}$ *Vol* $(E_\varepsilon^j) = 0$.

On peut écrire $\rho_+^{-j}A^j \cdot {}^t(a_s, b_s) = c\ {}^t(a^+, b^+) + {}^t(a^j, b^j)$ avec $c > 0$, où le dernier terme (a^j, b^j) décroit exponentiellement vite vers zéro à la vitesse $(\rho_-/\rho_+)^j$. On a donc,

$$\lim_{j\to\infty} \rho_+^{-j}(a_S \log|P^j| + b_S \log|Q^j|) = cG^+.$$

Les $\{u_j\}$ forment une suite de fonctions psh localement uniformément majorées. On peut en extraire une sous-suite convergeant dans L^1_{loc} vers une fonction u psh ou identiquement égale à $-\infty$. Le lemme précédent implique alors que $u = cG^+$ presque partout, ce qui conclut la preuve.

Soit S_k une suite de courants de masse uniformément bornée par 1 et dont le support évite un voisinage V fixé de $\mathcal{E}x$. Alors en terme de classe de cohomologie, et pour des constantes $c_k > 0$, on a $\rho_+^{-j}[(f^j)^*S_k] \to c_k[T^+]$ uniformément en k. D'autre part, une conséquence standard des inégalités de Harnack donne l'existence d'une constante $C > 0$ t.q. les potentiels $\varphi_k := \mathcal{L}^{-1}(S_k)$ satisfont $\varphi_k \geq c_kG^+ - C$ dans $\pi^{-1}(V)$. En reprenant la démonstration précédente, on en déduit que $\rho_+^{-j}\varphi_k \circ F^j \to c_kG^+$ uniformément en k. □

Démonstration du lemme 7.17. Pour estimer Vol (E^j_ε), on remarque tout d'abord que $\forall\varepsilon > 0$, $\forall j \geq 0$,

$$f^j(E^j_\varepsilon) \subset E^0_{\varepsilon\rho^j_+},$$

et on utilise les estimées volumiques précédentes (théorème 7.12).

Fixons $r > 0$ arbitrairement petit, et notons

$$F_r := \left(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \cup_{p\in SA_f}\Omega(p)\right) \bigcup_{p\in SA_f\setminus\mathcal{E}x} \Omega_r(p).$$

On va estimer tout d'abord Vol $(E^j_\varepsilon \cap F_r)$. Il est classique (voir e.g. [Ki 98]) qu'il existe des constantes D_1, $D_2 > 0$ t.q. $\forall t > 1$

$$\text{Vol }(E^0_t) \leq D_1 \exp(-D_2 t).$$

Combinons les deux premières assertions du théorème 7.12. On peut trouver des constantes C_1, $C_2 > 0$ t.q. $\forall j \geq 0$,

$$\begin{aligned}(C_1 x(E^j_\varepsilon \cap F_r))^{C_2\rho^j_0} &\leq \text{Vol }(f^j(E^j_\varepsilon) \cap F_r)\\ &\leq \text{Vol }(E^0_{\varepsilon\rho^j_+}) \leq D_1 \exp(-D_2\varepsilon\rho^j_+).\end{aligned}$$

On en déduit que pour des constantes $C, C' > 0$

$$x(E^j_\varepsilon \cap F_r) \leq C \exp\left(-C'\left(\frac{\rho_+}{\rho_0}\right)^j\right) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En notant $\Omega(\mathcal{E}x) = \cup_{p\in\mathcal{E}x}\Omega(p)$, et en faisant tendre r vers 0, on en déduit que $\lim_{j\to\infty} \text{Vol}(E^j_\varepsilon \setminus \Omega(\mathcal{E}x)) = 0$.

On va estimer maintenant Vol $(E^j_\varepsilon \cap \Omega(\mathcal{E}x))$. Pour cela on fixe $r > 0$ assez petit et on étudie Vol $(E^j_\varepsilon \cap \Omega_r(\mathcal{E}x))$. On notera aussi $B_\eta(\mathcal{E}x)$ l'union des boules centrées sur $\mathcal{E}x$ et de rayon η. Par hypothèse, pour tout $p \in \mathcal{E}x$ on a $\nu(p, S) = 0$. Le volume Vol (E^0_t) pour $t \gg 1$ est donc extrèmement petit au voisinage de $\mathcal{E}x$. Plus précisément (voir [Ki 98]), pour tout $R \gg 0$ fixé, il existe $\eta > 0$ petit et $D_3 > 0$ t.q. pour tout $t \geq 1$,

$$\text{Vol }(E^0_t \cap B_\eta(\mathcal{E}x))) \leq D_3 \exp(-Rt).$$

On peut appliquer la troisième assertion du théorème 7.12. Pour tout $j \in \mathbb{N}$ assez grand t.q. $f^j\Omega_r(\mathcal{E}x) \subset B_\eta(\mathcal{E}x)$ on obtient:

$$\begin{aligned}\left(C_1 x(E^j_\varepsilon \cap \Omega_r(\mathcal{E}x))\right)^{C_2\rho^j_+} &\leq \text{Vol }(f^j(E^j_\varepsilon) \cap \Omega_r(\mathcal{E}x))\\ &\leq \text{Vol }(E^0_{\varepsilon\rho^j_+} \cap f^j(\Omega_r(\mathcal{E}x)))\\ &\leq \text{Vol }(E^0_{\varepsilon\rho^j_+} \cap B_\eta(\mathcal{E}x)) \leq D_3 \exp(-R\varepsilon\rho^j_+).\end{aligned}$$

Cela prouve que

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\, x(E^j_\varepsilon \cap \Omega_r(\mathcal{E}x)) \leq C_1^{-1} \exp(-\varepsilon C_2^{-1} R)$$

et on conclut en faisant tendre R vers l'infini. □

Le résultat suivant est une conséquence simple du théorème de convergence.

Proposition 7.16. *Le courant de Green T^+ est extrémal dans $\mathcal{T}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$.*

Démonstration. Soit $S \in \mathcal{T}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ tel que $S \leq T^+$. On veut montrer que S est proportionnel à T^+. Considérons S_j l'extension triviale de $\rho_+^j (f^j_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \mathcal{C}_{f^{-j}}})^*(S)$ à travers $\mathcal{C}_{f^{-j}}$. Le courant T^+ vérifie $\rho_+^j (f^{-j})^* T^+ = T^+$ dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \mathcal{C}_{f^{-j}}$, on en déduit l'inégalité $S_j \leq T^+$ valable dans tout $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ puisque T^+ et S_j ne chargent pas $\mathcal{C}_{f^{-j}}$.

Soit à présent $S'_j = (f^j)^* S_j / \rho_+^j$. L'invariance de T^+ donne $S'_j \leq T^+$ donc S'_j ne charge pas $\mathcal{C}_{f^j} \cup \mathcal{C}_{f^{-j}}$ (théorème 2.8). Mais on a clairement $S'_j = S$ hors de $\mathcal{C}_{f^j} \cup \mathcal{C}_{f^{-j}}$, comme S ne charge pas non plus les hypersurfaces, on en déduit que $S'_j = S$ dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Notons θ_1 et θ_2 deux générateurs de $H^{1,1}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathbb{R})$ correspondants aux deux valeurs propres ρ_+ et ρ_- de A. La classe de S_j se décompose en $[S_j] = x_j \theta_1 + y_j \theta_2$. On en déduit que

$$[S] = \left[\frac{1}{\rho_+^j} (f^j)^* S_j \right] = x_j \theta_1 + \left(\frac{\rho_-}{\rho_+} \right)^j y_j \theta_2.$$

Puisque f n'est ni linéaire, ni un produit croisé, on a $|\rho_-| < \rho_+$ (cf lemme 2.1). Il s'ensuit que pour tout j, on a $y_j = 0$ et $x_j = x$. Ainsi S est cohomologue à xT^+ avec $0 \leq x \leq 1$.

De $S_j \leq T^+$ on déduit que $\operatorname{Supp} S_j \cap \overline{V} = \emptyset$, où V désigne un voisinage assez petit de l'ensemble des points périodiques superattractifs de f. Le théorème 7.7 assure alors que $(f^j)^*(S_j/x)/\rho_+^j$ converge vers T^+, d'où $S = xT^+$. □

7.3. Applications birationnelles polynomiales dans $\mathbb{C}^2$.

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ et $f \in \mathcal{M}_A$ une application birationnelle de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Il est naturel (cf proposition 1.5.2) de se restreindre aux applications telles que $I_P \cap I_Q = \emptyset$. Dans ce cas, la proposition 4.7 permet d'exprimer le degré topologique $d_t(f) = \alpha\delta + \beta\gamma = 1$. On a donc $\beta\gamma = 0$ ou $\alpha\delta = 0$. Lorsque $\beta = 0$ (le cas $\gamma = 0$ se traite par symétrie), on obtient $\alpha = \delta = 1$; le premier facteur est donc linéaire et la dynamique de ce produit croisé est assez simple à étudier. Dans la suite nous nous intéressons au cas $\alpha = 0$ (le cas $\delta = 0$ se traite similairement). On a $\beta = \gamma = 1$ et on peut conjuguer f linéairement pour se ramener à l'étude de

$$f : ([z], [w]) \mapsto ([w], [C(w)z_1 + D(w)z_0 : A(w)z_1 + B(w)z_0]),$$

où A, B, C, D sont des polynômes homogènes de degré δ en $w = (w_0, w_1)$.

Nous considérons ici le cas des applications qui sont **polynomiales** dans $\mathbb{C}^2$. Pour une application de la forme précédente, cela revient à imposer $C \equiv 0$ et $D \equiv w_0$, i.e.

$$f : (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (w, A(w)z + B(w)) \in \mathbb{C}^2,$$

avec $A, B \in \mathbb{C}[w]$ et $A \not\equiv 0$. Lorsque A est un polynôme constant, on dira que f est une application de Hénon.

Plus généralement, on introduit le semi-groupe suivant.

Définition 7.17. *Soit $\mathcal{H}$ le semi-groupe des applications birationnelles polynomiales $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ s'écrivant sous la forme $f = h_s \circ \cdots \circ h_1$ avec*

$$h_i : (z, w) \mapsto (w, A_i(w)z + B_i(w)),$$

où $A_i, B_i \in \mathbb{C}[w]$, $A_i \not\equiv 0$, et $\delta_i := \max\{1 + \deg(A_i), \deg(B_i)\} \geq 2$.

Le théorème de Jung (voir théorème 2.6 de [F-M 89]) permet de montrer que tout automorphisme polynomial de $\mathbb{C}^2$ est conjugué par un automorphisme polynomial soit à une composée d'applications de Hénon, soit à une application élémentaire $(z, w) \mapsto (az + b, cw + B(z))$ avec $a, c \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, et $B \in \mathbb{C}[z]$, soit à un automorphisme affine.

Question. Toute application birationnelle polynomiale de $\mathbb{C}^2$ est-elle conjuguée par un automorphisme polynomial de $\mathbb{C}^2$ à l'une des applications suivantes?

1. un élément de $\mathcal{H}$;
2. une application élémentaire de la forme $(z, w) \mapsto (az+b, A(z)w+B(z))$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, $A, B \in \mathbb{C}[z]$, et $A \not\equiv 0$.
3. un automorphisme affine.

La proposition suivante indique que tout élément de $\mathcal{H}$ se compactifie de manière algébriquement stable soit dans $\mathbb{P}^2$, soit dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Proposition 7.18. *Soit $f = h_1 \circ \cdots \circ h_s \in \mathcal{H}$ avec*

$$h_i : (z, w) \mapsto (w, A_i(w)z + B(w)),$$

où $A_i, B_i \in \mathbb{C}[w]$ et $A_i \not\equiv 0$, et $\delta_i := \max\{1 + \deg A_i, \deg B_i\} \geq 2$. Notons δ le degré total de f; ρ_+ le rayon spectral de la matrice des degrés en z, w de f et (a, b) le vecteur propre associé, à coefficients réels positifs normalisés par $a + b = 1$.

1. *Si $\deg A_s \leq \deg B_s - 1$, f se compactifie en une application algébriquement stable de $\mathbb{P}^2$. L'hyperplan à l'infini $\{t = 0\}$ est contracté par f sur le point $q = [0 : 1 : 0]$ qui est superattractif. Soit $\Omega_q \subset \mathbb{C}^2$ son bassin d'attraction.*
   Le courant positif invariant $T^+ := \lim_{j\to\infty} \delta^{-j}(f^j)^*\omega_{FS}$ admet pour potentiel dans $\mathbb{C}^2$ la fonction $g^+ := \lim_{j\to\infty} \delta^{-j} \log^+ \|f^j\|$. Celle-ci est psh, continue, et $\{g^+ > 0\} = \Omega_q$.
2. *Si $\deg A_s \geq \deg B_s$, f se compactifie en une application algébriquement stable de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Les deux droites à l'infini $\{z_0 w_0 = 0\}$ sont contractées par f^2 sur le point $q = ([0 : 1], [0 : 1])$ qui est superattractif. Soit $\Omega_q \subset \mathbb{C}^2$ son bassin d'attraction.*
   Le courant positif invariant $T^+ := \lim_{j\to\infty} \rho_+^{-j}(f^j)^*(a\omega_1 + b\omega_2)$ admet pour potentiel dans $\mathbb{C}^2$ la fonction $g^+ := \lim_{j\to\infty} \rho_+^{-j} \log^+ \|f^j\|$. Celle-ci est psh, continue, et $\{g^+ > 0\} = \Omega_q$.

Comme f est birationnelle, on peut également considérer T^- le courant invariant associé à son inverse. Le courant T^+ admet un potentiel continu hors des points de $I^+_\infty = I_{f^2}$ qui sont en nombre fini, on peut donc définir le produit $T^+ \wedge T^-$ en raffinant la méthode de Bedford-Taylor [B-T 82] (voir [De 93] et [F-S 95b]).

Théorème 7.19. *Soit $f \in \mathcal{H}$. La mesure $\mu := T^+ \wedge T^- / \|T^+ \wedge T^-\|$ est une mesure de probabilité dans $\mathbb{C}^2$ qui ne charge pas l'infini et vérifie $f^*\mu = f_*\mu = \mu$. Elle est mélangeante.*

Exemples 7.20. *Soit $f : (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (w, zw^\delta) \in \mathbb{C}^2$. Alors f admet une extension méromorphe algébriquement stable birationnelle dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et on vérifie que $E^+ = I^+ = \{([0:1],[1:0]);([1:0],[0:1])\}$. L'application inverse est $f^{-1}(z, w) = (w/z^\delta, z)$ et on a $E^- = I^- = \{([1:0],[1:0]);([0:1],[0:1])\}$.*

La fonction $g^+(z, w) = \log^+(|z||w|^{\rho_+})/(1 + \rho_+)$ est un potentiel de T^+ dans $\mathbb{C}^2$, où $\rho_+ = (\delta + \sqrt{\delta^2 + 4})/2$ (cf section 3). La fonction $g^-(z, w) = \max(\log |w|^{|\rho_-|}, \log |z|)/(1 + |\rho_-|)$ est un potentiel de T^- dans $\mathbb{C}^2$, où $\rho_- = (\delta - \sqrt{\delta^2 + 4})/2$ (on vérifie en effet que g^{-2} est une application monomiale d'une forme analogue à celle de g^2 lorsqu'on effectue le changement de carte $z \to 1/z$). Dans ce cas, la mesure $\mu := T^+ \wedge T^- / \|T^+ \wedge T^-\|$ est la mesure de Lebesgue sur le tore $\{|z| = |w| = 1\}$.

Exemples 7.21. *Nous nous intéressons ici au cas particulier $f(z, w) = (w, A(w)z)$ avec $\deg A \geq 1$. Considérons son extension méromorphe $\tilde{f}$ dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. L'ensemble d'indétermination de f est*

$$I^+ = \{([1:0],[0:1]);([0:1],[1:\zeta]) \text{ où } A(\zeta) = 0\}$$

et on a

$$I^+_\infty = I_{f^2} = I^+ \cup \{([0:1],[1:0])\}.$$

L'ensemble d'indétermination de l'inverse $\tilde{f}^{-1}$ est

$$I^- = \{([0:1],[0:1])\,;\,([1:\zeta],[1:0]) \text{ où } A(\zeta) = 0\}.$$

L'ensemble I^-_∞ est constitué du point à l'infini $q = ([0:1],[0:1])$ et de la réunion des orbites -sous l'action de f- des points $(\zeta, 0)$, où $\zeta \in A^{-1}(0)$. On obtient donc

$$I^-_\infty = \left\{q\,;(\lambda^j\zeta, 0), (0, \lambda^{j+1}\zeta) \text{ avec } \zeta \in A^{-1}(0) \text{ et } j \geq 0\right\},$$

où on a posé $\lambda = A(0)$.

Lorsque $|\lambda| < 1$, les points de I_f sont envoyés par f^{-1} sur le $2-$cycle $\{([1:0],[0:1]);([0:1],[1:0])\}$ qui est attractif pour f^{-1}. L'application f est donc normale et le support de la mesure μ est compact dans $\mathbb{C}^2$.

Lorsque $|\lambda| = 1$, on a $E^+ \cap E^- = \emptyset$. Notons que la fonction de Green g^- est alors discontinue sur les cercles $\{|z| = |\zeta|\} \times \{0\}$ et $\{0\} \times \{|w| = |\zeta|\}$ si λ est d'argument irrationnel.

Lorsque $|\lambda| > 1$, $E^+ \cap E^-$ est non vide, constitué du 2-cycle $\{([0:1],[1:0]);([1:0],[0:1])\}$ qui est semi-répulsif pour $\tilde{f}^{-1}$ (de valeurs propres 0 et λ). Nous pensons que le support de la mesure mélangeante μ n'est pas compact dans $\mathbb{C}^2$ lorsque $|\lambda| \geq 1$.

Le reste de cette partie est consacré aux preuves de la proposition 7.18 et du théorème 7.19.

Démonstration de la proposition 7.18 Notons $f_s = (P_s, Q_s) = h_1 \circ \cdots \circ h_s$, nous allons démontrer par récurrence sur $s \geq 1$ que

1) si $\deg A_s < \deg B_s$, alors $\deg_w Q_s = \deg Q_s > \deg P_s = \deg_w P_s$;
2) si $\deg A_s \geq \deg B_s$, alors $\deg_z Q_s + \deg_w Q_s = \deg Q_s > \deg P_s = \deg_z P_s + \deg_w P_s$.

L'assertion est claire pour $s = 1$. Supposons la vérifiée au rang $s - 1$ et écrivons les relations de récurrence

$$\begin{aligned} P_s(z,w) &= P_{s-1}(w, A_s(w)z + B_s(w)) \\ Q_s(z,w) &= Q_{s-1}(w, A_s(w)z + B_s(w)). \end{aligned}$$

Il suffit alors d'examiner les quatres cas qui se présentent, selon que f_{s-1} et h_s sont de "type $\mathbb{P}^2$" ou de "type $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$".

Les assertions concernant le comportement de f_s à l'infini en résultent, celles concernant le courant de Green découlent du théorème 5.2 lorsque f admet une extension algébriquement stable dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, elles s'obtiennent de manière analogue -le contrôle de la croissance est plus simple à obtenir-lorsque f admet une extension algébriquement stable dans $\mathbb{P}^2$. $\square$

Démonstration du théorème 7.13. Supposons que f se compactifie de manière algébriquement stable dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (le cas $\mathbb{P}^2$ se traite similairement).

Le courant T^+ admet un potentiel continu dans $\mathbb{C}^2$, comme de plus T^- ne charge pas les hypersurfaces, la mesure $\mu|_{\mathbb{C}^2}$ ne charge pas les hypersurfaces (voir proposition 4.11). En particulier elle ne charge ni $\mathcal{C}^+$ ni $\mathcal{C}^-$, ce qui assure $f^*\mu|_{\mathbb{C}^2} = f_*\mu|_{\mathbb{C}^2} = \mu|_{\mathbb{C}^2}$.

Montrons à présent que μ ne charge pas les points d'indétermination de f^2, ce qui assurera que $\mu|_{\mathbb{C}^2}$ est une mesure de probabilité puisque le support de T^+ ne rencontre l'infini qu'aux points de $I_\infty^+ = I_{f^2}$. Soit $p \in I_\infty^+$, on se place dans une carte locale avec $p = 0$ et on note G^+ un potentiel continu de T^+ dans $B_0 \setminus \{0\}$, où B_0 est une boule centrée en $p = 0$. La fonction G^+ est une fonction psh semi-exhaustive dans B_0 (voir definition 4.1 p.137 [De 93]) et la masse de μ en $p = 0$ est un multiple du nombre de Lelong $\nu(T^-, G^+)$ de T^- par rapport à la fonction G^+ (definition 4.2 p.137 [De 93]). La proposition 5.7 assure

$$\limsup_{z \to 0} \frac{G^+(z)}{\log|z|} \leq c < +\infty \ .$$

Le théorème de comparaison des nombres de Lelong généralisés de Demailly (First comparison theorem p.148 [De 93]) donne alors $\nu(T^-, G^+) \leq c \cdot \nu(T^-, 0)$. Comme f est algébriquement stable, on a $I_\infty^+ \cap I_\infty^- = \emptyset$ (proposition 7.4), d'où $\nu(T^-, 0) = 0$ (proposition 7.5). Il s'ensuit que μ ne charge pas le point $p = 0$.

Nous en déduisons à présent le mélange de μ en reprenant la démonstration proposée par Sibony dans le cas des automorphismes polynomiaux réguliers de $\mathbb{C}^k$ (théorème 7.1 p.52 [Si 98]). Nous renvoyons à [Wa 82] pour les définitions concernant le mélange (fort). Si ψ et χ sont des fonctions test, il s'agit de montrer que

$$\int \psi(f^{-j})\chi d\mu \to \left(\int \psi d\mu\right)\left(\int \chi d\mu\right).$$

Puisque μ ne charge pas les points de I^+_∞, ni les droites à l'infini, on peut supposer que les supports de ψ et χ sont inclus dans $\mathbb{C}^2$. Enfin on ne perd rien à supposer que $0 \leq \psi, \chi \leq 1$. Considérons $R_j := (f^{-j})^*(\psi T^-)/\rho_+^j$. La proposition 7.22 qui suit montre que R_j converge vers $c_\psi \cdot T^-$ avec $c_\psi = \int \psi d\mu$ et $dR_j, dd^c R_j$ convergent vers 0 en masse. Il s'ensuit que $\psi(f^{-j})T^+ \wedge T^-$ converge vers $c_\psi T^+ \wedge T^-$. Soit en effet θ une fonction test à support dans une boule de $\mathbb{C}^2$, on note G^+ un potentiel continu de T^+ dans cette boule. Alors

$$\begin{aligned}
&< \psi(f^{-j})T^- \wedge T^+, \theta >=< \frac{1}{\rho_+^j}(f^{-j})^*(\psi T^-) \wedge T^+, \theta > \\
&=< dd^c \left(\frac{1}{\rho_+^j}(f^{-j})^*(\psi T^-)\theta \right), G^+ > \\
&=< R_j \wedge dd^c\theta, G^+ > + < \theta dd^c R_j, G^+ > +2 < dR_j \wedge d^c\theta, G^+ > .
\end{aligned}$$

Le premier terme converge vers $< c_\psi \cdot T^- \wedge dd^c\theta, G^+ >=< c_\psi \cdot T^+ \wedge T^-, \theta >$ puisque G^+ est continue au voisinage du support de θ et les deux derniers convergent vers 0 puisque $\|dR_j\|$ et $\|dd^c R_j\|$ convergent vers 0. On a donc bien

$$\int \psi(f^j)\chi d\mu =< \psi(f^j)T^+ \wedge T^-, \frac{\chi}{\|T^+ \wedge T^-\|} >\longrightarrow < \mu, \psi >< \mu, \chi > .$$

□

Proposition 7.22. *Soit $f \in \mathcal{H}$. Soit ψ une fonction test. Alors la suite de courants*

$$R_j := \frac{1}{\rho_+^j}(f^{-j})^*(\psi T^-) = (\psi \circ f^{-j})T^-$$

converge vers $c_\psi \cdot T^-$, où $c_\psi =< \mu, \psi >= \int \psi T^+ \wedge T^- / \|T^+ \wedge T^-\|$. De plus dR_j et $dd^c R_j$ convergent vers 0 en masse.

Démonstration. On ne perd rien à supposer que $0 \leq \psi \leq 1$. La suite de courants positifs R_j est de masse uniformément bornée et vérifie donc $R_j \leq T^-$. Comme R_j ne charge pas l'hypersurface $\mathcal{C}_{f^{-j}}$, on a

$$< R_j, T^+ >= \int_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \mathcal{C}_{f^j}} \psi T^- \wedge \frac{1}{\rho_+^j}(f^j)^*(T^+) = \int \psi T^+ \wedge T^-,$$

puisque μ ne charge pas l'hypersurface $\mathcal{C}_{f^j}$. Nous allons montrer que dR_j converge vers 0 en masse, il s'ensuit que toute valeur d'adhérence S de la suite R_j est un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Mais $S \leq T^-$, donc S est proportionnel à T^- (proposition 7.16). La constante de proportionnalité c vérifie

$$c < T^+, T^- >= \lim < R_{j_k}, T^+ >= \int \psi T^+ \wedge T^-,$$

donc $c = c_\psi$ est indépendante de S, d'où R_j converge vers $c_\psi T^-$.

Soit θ une $(0,1)$ forme test. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$\begin{aligned}\left|\int \partial R_j \wedge \theta\right| &= \frac{1}{\rho_+^j}\left|\int \partial\psi \wedge T^- \wedge (f^j)^*\theta\right| \\ &\leq \frac{1}{\rho_+^j}\left|T^- \wedge \partial\psi \wedge \overline{\partial\psi}\right|^{1/2} \cdot \left|\int T^- \wedge (f^j)^*\theta \wedge \overline{(f^j)^*\theta}\right|^{1/2} \\ &= \frac{1}{\rho_+^{j/2}}\left|\int T^- \wedge \partial\psi \wedge \overline{\partial\psi}\right|^{1/2} \cdot \left|\int T^- \wedge \theta \wedge \overline{\theta}\right|^{1/2},\end{aligned}$$

les égalités étant justifiées par le fait qu'aucun des courants impliqués ne charge les hypersurfaces. Par suite $\|\partial R_j\|$ converge vers 0 et $\|dR_j\|$ également puisque R_j est positif. Soit à présent χ une fonction test, on a

$$|< dd^c R_j, \chi >| = \frac{1}{\rho_+^j}\left|\int \chi \circ f^j dd^c\psi \wedge T^-\right| \leq \frac{C}{\rho_+^j}\|\chi\|_{L^\infty} \cdot \|\psi\|_{\mathcal{C}^2},$$

donc $\|dd^c R_j\|$ tend vers 0. □

Références

Be 83 A.BEAUVILLE: Complex algebraic surfaces, Cambridge univ. press, 1983.

Br 97 J.-Y.BRIEND: Exposants de Lyapunov et points péridodiques d'endomorphismes holomorphes de $\mathbb{CP}^k$. Thèse, Toulouse, 1997.

Br-D 98 J.-Y.BRIEND & D.DUVAL: Exposants de Liapunoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$. Preprint.

B-S 91 E.BEDFORD & J.SMILLIE: Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$: Currents, equilibrium measure and hyperbolicity. Invent. Math. 103 (1991), 69-99.

B-S 92 E.BEDFORD & J.SMILLIE: Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$ III: Ergodicity, exponents and entropy of the equilibrium measure. Math. Ann. 294 (1992), 395-420.

B-T 82 E.BEDFORD & B.-A.TAYLOR: A new capacity for plurisubharmonic functions. Acta Math. 149 (1982), 1-40.

De 93 J.-P.DEMAILLY: Monge-Ampère Operators, Lelong numbers and intersection theory, in Complex Analysis and Geometry. Ed. A.Ancona and A.Silva. Plenum Press (1993), 115-193.

Di 96 J.DILLER: Dynamics of birational maps of $\mathbb{P}^2$. Indiana Univ. Math. J. 45 (1996), 721-772.

Fa 98 C.FAVRE: Pull-back and Lelong number of currents. A paraitre dans Bull. de la SMF.

Fa 99 C.FAVRE: Multiplicity of holomorphic functions. Preprint. 1999.

Fa 99b C.FAVRE: Classification of two-dimensional rigid germs and Kato surfaces. Preprint. 1999.

F 91 S.FRIEDLAND: Entropy of polynomial and rational maps. Ann. of Math. 133 (1991), 359-368.

F-M 89 S.FRIEDLAND & J.MILNOR: Dynamical properties of plane automorphisms. Erg. Th. and Dynam. Syst. 9 (1989). 67-99.

F-S 92 J.-E.FORNAESS & N.SIBONY: Complex Henon mappings in $\mathbb{C}^2$ and Fatou Bieberbach domains. Duke Math. J. 65 (1992), 345-380.

F-S 94 J.-E.FORNAESS & N.SIBONY: Complex dynamics in higher dimension I. Astérisque 222 (1994), 201-213.

F-S 95 J.-E.FORNAESS & N.SIBONY: Complex dynamics in higher dimension II. In Annals of Mathematics Studies 137. Princeton university press (1995), 135-182.

F-S 95b J.-E.FORNAESS & N.SIBONY: Oka's inequality for currents, Math. Ann. 301 (1995), 399-419.

G-97 V.GUEDJ: Representation theorems for positive closed $(1,1)-$currents on flag manifolds of $GL_m(\mathbb{C})$, preprint (1997).

G-S 99 V.GUEDJ & N.SIBONY: Dynamics of polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^k$, in preparation.

He 96 S.-M.HEINEMANN: Julia sets for holomorphic endomorphisms of $\mathbb{C}^n$. Ergodic Theory Dyn. Syst. 16 (1996), 1275-1296.

Jo 97 M.JONSSON: Dynamics of polynomial skew products on $\mathbb{C}^2$. Doctoral thesis, K.T.H. Stockholm (1997).

K-H 95 A.KATOK & HASSELBLATT: Introduction to the modern theory of dynamical systems. Cambridge Univ. Press (1995).

Ki 98 C.KISELMAN: Ensembles de sous-niveau et images inverses des fonctions plurisousharmoniques. A paraitre dans Bull. des Sci. Math.

P-S 91 T.PETERNELL & M.SCHNEIDER: Compactifications of $\mathbb{C}^n$: A Survey. In Proc. of Symp. in Pure Mathematics vol. 52, part 2. Several Complex Variables and Geometry (1991), 455-466.

P 85 F.PRZYTYCKI: Hausdorff dimension of harmonic measure on the boundary of an attractive basin for a holomorphic map. Inv. Math. 80 (1985), 161-179.

R-S 97 A.RUSSAKOVSKII & B.SHIFFMAN: Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics. Indiana Univ. Math. J. 46 (1997), 897-932.

Se 97 O.SESTER: Etude dynamique des polynômes fibrés. Thèse de doctorat, Université Paris-sud (1997).

Si 85 N.SIBONY: Quelques problèmes de prolongement de courants en Analyse Complexe. Duke Math. J. 52 (1985),157-197.

Si 98 N.SIBONY: Dynamique des applications rationnelles de $\mathbb{P}^k$. A paraitre dans Panorama et Syntheses.

Sk 82 H.SKODA: Prolongement des courants positifs fermés de masse finie. Inv. Math. 66 (1982), 361-376.

S 74 Y.-T.SIU: Analyticity of sets associated to Lelong numbers and extension of closed positive currents. Invent. Math. 27 (1974), 53-156.

Wa 82 P.WALTERS: An introduction to ergodic theory. Springer Verlag 1982.

Y 95 L.-S.YOUNG: Ergodic theory of differentiable dynamical systems. In B. Branner, P.Hjorth ed., Real and complex dynamical systems. Kluwer Academic Publishers (1995), 293-336.

Charles FAVRE, Département de Mathématiques, Bat. 425, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay Cedex, France
E-mail address: Charles.Favre@anh.math.u-psud.fr

Vincent GUEDJ, Département de Mathématiques, Bat. 425, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay Cedex, France
E-mail address: guedj@ens.fr